ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2014, том 459, № 2, с. 1–4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.925.4

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ САМОДЕЙСТВИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТОЧЕЧНОЙ ЧАСТИЦЫ

© 2014 г. В. А. Малышев, С. А. Пирогов

Представлено академиком В.В. Козловым 24.04.2014 г.

Поступило 29.04.2014 г.

DOI: 10.7868/S0869565214320061

ВВЕДЕНИЕ

В классической физике материя (например, в виде точечных частиц) и непрерывные поля связываются двумя типами уравнений: 1) поля (или силы) двигают частицы и 2) частицы порождают поля. Первые находят отражение в законе Ньютона, частным примером которого является уравнение (или сила) Лоренца. Вторые составляют уравнения Максвелла с заданными точечными зарядами и их скоростями. Проблема объединения этих двух систем уравнений в одну всегда, начиная, по-видимому, с [6], привлекала внимание физиков, но до сих пор остается terra incognita. Возможные подходы к этой проблеме могут различаться как глобально, так и множеством мелких деталей. Например, можно вводить дополнительные силы, держащие размазанные заряды внутри шариков, как в модели Абрахама (см. библиографию в книге [4]). Отметим, что рассматриваемая модель взаимодействия частицы с полем является нерелятивистским аналогом скалярной гравитации Г. Нордстрема [7]. Отдельно отметим математическую работу [2], рассматривающую другую модель взаимодействия поля с частицей, далекую от нашей модели.

В данном сообщении изучается, по-видимому простейшая, модель самодействия, без введения дополнительных сил. Основной интерес рассматриваемой здесь модели не только в том, что она гамильтонова, допускает строгий анализ и оказывается почти явно решаемой, но скорее в том, что энергии волны и энергия взаимодействия по отдельности не остаются ограниченными (несмотря на сохранение энергии). Этот факт кажется важным, но требует дальнейшего осмысления.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

МОДЕЛЬ

Мы рассматриваем систему на прямой, состоящую из вещественного скалярного поля $\phi(x, t)$, $x \in R$, $t \in R_+$, и точечной частицы с траекторией $y(t) \in R$. Динамика этой системы определяется двумя уравнениями: волновым уравнением для поля, “излучаемого” частицей,

$$\frac{\partial^2\phi(x, t)}{\partial r^2} = c^2\frac{\partial^2\phi(x, t)}{\partial x^2} + \beta f(x - y(t)) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\phi(x, 0) = 0, \quad \phi'_t(x, 0) = 0 \qquad (2)$$

и уравнением Ньютона для частицы, взаимодействующей с собственным полем,

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \beta\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x, t)f(x - y)dx \qquad (3)$$

с начальными условиями

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = v(0) = v_0. \qquad (4)$$

Хорошо известно (см., например [3, с. 214]), что для любой локально интегрируемой f при заданной гладкой $y(t)$ единственное решение $\phi(x, t)$ линейного неоднородного уравнения (1) с начальными условиями (2) также является локально интегрируемой функцией и имеет вид

$$\phi(x, t) = \frac{\beta}{2c}\int_0^t\int_{x - c(t-\tau)}^{x + c(t-\tau)} f(x_1 - y(\tau))dx_1 d\tau. \qquad (5)$$

Совместная система этих двух уравнений нелинейна и нам неизвестны общие строгие результаты относительно структуры решений этой системы.

Лемма 1. *Если функция f гладкая и ограниченная, то решение уравнений существует и единственно на всем интервале* $[0, \infty)$.

Цель данного сообщения – придать четкий смысл и получить полную картину динамики в случае ультралокального взаимодействия, т.е. когда f является δ-функцией.

Т е о р е м а 1. *Если* $f = \delta$ *и* $|v_0| < c$, *то существует решение* $(\phi(x, t), y(t))$ *уравнений* (1)–(4) *в области* $x \in R$, $t \in [0, \infty)$, *такое что* $v(t) = y'(t)$ *является гладкой монотонной функцией на* $[0, \infty)$, *причем*

$$\sup_{0 \le t < \infty} |v(t)| < c \tag{6}$$

и, более того, $v(t) \to 0$ *экспоненциально быстро при* $t \to \infty$. *Более того, это решение единственно в классе гладких решений, удовлетворяющих условию* (6).

