

# Кратчайшее введение в современные вероятностные МОДЕЛИ

В. А. Малышев

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение без вероятностей</b>	<b>4</b>
1.1	Меры на конечных множествах . . . . .	4
1.2	Уход от конечности . . . . .	7
1.3	Слова, деревья, грамматики. Рекуррентные соотношения и производящие функции . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Элементарные вычисления</b>	<b>13</b>
2.1	Схема Бернулли . . . . .	13
2.2	Конечные цепи Маркова с дискретным временем . . . . .	16
2.3	Одномерные гиббсовские меры . . . . .	18
2.4	Случайные блуждания . . . . .	20
2.5	Цепи Маркова с непрерывным временем . . . . .	24
2.6	Гауссовы системы и функции от них . . . . .	27
2.7	Обратимость: равновесие и динамика . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Вероятностная интуиция на разных шкалах для малых систем</b>	<b>36</b>
3.1	Стохастические игры и жизненные принципы . . . . .	36
3.2	Детерминизм на грубых шкалах . . . . .	39
3.3	Условные меры для маловероятных событий . . . . .	43
3.4	Диффузия . . . . .	46
3.5	Уход в бесконечность . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Макро и микро шкалы для больших систем</b>	<b>52</b>
4.1	Равновесные распределения . . . . .	52
4.1.1	Идеальный газ . . . . .	52
4.1.2	Случайные графы, перколяция, фракталы . . . . .	54
4.1.3	Взаимодействия и фазовые переходы . . . . .	58
4.1.4	Ренормгруппа и евклидовы случайные поля . . . . .	61
4.2	Неравновесные процессы . . . . .	66
4.2.1	Существование бесконечночастичной динамики . . . . .	66
4.2.2	Явные решения . . . . .	67
4.2.3	Приближение Больцмана . . . . .	69
4.2.4	Гидродинамическое приближение . . . . .	72

Основой математической жизни всегда был здоровый консерватизм, сохранение логичности, строгости, чистоты (особенно от приложений, что часто переваливало через край). Только на этом общем фоне были возможны совершенно другие тенденции. Но наступили времена перемен, и не только в политической и социальной сфере. Математика разрослась - не хватает ни людей ни денег, чтобы поддерживать статус царицы наук. Все мельчает, рассасывается, а число угроз растет. Последние идут прежде всего от прошлых отростков самой математики. Так, физики-теоретики проделали красивые и глубокие алгебраизованные вычисления, которые тем не менее нельзя считать математикой (по крайней мере в прежнем смысле слова) по банальной причине отсутствия четко определенных понятий. Приложения перешли в руки вычислителей и программистов. Многие из последних никогда не знали математики, а те кто знал - быстро забыли.

С другой стороны, на математику, или на такие ее части как теория вероятностей, можно смотреть как на большую макросистему, развивающуюся по неизвестным законам. Каждый входящий в нее, незаметно для себя, становится винтиком этой системы. Иногда некоторые области испытывают бум или просто объявляются важнейшими, далеко не всегда серьезно влияя на последующее развитие. Иногда наоборот, незаметные работы порождают в дальнейшем множество продолжений.

Сейчас для математика влиться в реальную жизнь означает почти всегда уход из самой математики. Но если не влиться, то по крайней мере понять окружающий мир человеку с математическими наклонностями проще с помощью **моделей**.

Особенно богата моделями теория вероятностей. Примеров моделей множество: от суммы независимых величин в схеме Бернулли и экспоненциальной очереди до стохастических микромоделей жидкостей и микроэкономики. Как правило, можно выделить первичные модели, каждая из которых породила множество работ, производящих впечатление технических обобщений и образующих ветви дерева, выросшего из одного корня. Однако, кроны этих деревьев переплетаются вверху, и получающийся лес недоступен анализу. Аналог классического труда В. Феллера (сейчас сильно устаревшего, но остающегося чрезвычайно полезным) с попыткой изложить как основные понятия так и большинство современных моделей с достаточной полнотой, трудно даже представить.

Однако, что можно сделать - это кратко описать круг таких первичных моделей с акцентом на интуицию и оставаясь в рамках элементарных вычислений, но чтобы было ясно какие более глубокие вещи надо искать в детальных монографиях. В этой попытке я руководствовался простыми, но может быть нестандартными, тремя принципами, на которых основывается ремесло пишущего вероятностника:

- на интуиции в предсказании результата. Для этого необходимо, чтобы студент сам делал основные вычисления, а не запоминал теоремы, особенно их названия. Опытный математик, при написании статьи по анализу или теории вероятностей, не говорит о теоремах Вейерштрасса, Коши, Фубини, Бореля-Кантелли и т.д., но может легко доказать или придумать множество подобных утверждений. Поменьше авторитетов, особенно среди современников - наука не религия, не набор сакральных истин, а материал для интеллектуальной игры и построения своих собственных планов;
- на краткости, за которую приходится платить неполнотой изложения. Но можно использовать возможность разбиения работы математика на два этапа: начальная идея с некоторым планом доказательства и полное его проведение. Последнее становится автоматическим, хотя конечно по-прежнему требующим времени и энергозатрат. Очень хотелось бы переложить второй этап на компьютер. В двух последних разделах я ограничивался первым этапом;

- на придумывании новых хороших моделей. для чего как минимум надо знать много старых, но читать не легче, чем писать. Может эти лекции облегчат выбор и чтение фундаментальных монографий.

Эти заметки - сильно расширенное и систематизированное изложение двух полугодовых курсов 2008-2009 учебного года на механико-математическом факультете МГУ.

Цель первых двух частей - научить студента делать самостоятельно элементарные вычисления, начиная с нуля или почти с нуля. Цель двух последних частей - дать начальное интуитивное представление об основных вероятностных моделях в современных теориях.

# 1 Введение без вероятностей

## 1.1 Меры на конечных множествах

Пусть  $X = \{1, 2, \dots, N\}$  - конечное множество и  $F : X \rightarrow X$  - отображение  $X$  в себя.

**Упр. 1** Сколько всего таких отображений для данного  $X$ ? Сколько среди них взаимно-однозначных?

Итерации  $F$

$$F^{(2)}(i) = F(F(i)), \dots, F^{(n)}(i) = F^{(n-1)}(F(i)) = F(F^{(n-1)}(i)), \dots$$

называются **конечным автоматом** (без входов). Точка  $i \in X$  называется **циклической** для заданного  $F$ , если для некоторого  $n$   $F^{(n)}i = i$ . Точки, не являющиеся циклическими, называются **несущественными**.

**Упр. 2** Следующие утверждения эквивалентны:

- $F$  взаимно однозначно;
- все точки  $X$  циклические;
- для некоторого  $n$   $F^{(n)}$  является тождественным отображением.

**Граф** (неориентированный) определяется конечным множеством  $V$  вершин и множеством ребер, где ребро между вершинами  $i$  и  $j$  формально определяется как пара вершин  $\{i, j\}$ . Далее у нас графы без кратных ребер, если между любыми двумя вершинами  $i$  и  $j$  не более одного ребра. Если все пары рассматриваются как упорядоченные, то граф называется ориентированным.

**Упр. 3** Сколько ориентированных (неориентированных) графов для данного  $V$ ?

Отображению  $F$  сопоставляется ориентированный граф с множеством вершин  $X$  и  $N$  ребрами: из  $i$  в  $j$  проводится (ровно одно) ребро, если и только если  $j = F(i)$ .

**Упр. 4** Описать графы какие при этом получаются.

**Мера**  $\mu$  на  $X$  - каждой точке  $i \in X$  сопоставляется число (ее мера)  $\mu(i)$ . Если  $\mu(i) \geq 0$ ,  $\sum_{i \in X} \mu(i) = 1$ , то мера называется **вероятностной**. Мера множества  $A \subset X$  определяется как сумма мер его точек

$$\mu(A) = \sum_{i \in A} \mu(i)$$

Отображение  $F$  определяет отображение  $F^*$  множества мер на  $X$  в себя

$$(F^* \mu)(A) = \mu(F^{-1}(A))$$

Мера  $\mu$  называется **инвариантной** относительно  $F$ , если  $\mu = F^* \mu$ , то есть для всех  $A$

$$\mu(A) = \mu(F^{-1}(A))$$

Теперь приведем важные примеры отображений.

## Динамика частиц на конечном множестве

**Задача 1** На дискретной окружности с  $n$  точками расположено  $k < n$  частиц в разных точках. Возьмем в качестве конечного множества  $X$  - множество всех расположений (конфигураций) частиц,  $|X| = C_n^k$ , а в качестве отображения  $F : X \rightarrow X$  следующее правило. За единицу времени каждая частица смещается на один шаг по часовой стрелке, если там нет другой частицы. Если есть, то частица остается на своем месте. Найти все инвариантные меры.

**Задача 2** На дискретном торе с  $n^2$  точками  $\{(x, y) : x, y = 1, \dots, n\}$  расположено  $k < n^2$  частиц в разных точках  $(x_i, y_i)$ . Первоначально каждой частице приписан вектор "скорости"  $v_i = (1, 0)$  или  $v_i = (0, 1)$ . За один шаг каждая  $i$ -тая частица смещается в точку  $(x_i, y_i) + v_i$ , если там нет другой частицы, и если туда не собирается прыгнуть другая частица. В противном случае частица остается на своем месте, но меняет вектор скорости на другой. Найти все инвариантные меры для  $k = 2$ .

**Нейронные сети Литтла-Хопфилда** В качестве множества состояний возьмем множество конфигураций  $X = \{-1, 1\}^V$  на конечном множестве  $V$ . Отображение  $F : X \rightarrow X$  (правило Хебба)

$$(Fu)_i = \operatorname{sgn}\left(\sum_j J_{ij}u_j\right), J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^p x_i^\alpha x_j^\alpha$$

определяется выбором  $p$  векторов  $x^\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_N^\alpha)$ ,  $N = |V|$ . Такой вид отображения моделирует линейные отображения в линейном пространстве, теория которых является классикой математики. Основная идея этой модели состоит в том, что  $x^\alpha$  являются идеальными образами, и если  $x$  есть искаженный образ, у которого большинство координат совпадает с  $x_i^\alpha$ , то итерации  $F$  дадут вектор  $x^\alpha$ , см. [10].

**Упр. 5** Доказать:

1. если  $x^\alpha$  ортогональны, то они являются неподвижными точками  $F$ ;
2. если  $p = 1$ , то для любого  $u$   $F(u) = x^1$ , если больше половины координат  $u$  и  $x^1$  совпадают, а если меньше, то  $F(u) = -x^1$ ;

Обычно координаты меняются не все вместе, а по очереди, в некотором порядке (асинхронная динамика).