ЭНЕРГИЯ

Уравнения (1) и (3) могут быть записаны в гамильтоновом виде:

$$\frac{\partial^2\phi(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\delta U}{\delta\phi(U)}, \quad m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{7}$$

$$U = U_{ff} + U_{fp}$$

с формальным гамильтонианом $H = T_f + T_p + U_{ff} + U_{fp}$, где

$$T_f = \int\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 dx, \quad T_p = \frac{m}{2}v^2 \tag{8}$$

суть кинетические энергии поля и частицы, а

$$U_{ff} = \int\left[\frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 dx, \, U_{fp} = -\beta\int\phi(x)f(x-y)\right]dx =$$

$$= -\beta\phi(y)$$

есть локальное взаимодействие U_{ff} поля с самим собой, U_{fp} – взаимодействие между частицей и полем.

Т е о р е м а 2. *В случае* $f = \delta$ *и любого фиксированного t носители производных* $\frac{\partial\phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ *ограничены по x и все составляющие энергии конечны. Асимптотические формулы при* $t \to \infty$ *для всех составляющих энергии системы имеют вид*

$$T_p(t) \to 0, \quad T_f(t) \sim \frac{\beta^2}{4c}, \quad U_{ff}(t) \sim \frac{\beta^2}{4c}t,$$

$$U_{fp}(t) = -\frac{\beta^2}{2c}t.$$

Сохранение энергии доказывается стандартной выкладкой

$$\frac{dH}{dt} = \int\left[c^2\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \right.$$

$$\left. -\beta\frac{\partial\phi}{\partial t}f(x-y(t)) - \beta\phi(x, t)\frac{\partial f}{\partial y}v\right]dx + mv\frac{dv}{dt} =$$

$$= \int\left[-c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \beta\frac{\partial\phi}{\partial t}f(x-y(t)) - \right.$$

$$\left. -\beta v\phi(x, t)\frac{\partial f(x-y)}{\partial y} + \beta v\phi(x, t)\frac{\partial f(x-y)}{\partial y}\right]dx = 0,$$

где два последних члена сокращаются, а три первых дают ноль согласно уравнению (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Ввиду явной формулы (5) можно забыть об уравнении (1) и, подставив (5) в (3), решить полученное уравнение. Вычислить интегралы для произвольных $y(t)$ не так легко, но если заранее предположить условие (6) на функцию $y(t)$, то в этом предположении получается решение уравнений (1)–(4), которое оказывается удовлетворяющим сделанному предположению.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Локальное (по времени) существование и единственность решения доказывается стандартным путем. Чтобы доказать, что решение существует на всем интервале времени, нужны более точные оценки. Из (5) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, t) = \frac{\beta}{2c}\int_0^t [f(x + c(t-\tau) - y(\tau)) - \tag{9}$$

$$-f(x - c(t-\tau) - y(\tau))]d\tau.$$

Из (5) видно, что величина $\frac{d\phi}{dx}$ при данном t и при всех x не превосходит по модулю Bt, где

$$B = \frac{\beta}{c}\sup|f|.$$

Значит, ускорение частицы не превосходит по модулю $\frac{B}{m}t$, т.е. $y(t)$ не превосходит $\mathrm{const}\,t^3$. И вертикальной асимптоты в конечный момент t быть не может. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть* $y(t)$ *достаточно гладкая и выполнено* (6). *Тогда*

$$\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x} = \begin{cases} 0, & x \notin [-ct, ct], \\ \frac{\beta}{2c}\frac{1}{c + y'(\tau(x))}, & x \in [-ct, y(t)), \\ -\frac{\beta}{2c}\frac{1}{c - y'(\tau(x))}, & x \in (y(t), ct], \\ -\frac{\beta}{2c}\frac{y'(t)}{c^2 - (y'(t))^2}, & x = y(t). \end{cases} \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вместо прямого использования техники подстановок (как, например, в [5]) для δ-функции, вообще говоря неоднозначной, нам удобнее будет использовать гауссовы приближения δ-функций

$$f_\sigma(x, t) = \delta_\sigma(x - y(t)),$$

$$\delta_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow[\sigma \to 0]{} \delta(x).$$