**Упр. 6** Доказать, что при изменении одной координаты функция (называемая энергией)

$$E(u) = - \sum_{i < j} J_{ij} u_i u_j$$

не возрастает.

**Линейные отображения мер (марковские цепи)** Какие еще могут быть отображения  $U$  множества  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_X$  всех мер на  $X$  в себя? Это прежде всего линейные отображения, то есть для любых двух мер  $\mu_1, \mu_2$  и двух чисел  $a_1, a_2$

$$U(a_1\mu_1 + a_2\mu_2) = a_1U(\mu_1) + a_2U(\mu_2)$$

$(N \times N)$ -матрица  $P = (p_{ij})$  с неотрицательными элементами называется стохастической, если сумма ее элементов в каждой строке равна 1, поэтому матрица пишется справа. Тогда  $\mu P$  также вероятностная мера ( $\mu$  - вектор-строка). Нетрудно видеть, что этим исчерпываются все линейные отображения  $U$ , переводящие множество вероятностных мер в себя.

**Сходимость** Для любой меры  $\mu$  введем ее норму

$$\|\mu\| = \sum_i |\mu(i)|$$

**Theorem 1** Пусть все  $p_{ij} > 0$ . Тогда существует единственная вероятностная мера  $\pi$  (неподвижная точка) такая что  $\pi P = \pi$ , и константа  $0 < \alpha < 1$  такая что для любой вероятностной меры  $\mu$

$$\|\mu P^n - \pi\| \leq \alpha^n$$

Докажем это для  $N = 2$ . Пусть есть две вероятностные меры  $\mu$  и  $\nu$ . Подействуем матрицей  $P$  на их разность  $x = \mu - \nu = (x_0, x_1)$  и докажем, что существует  $0 < \alpha < 1$  такое, что для всех  $\mu, \nu$

$$\|xP\| < \alpha < 1$$

Здесь действует механизм сокращения плюс массы и минус массы: их равное количество, так как  $x_0 + x_1 = 0$ , то  $x_1 = -x_0$ . Пусть  $y = xP$ , тогда  $y_0 + y_1 = 0$  и

$$y_0 = x_0 p_{00} + x_1 p_{10} = (p_{00} - p_{10})x_0$$

$$y_1 = x_0 p_{01} + x_1 p_{11} = x_1(-p_{01} + p_{11})$$

и

$$|y_0| + |y_1| < \alpha(|x_0| + |x_1|), \alpha = \max(|p_{00} - p_{10}|, |-p_{01} + p_{11}|)$$

**Упр. 7** 1. Провести аналогичное доказательство для  $N > 2$ ;

2. Как можно ослабить условие положительности всех элементов  $p_{ij}$  ?

**Нелинейные отображения (нелинейные цепи Маркова)** Примером нелинейного отображения множества вероятностных мер в себя может быть квадратичное отображение

$$(U(\mu))(k) = \sum_i \sum_j \mu_i \mu_j W((i, j) \rightarrow k)$$

где  $W$  - симметрическое вероятностное ядро (а попросту - набор неотрицательных чисел  $W((i, j) \rightarrow k)$  для  $i, j, k = 1, \dots, N$ ) такое что

$$W((i, j) \rightarrow k) = W((j, i) \rightarrow k) \geq 0, \forall i, j, k$$

$$\sum_k W((i, j) \rightarrow k) = 1, \forall i, j$$

Хорошей теории таких нелинейных отображений пока нет.

**Упр. 8** Доказать, что это отображение переводит множество  $\mathbf{M}_X$  в себя. Сформулировать достаточные условия существования единственной неподвижной точки.

Многое сказанное выше можно перенести на случай, когда  $X$  счетно.

**Упр. 9** Каждое взаимно-однозначное отображение  $F : X \rightarrow X$  разбивается на **орбиты**, где орбитой точки  $x$  называется множество  $\{F^{(n)}(x), n \in (-\infty, \infty)\}$ . Если  $X$  счетно, могут быть как конечные так и бесконечные орбиты. Описать все инвариантные вероятностные меры для конечного и счетного  $X$ .

## 1.2 Уход от конечности

Конечные автоматы (без входа) производят только периодические последовательности. Следующий шаг в построении более сложных алгоритмов основан на постулате потенциальной бесконечности: к каждому целому числу можно прибавить единицу. Отсюда возникли автоматы со счетным числом возможных состояний - машины Тьюринга, рекурсивные функции и связанные с ними разные понятия алгоритма. Как эти понятия связать со сложным и случайным миром? Первый возможный ответ: число элементов в  $X$  конечно но очень велико, и надо изучать асимптотики для больших  $N = |X|$ . При этом бесконечные  $X$  рассматриваются математиками удобства ради. А случайность это все равно что сложность или недоступность - самые сложные вещи и есть самые случайные. Однако, попытки облечь это в четкие понятия пока привели лишь к некоторым общим теориям [8, 9], но в отношении прикладных моделей развитие пошло по более простому и быстрому варианту.

Современная теория вероятностей имеет дело, в основном, с несчетными множествами  $X$ . Подмножества несчетного множества чрезвычайно разнообразны. Обычно их описывают и классифицируют согласно алгоритмам их построения. Излагаемые ниже понятия, с одной стороны, необходимы каждому пишущему вероятностнику, а с другой - конкретные вычисления всегда можно провести без использования этих понятий.

**Теоретико-множественные операции и меры** В несчетном  $X$  задается система  $\mathbf{B}$  “простых” базисных множеств, например на прямой это открытые множества. Из них строятся более сложные множества, не являющиеся открытыми, путем обычных операций над множествами - дополнения, объединения и пересечения двух множеств. Минимальная система множеств, содержащая все базисные множества и замкнутая относительно этих операций, называется **алгеброй множеств**, порожденной базисными множествами. Каждое множество из этой алгебры может быть записано в виде формулы, содержащей конечное число базисных множеств и конечное число операций дополнения, объединения и пересечения.

Если разрешать счетные объединения и пересечения, то говорят о **сигма-алгебре**  $\Sigma = \Sigma(\mathbf{B})$ .

**Упр. 10** Пусть  $\mathbf{B}$  - совокупность всех открытых множеств прямой. Привести пример множества, принадлежащего сигма-алгебре, но не принадлежащего алгебре, порожденной  $\mathbf{B}$ . Существует ли пример пересечения счетного числа открытых множеств на прямой, которое не является ни открытым, ни замкнутым и не принадлежит алгебре множеств, порожденной открытыми множествами?

Если  $X$  - топологическое пространство, а базисными множествами являются все открытые множества, то минимальная сигма-алгебра, порожденная ими, называется сигма-алгеброй **борелевских множеств**. В начале 20 века важной частью математики была дескриптивная теория множеств, в которой уделялось много внимания классификации борелевских (и даже не борелевских) множеств [7]. Сейчас эта область математики прочно забыта.

Пусть каждому множеству  $A \in \Sigma$  сопоставлено неотрицательное число  $\mu(A)$ , возможно равное плюс бесконечности, причем выполнено свойство аддитивности: мера счетного объединения не пересекающихся множеств равно сумме их мер. Тогда говорят, что задана неотрицательная мера  $\mu$  на  $X$ .

**Метод включения-исключения** Как вычислить меру объединения множеств  $X_i$ , если они пересекаются и мы знаем меру их пересечений ? Ответ для двух множеств очевиден

$$\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2) - \mu(X_1 \cap X_2)$$

для трех сложнее

$$\mu(X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \mu(X_1) + \mu(X_2) + \mu(X_3) - \mu(X_1 \cap X_2) - \mu(X_1 \cap X_3) - \mu(X_2 \cap X_3) + \mu(X_1 \cap X_2 \cap X_3)$$

Чтобы это доказать, надо подсчитать сколько раз в каждом члене левой и правой части учитывается каждая точка объединения.

**Упр. 11** Обобщить эту формулу на большее число множеств.

### Основная теорема

**Theorem 2** Пусть  $\mathbf{A}$  - алгебра множеств в пространстве  $X$ ,  $\Sigma_{\mathbf{A}}$  - минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathbf{A}$ . Пусть на  $\mathbf{A}$  задана неотрицательная мера  $\mu$ ,  $\mu(X) = 1$ , со свойствами конечной аддитивности и монотонной непрерывности. Последнее означает, что если задана последовательность вложенных множеств  $A_i \in \mathbf{A}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots,$$

с пустым пересечением  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ , то

$$\mu(A_i) \rightarrow 0$$

Тогда  $\mu$  может быть единственным образом продолжена до меры на  $\Sigma_{\mathbf{A}}$  с таким же свойством монотонной непрерывности.

**Упр. 12** Из свойства монотонной непрерывности вытекает свойство счетной аддитивности. Пусть  $B_i, B \in \mathbf{A}$ ,  $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ , причем  $B_i$  попарно не пересекаются, тогда

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$$

Отображение  $F : X \rightarrow X$  называется измеримым (уважающим структуру измеримости), если прообраз измеримого множества измерим. Изучением таких отображений и инвариантных мер для них занимается большая наука - эргодическая теория (динамических систем), возникшая как ответвление теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Она имеет много пересечений с теорией вероятностей, и это две науки, оплодотворяющие друг друга. Получить хорошее представление об эргодической теории можно по многим книгам - от простых до более полных и сложных [11, 12, 13].



**Интеграл Лебега** Если  $\mu$  - неотрицательная мера и  $f$  - неотрицательная функция на  $\Omega$ , то интеграл Лебега определяется как

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup_{g: g \leq f} \sum_{k=1}^N x_k \mu(\{\omega : g(\omega) = x_k\})$$

где супремум берется по всем функциям  $g$ , принимающим конечное (или счетное) число значений  $x_i, i = 1, \dots, N$ , и таким что  $g \leq f$ . В общем случае мера  $\mu$  и функция представляются в виде

$$\mu = \mu_+ - \mu_-, f = f_+ - f_-$$

где  $\mu_+, \mu_-, f_+, f_-$  - неотрицательны. При этом говорится что интеграл определен, если интегралы  $\int f_k d\mu_k$  конечны либо при  $k = l$  либо при  $k = -l$ . Интеграл тогда определяется как

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f_+ d\mu_+ + \int_{\Omega} f_- d\mu_- - \int_{\Omega} f_+ d\mu_- - \int_{\Omega} f_- d\mu_+$$

### 1.3 Слова, деревья, грамматики. Рекуррентные соотношения и производящие функции

Комбинаторика является частью теории вероятностей в тривиальном смысле этого слова - любое комбинаторное утверждение есть утверждение о вероятности некоторого события. Можно сказать, что и многое в теории вероятностей является скрытой комбинаторикой. Однако, если в комбинаторике более важную роль играют точные соотношения (что определяют ее близость к алгебре и теории чисел), то в теории вероятностей больше интересуются асимптотикой. В этой лекции мы получим понятие о часто используемых комбинаторных объектах, научимся получать рекуррентные соотношения в простых комбинаторных задачах и решать их методом производящих функций.