В нашем случае

$$\frac{\partial\phi_\sigma(x,t)}{\partial x} = \frac{\beta}{2c\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^t\left(e^{\frac{h_+}{\sigma^2}} - e^{\frac{h_-}{\sigma^2}}\right)d\tau, \tag{11}$$

где при заданном t

$$h_\pm = h_\pm(x,\tau) = -\frac{1}{2}(x - y(\tau) \pm c(t-\tau))^2.$$

При заданном t введем функции $x_\pm(\delta) = y(\tau) \mp c(t - \tau)$, т.е. выбираем их так, чтобы

$$h_\pm(x_\pm(\tau),\tau) = 0.$$

Если τ меняется в интервале $[0, t]$, то $x_\pm(\tau)$ меняется в интервале $[\mp ct, y(t)]$ соответственно. Введем также функции $\tau_\pm(x)$ на интервалах $[-ct, y(t)]$ и $[y(t), ct]$ соответственно посредством условия

$$h_\pm(x, \tau_\pm(x)) = 0.$$

Они также определяются единственным образом, так как функции $y(\tau) \pm c(t - \tau)$ строго монотонны в силу нашего предположения. Эти функции совпадают в точке $y(t)$ и равны t. Поэтому их можно склеить в единую функцию на интервале $[-ct, ct]$, которую мы обозначим $\tau(x)$. Вне этого интервала мы полагаем $\tau(x) = 0$.

Тогда

$$h'_\pm = \frac{\partial h_\pm}{\partial\tau}(x,\tau) = -(x - y(\tau) \pm c(t-\tau))(\mp c - y'(\tau)),$$

$$h''_\pm = \frac{\partial^2 h_\pm}{\partial\tau^2}(x,\tau) =$$

$$= (x - y(\tau) \pm c(t-\tau)y''(\tau)) - (\mp c - y'(\tau))^2,$$

и значит в точке $(x, \tau_\pm(x))$

$$\frac{\partial h_\pm}{\partial\tau}(x,\tau_\pm(x)) =$$

$$= -(x - y(\tau_\pm(x)) \pm c(t-\tau_\pm(x)))(\mp c - y'(\tau_\pm(x))) = 0,$$

$$h''(x,\tau_\pm(x)) = \frac{\partial^2 h_\pm}{\partial\tau^2}(x,\tau_\pm(x)) =$$

$$= -(\mp c - y'(\tau_\pm(x)))^2.$$

Заметим сначала, что если $x \neq x_\pm(\tau)$ для всех $\tau \in [0, t]$, то

$$\int_0^t e^{\frac{h_\pm}{\sigma^2}}d\tau \xrightarrow[\sigma\to 0]{} 0.$$

В частности, это будет для всех $x \notin [-ct, ct]$. Более того, $x \neq x_+(\tau)$ для всех $\tau \in [0, t]$, если $x \notin [-ct, y(t)]$. Аналогично, $x \neq x_-(\tau)$ для всех $\tau \in [0, t]$, если $x \notin [y(t), ct]$. Для остальных x применим к каждому из интегралов (11) метод Лапласа, используя следующий известный результат:

$$\int_a^b e^{nh(\tau)}d\tau \sim e^{nh(a)}\left[-\frac{\pi}{2nh''(a)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

если максимум $h(\tau)$ в точке a, $h'(a) = 0$ и $h''(a) < 0$ (аналогично для точки b). Если же точка максимума u лежит внутри интервала (a, b), причем также $h'(u) = 0$ и $h''(u) < 0$, то правая часть в (12) умножается на 2.