**Слова** Двоичные слова длины  $N$  это последовательности из нулей и единиц

$$\alpha = x_1 \dots x_N, x_i \in \{0, 1\}$$

Простейшая комбинаторная задача: как много слов длины  $N$ , не имеющих двух единиц рядом, то есть подслов 11 ?

Пусть  $L_i(N), i = 0, 1$ , - число таких слов длины  $N$  с дополнительным условием, что  $x_N = i$ . Тогда

$$L_0(1) = 1, L_1(1) = 1, L_0(2) = 2, L_1(2) = 1, L_0(3) = 3, L_1(3) = 2$$

и, более того, для  $N > 2$  имеем следующие линейные рекуррентные соотношения

$$L_1(N) = L_0(N - 1), L_0(N) = L_1(N - 1) + L_0(N - 1)$$

Отсюда

$$L_0(N) = L_0(N - 1) + L_0(N - 2), N = 3, 4, \dots \quad (1)$$

с начальными условиями

$$L_0(1) = 1, L_0(2) = 2$$

Такое же соотношение имеет место для чисел Фибоначчи, но начальные условия другие. Обозначая,

$$f(N) = L_0(N), F(z) = \sum_{N=3}^{\infty} f(N)z^N$$

умножая на  $z^N$  обе части (1) и суммируя, имеем

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{N=3}^{\infty} f(N)x^N = \sum_{N=3}^{\infty} f(N-1)x^N + \sum_{N=3}^{\infty} f(N-2)x^N = \\ &= x(F(x) + 2x^2) + x^2(F(x) + 2x^2 + x) \end{aligned}$$

Откуда

$$F(x) = x^3 \frac{3 + 2x}{1 - x - x^2}$$

**Рациональные производящие функции** Как из явного вида производящей функции получить вид или асимптотику коэффициентов? Для простейшей дроби это легко

$$\sum f_N x^N = \frac{1}{1 - bx} \implies f_N = b^N$$

**Разложение на простейшие дроби**

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - x - x^2} &= -\frac{1}{(x - a)(x - b)} = \frac{1}{a - b} \left( \frac{a}{1 - a^{-1}x} - \frac{b}{1 - b^{-1}x} \right) \\ a &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Асимптотика определяется наименьшим по модулю корнем  $b$  (то есть наибольшим  $|b|^{-1}$ ). Отсюда

$$f_N \sim C_1 b^{-N} = C \phi^N$$

где  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  называется золотым сечением, а константу  $C$  предоставляется вычислить читателю.

Один из стимулов роста математики - обобщения (это далеко не самый важный стимул). Естественное обобщение в нашей ситуации - сделать то же самое для любого под слова любой длины. Как это сделать - объясняют следующие задачи.

**Упр. 13** Пусть  $\alpha$  - любое слово,  $L_N(\alpha)$  - число слов длины  $N$ , не содержащих ни одного под слова  $\alpha$ . Будет ли производящая функция

$$F_\alpha(x) = \sum_{N=0}^{\infty} L_N(\alpha)x^N$$

рациональной?

**Упр. 14** Можно ли и как разложить на простейшие дроби (то есть как линейную комбинацию функций  $\frac{1}{x-b}$ )

$$\frac{1}{x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \dots + a_0}$$

если у многочлена только простые корни. Два способа - непосредственный и с помощью теорем комплексного анализа. Для более длинных подслов степень многочленов растет, считать корни становится все сложнее и никто не станет их считать без крайней нужды. Под крайней нуждой понимается важная практическая задача.

**Упр. 15** Будет ли верно, что для всех  $\alpha$  асимптотика чисел  $L_\alpha(N)$  имеет вид  $C\beta^N$  для некоторых  $C = C(\alpha) > 0, 0 < \beta = \beta(\alpha) < 1$ ? Будет ли верно, что для всех  $\alpha$  асимптотика  $\log L_\alpha(N)$  имеет вид  $cN$  для некоторых констант  $c = c(\alpha)$ ?

**Грамматика как процесс** Грамматика языка и математический термин “грамматика” - вещи разные но близкие. Грамматика языка изучает структуру слова и фразы, а также возможности их изменения с помощью замен одних частей слов и фраз на другие. В математике изучают какие слова из каких можно получить с помощью определенных подстановок.

Пусть  $\Sigma$  - множество всех слов любой длины из символов 0, 1. Рассмотрим преобразование  $U : \Sigma \rightarrow \Sigma$  (параллельные подстановки), где каждый 0 в слове заменяется на 101, а каждая единица на 010. Фиксируем некоторое начальное слово  $\alpha_0$ , например  $\alpha_0 = 0$  и положим  $\alpha_1 = U\alpha_0, \alpha_2 = U(U\alpha_0), \dots$  Пусть  $n_t(0), n_t(1)$  - соответственно число нулей и единиц у слова  $\alpha_t$ . Тогда

$$n_{t+1}(0) = n_t(0) + 2n_t(1), n_{t+1}(1) = 2n_t(0) + n_t(1)$$

**Упр. 16** Найти асимптотику  $n_t(0)$ .

**Свободные группы как грамматики** Дискретные группы можно рассматривать как особый вид грамматик, где подстановки это определенный тип сокращений. Так, свободная некоммутативная группа с двумя образующими определяется словами из 4 символов  $a, a^{-1}, b, b^{-1}$ . Произведение (конкатенация)  $w_1w_2$  слов  $w_1$  и  $w_2$  определяется ставя их одно за другим. Два слова определяют один элемент группы, если им соответствует одно и то же приведенное слово, то есть слово, где не могут стоять рядом  $a_i$  и  $a_i^{-1}$ . Все приведенные слова определяют разные элементы группы. Число  $L(N)$  приведенных слов длины  $N$

$$L(N) = 4 \cdot 3^{N-1}$$

так как первый слева элемент можно взять четырьмя способами, а каждый следующий только тремя.

**Бинарные плоские деревья** **Дерево** это связный граф без циклов. **Корневое дерево** имеет выделенную вершину, называемую корнем. Корневое плоское дерево - корневое дерево вместе с его вложением в плоскость с точностью до непрерывной деформации плоскости. Последнее означает, что важно лишь какая из двух исходящих из данной вершины ребер, в направлении от корня, будет правой а какая левой. Два таких дерева считаются одинаковыми (изоморфными), если существует взаимно-однозначное отображение одного множества вершин на другое, что корень переходит в корень, а правое (левое) ребра в правое (левое) ребра. Пусть  $C(N)$  - число корневых бинарных плоских (то есть из

каждой вершины, в направлении от корня, идет 2 или 0 ветвей) деревьев с  $2N$  вершинами кроме корня. Для этих чисел, называемых числами Каталана, имеет место **квадратичное рекуррентное соотношение**

$$C(0) = C(1) = 1$$

$$C(N) = \sum_{m+n=N-1} C(m)C(n), N \geq 2$$

**Упр. 17** Доказать, что

$$C(N) = \frac{1}{N+1} C_{2N}^N$$

и найти производящую функцию

$$F(z) = \sum_{N=0}^{\infty} C_N z^N$$

**Вторичная структура РНК** Молекула РНК является полимером, то есть цепочкой из более простых молекул. Однако, в свернутом состоянии, между некоторыми молекулами цепочки существуют дополнительные связи. Формально это выглядит так. Граф (не-ориентируемый) с множеством  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  вершин имеет ребра двух типов: 1) полимерные ребра  $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$ , которые есть в каждой полимерной молекуле, 2) перемычки  $(i, j)$  со следующим свойством - если  $(i, j)$  и  $(k, l)$  две любые перемычки, причем  $i < k < j$ , то и  $i < l < j$ . Такие графы соответствуют *правильной* расстановке некоторого числа  $N$  пар скобок, то есть  $N$  левых скобок и  $N$  правых.

**Упр. 18** Сколько таких конфигураций скобок? Получить рекуррентное соотношение, аналогичное предыдущему, отождествляя конфигурацию скобок с корневым плоским деревом, у которого из каждой вершины выходят 1 или 2 ребра, в направлении от корня.

## 2 Элементарные вычисления

В качестве полных курсов теории вероятностей (к частям 2 и 3 этих лекций) мы рекомендуем систематические изложения [4, 3, 5], полные примеров и приложений курсы [1, 2]. Краткое введение (к части 2) есть в [6].

### 2.1 Схема Бернулли

Рассмотрим конечное множество

$$\Omega = \{\omega\}, \omega = (x_1, \dots, x_N), x_i = \pm 1$$

из  $2^N$  элементов. Пусть на  $\Omega$  задана вероятностная мера  $P(\omega)$ . Тогда  $\Omega$  называется **вероятностным пространством**,  $P$  - **вероятностным распределением** на нем, точки  $\omega \in \Omega$  называются **элементарными событиями**, подмножества  $A \subset \Omega$  - **событиями**, а функции  $f(\omega)$  на  $\Omega$  - **случайными величинами**.

Примеры случайных величин:  $\xi_i(\omega) = x_i$  и  $S = \sum_{i=1}^N \xi_i$ , то есть разность между числом 1 и числом  $-1$  в  $\omega$ .

Мерой (или схемой) Бернулли называется мера

$$P(\omega) = p^k q^{N-k}$$

где  $0 \leq p \leq 1, q = 1 - p$ , а  $k$  число единиц в слове  $\omega$ .

**Упр. 19** Рассмотрим событие  $A_i = \{\omega : \xi_i(\omega) = 1\}$ . Доказать, что  $P(A_i) = p$ . Поэтому  $p$  можно называть вероятностью 1 в схеме Бернулли.

С каждой случайной величиной  $f$  связывается много разных ее характеристик: среднее

$$Ef = \sum_{\omega} f(\omega)P(\omega)$$

момент  $f$  порядка  $m$

$$Ef^m = \sum_{\omega} f^m(\omega)P(\omega)$$

и производящая функция  $Ez^f$ . А также, **разбиение**  $\Omega$  на подмножества  $B_{f,y} = \{\omega : f(\omega) = y\}$  и **алгебра событий**  $A_f$ , связанных с  $f$ . Событие **связано** с  $f$ , если оно представляется в виде объединения некоторых множеств  $B_{f,y}$ .

**Упр. 20** Доказать

$$ES = \sum E\xi_i = N(p - q)$$

События  $A_1, \dots, A_k$  называются (взаимно) **независимыми**, если

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \prod_{i=1}^k P(A_i)$$

Случайные величины  $f_1, \dots, f_k$  называются (взаимно) независимыми, если любые события  $A_1, \dots, A_k$ , где  $A_i$  связано с  $f_i$ , независимы.