В нашем случае $h'(x, \tau_\pm(x)) = 0$, $h''(x, \tau_\pm(x)) \neq 0$, и

$$\frac{\beta}{2c\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{\frac{h_+}{\sigma^2}}d\tau \sim \frac{\beta}{c\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{c + y'(\tau(x))},$$

$$x \in [-ct, y(t)],$$

$$\frac{\beta}{2c\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{\frac{h_-}{\sigma^2}}d\tau \sim \frac{\beta}{c\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{c - y'(\tau(x))},$$

$$x \in [y(t), ct],$$

а для $x = y(t)$ при $\sigma \to 0$

$$\frac{\partial\phi_\sigma(y(t),t)}{\partial x} \to \frac{\beta}{2c\beta\sqrt{2\pi}}\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{c + y'(t)} - \frac{1}{c - y'(t)}\right) = -\frac{\beta}{2c}\frac{y'(t)}{c^2 - (y'(t))^2}.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь первое утверждение теоремы 1. Согласно лемме, уравнение (3) для частицы принимает вид

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \beta\frac{\partial}{\partial y}\phi(y(t),t) = -\frac{\beta^2}{2c}\frac{y'(t)}{c^2 - (y'(t))^2}$$

или

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta^2}{2c}\frac{v}{c^2 - v^2}, \tag{13}$$

и значит, $v(t)$ экспоненциально быстро стремится к неподвижной точке $v = 0$.

С л е д с т в и е 1. *В условиях теоремы* 1 *решение* $(\phi_\sigma(x, t), y_\sigma(t))$, *которое*, *согласно лемме* 1, *существует и единственно*, *сходится при* $\sigma \to 0$ *к решению*, *построенному в теореме* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Если $f_\sigma \to \delta$, то

$$\phi_\sigma(x,t) \to \frac{\beta}{2c}\int_0^t \mathbf{1}\{x\colon y(\tau) - c(t-\tau) < x < c(t-\tau) +$$

$$+ y(\tau)\}d\tau = \frac{\beta}{2c}\tau(x),$$

и из $\tau(y(t)) = t$ получим

$$U_{fp} = -\beta\phi(y(t), t) = -\frac{\beta^2}{2c}t.$$

Далее, используя лемму 2 и учитывая, что $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$, имеем

$$U_{ff} = \frac{c^2}{2}\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{c^2}{2}\left[\int\limits_{-ct}^{y(t)}\left(\frac{\beta}{2c}\frac{1}{c + y'(\tau(x))}\right)^2 dx +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{y(t)}^{ct}\left(\frac{\beta}{2c}\frac{1}{c - y'(\tau(x))}\right)^2 dx\right] \sim \frac{\beta^2}{4c}t.$$

Наконец,

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_\sigma(x, t) = \frac{\beta}{2}\int\limits_0^t (f(x + c(t-\tau) - y(\tau)) + \qquad (14)$$

$$+ f(x - c(t-\tau) - y(\tau)))d\tau$$

и в пределе $f = \delta$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_\sigma(x, t) = c\frac{\partial\phi_\sigma(x, t)}{\partial x}\mathrm{sign}(y(t) - x).$$

Поэтому

$$T_f = U_{ff} \sim \frac{\beta^2}{4c}t,$$

что следует (зная асимптотики остальных частей энергии) и из сохранения энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федорюк М.В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
2. *Komech A.* // J. Math. Anal. and Appl. 1995. V. 196. P. 384–409.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
4. *Spohn H.* Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. 360 p.
5. *Misra O.P., Lavoine J.L.* Transform Analysis of Generalized Functions. Amsterdam: North-Holland, 1986. 332 p.
6. *Lamb H.* // Proc. London Math. Soc. 1900. V. 32. P. 208–211.
7. *Wellner M., Sandri G.* // Amer/ J. Phys/ 1964. V. 32. № 1. P. 36–39.