**Упр. 21** Эквивалентное определение: случайные величины  $f_1, \dots, f_k$  взаимно независимы, если

$$E \prod F_i(f_i) = \prod E F_i(f_i)$$

для любых функций  $F_1, \dots, F_k$ .

**Упр. 22** Доказать независимость  $\xi_i$  и вывести из этого

$$\begin{aligned} DS = \sigma^2(S) &= E(S - ES)^2 = \sum_{i,j} E(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j) = \\ &= \sum_i E(\xi_i - E\xi_i)^2 = 4pqN \end{aligned}$$

$$Ez^S = \prod_i Ez^{\xi_i} = (pz + qz^{-1})^N$$

**Упр. 23** Определим характеристическую функцию (от вещественных  $\lambda$ ) как

$$f_S(\lambda) = Ee^{i\lambda S} = \prod_i Ee^{i\lambda \xi_i} = (pe^{i\lambda} + qe^{-i\lambda})^N$$

Доказать

$$\frac{d^m f_S}{d(i\lambda)^m} \Big|_{\lambda=0} = ES^m$$

и вычислить моменты и семиинварианты  $S$ , определяемые как

$$\frac{d^m (\log f_S)}{d(i\lambda)^m} \Big|_{\lambda=0}$$

**Упр. 24** Проверить

$$f_{aS}(\lambda) = f_S(a\lambda)$$

и для  $p = q = \frac{1}{2}$  показать

$$f_{\frac{S}{\sqrt{N}}}(\lambda) = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{N}}} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{\lambda}{\sqrt{N}}}\right)^N = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N \rightarrow_{N \rightarrow \infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

Найти пределы моментов и семиинвариантов  $\frac{S}{\sqrt{N}}$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Перечислим важные наблюдения касательно распределения суммы  $S_N$ :

1. среднее  $S_N$  растет линейно по  $N$ , если  $p \neq q$ ;
2. дисперсия  $S_N$  также растет линейно по  $N$  для всех  $p \neq 0, 1$ ;
3. отклонения  $S_N$  от своего среднего, существенно большие чем корень из дисперсии, то есть чем  $\sqrt{N}$ , имеют малую вероятность, точнее

$$P(|S - ES| \geq A\sqrt{N}) \leq \frac{DS}{A^2 N} \rightarrow 0$$

если  $A \rightarrow \infty$  вместе с  $N$ . Это следует из очевидного, но очень важного, соотношения (неравенство Чебышева)

$$DS \geq P(|S - ES| \geq a)a^2;$$

4. (**закон больших чисел**) для любого  $\epsilon > 0$

$$P(|\frac{S_N}{N} - (p - q)| \geq \epsilon) \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$$

при этом говорят, что  $\frac{S_N}{N}$  стремится к константе  $p - q$  по распределению.

Более точные оценки получаются другой техникой, а именно из формулы Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

знаменитой уже тем, что в нее входят одновременно два знаменитых числа:  $\pi$  и  $e$ .

**Theorem 3 (Локальная предельная теорема)** Пусть  $0 < p < 1$ . Тогда равномерно по всем  $x = O(n^{1/2})$  таким, что  $(p - q)n + x$  есть целое неотрицательное число,

$$P\{S_n = (p - q)n + x\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2npq}} \quad (2)$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

В частности, при  $p = 1/2$  вероятность того, что число единиц в *точности* равно числу нулей, весьма мала (но не экспоненциально мала) при больших (четных)  $n$ . А именно, пусть  $n = 2k$ . Тогда

$$P\{S_n = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

При  $x$  по порядку больших чем  $\sqrt{n}$  говорят о больших отклонениях, если  $x$  имеет порядок  $n$ , и об умеренных, если порядок  $x$  меньше  $n$ .

**Большие отклонения** Обозначим через  $P$  бернуллиевскую меру с вероятностью успеха  $p$ , а через  $\pi$  бернуллиевскую меру с вероятностью успеха  $\alpha$ . Функция

$$\hat{H}(p, \alpha) = \alpha \ln \frac{\alpha}{p} + (1 - \alpha) \ln \frac{1 - \alpha}{1 - p}$$

называется *энтропией* меры  $\pi$  относительно меры  $P$ .

**Theorem 4**

$$P\{S_n = [\alpha n]\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)n}} \exp(-n\hat{H}(p, \alpha)), \quad (3)$$

$0 < \alpha < 1, \alpha \neq p$

В случае  $p = q = \frac{1}{2}$

$$P\{S_n = [\alpha n]\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)n}} \exp(-n(\ln 2 - H(\alpha))),$$

где

$$H(\alpha) = -\alpha \ln \alpha - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha).$$

называется **энтропией меры**  $\pi$ . Она неотрицательна, выпукла вверх, равна нулю при  $\alpha = 0, \alpha = 1$  и достигает максимума при  $\alpha = 1/2$ . Ее можно интерпретировать как степень неопределенности результата при бросании монеты с вероятностью успеха  $\alpha$ . Действительно, при  $\alpha = 0$  появляется только решка, а при  $\alpha = 1$  только орел и, следовательно, никакой неопределенности нет. Если же  $\alpha = 1/2$ , появление орла и решетки одинаково вероятно, и в этом смысле неопределенность результата максимальна.

Доказательства двух последних теорем получаются подстановкой формулы Стирлинга в биномиальную формулу для вероятности  $P\{S_n = pn + x\}$ .

Более естественное объяснение появлению энтропии дает **теорема Макмиллана**, читатель может сам придумать ее точную формулировку. А суть ее проста - по закону больших чисел число  $N_1$  единиц среди  $\xi_1, \dots, \xi_N$  близко к  $pN$ . Соответственно вероятность типичной последовательности  $\xi_1, \dots, \xi_N$  близка к

$$p^{N_1} q^{N-N_1} = \exp(N(p \ln p + q \ln q)) = \exp(-NH(p))$$

## 2.2 Конечные цепи Маркова с дискретным временем

**Пространство путей** Здесь пространством элементарных событий (путей) будет множество  $\Omega_N$  двоичных последовательностей длины  $N$

$$\Omega_N = \{\omega = (x_1, \dots, x_N) : x_i = 0, 1\}$$

где индексы  $1, \dots, N$  понимаются как дискретные моменты времени,  $x_i$  - как состояние, в котором мы были в момент  $i$ , а  $\omega$  - как путь по множеству состояний. Зададим меру на  $\Omega_N$ , то есть вероятности путей

$$P^{(N)}(\omega) = p_{x_1} p_{x_1 x_2} \dots p_{x_{N-1} x_N}$$

где есть два вида параметров:

1. вектор-строка  $p = (p_0, p_1)$  начальных вероятностей  $p_0, p_1 \geq 0, p_0 + p_1 = 1$ ;
2. матрица  $\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$  со свойством стохастичности

$$p_{ij} \geq 0, p_{00} + p_{01} = 1, p_{10} + p_{11} = 1$$

Матричная запись: матрица справа  $pP$ . Частный случай - схема Бернулли, где теперь будет 0 вместо -1

$$P = \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}, p_0 = q, p_1 = p$$

### Вероятности событий в множестве путей

**Упр. 25** Введем случайные величины  $\xi_i = x_i$ , как и для схемы Бернулли. Доказать

1.

$$P^{(N)}(\xi_k = 0) + P^{(N)}(\xi_k = 1) = 1$$

2. **условие согласования** для разных вероятностных пространств  $\Omega_n$  и  $\Omega_k, k < n$ , доказать

$$P^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = P^{(n)}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{x_{k+1}, \dots, x_n} P^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{x_{k+1}, \dots, x_{n-1}} \sum_{x_n}$$

Последняя сумма даст 1, и т.д. по индукции. Ввиду этого результата мы можем отбросить верхний индекс у вероятности и обозначать  $P = P^{(N)}$ .



**Условные меры (вероятности)** Для каждой вероятностной меры  $P$  на конечном множестве  $\Omega$  любое событие  $A \subset \Omega, P(A) \neq 0$ , определяет условную вероятностную меру

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

**Упр. 26** Доказать очень важную **формулу полной вероятности**: если есть разбивание вероятностного пространства

$$\cup A_i = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset$$

то для любого события  $B$

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i)$$

**Упр. 27** (марковское свойство) Для любых  $N$  и  $k < N$

$$P^{(N)}(x_{k+1} = 1|x_k = 0) = P^{(N)}(x_{k+1} = 1|x_k = 0, x_{k-1} = 0, \dots, x_1 = 0) = p_{01}$$

то есть, например,  $p_{01}$  - условная вероятность, что  $x_{k+1} = 1$ , если  $x_k = 0$ .

**Упр. 28** Другая формулировка марковского свойства: пусть  $A$  - любое подмножество пространства путей  $x_1, \dots, x_{k-1}$ , и  $B$  - любое подмножество пространства путей  $x_{k+1}, \dots, x_N$ . Тогда при заданном  $x_k$  (то есть при свершившемся событии  $\{\omega : \xi_k(\omega) = x_k\}$ )  $A$  и  $B$  условно независимы, то есть независимы по условной вероятностной мере  $P(\cdot|x_k)$

$$P(B \cap A|\xi_k = x_k) = P(B|\xi_k = x_k)P(A|\xi_k = x_k)$$

**Упр. 29** Воспользовавшись теоремой о сходимости лекции 1, доказать экспоненциальную оценку убывания корреляций: существуют константы  $C > 0$  и  $0 < \alpha < 1$  такие, что для всех  $i, j$

$$|E\xi_i\xi_j - E\xi_i E\xi_j| < C\alpha^{|j-i|}$$

**Упр. 30** Используя предыдущее упражнение, доказать линейный рост дисперсии  $S_N$ , малую вероятность уклонений больших  $\sqrt{N}$  от среднего и закон больших чисел (с помощью неравенства Чебышева).

**События с бесконечными путями** События в пространстве  $\Omega_\infty$  всех бесконечных путей

$$\omega = (x_1, \dots, x_n, \dots)$$

должны быть представлены как пределы событий в пространствах  $\Omega_N$ .

**Упр. 31** Пусть в начальный момент  $\xi_1 = 0$  и пусть  $A_\infty$  - событие "никогда не выйти из нуля".  $A_\infty$  состоит из одной точки  $(0, 0, \dots, 0, \dots)$  и

$$A_\infty = \cap_{N=1}^{\infty} A_N$$

где  $A_N$  - событие "не выйти из нуля за  $N$  шагов". Так как  $P(A_N) = p_{00}^N$ , то

$$P(A_\infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(A_N) = 0$$

**Общая формалистика** Для понимания общей ситуации надо вернуться к лекции 2. Каждой точке  $(x_1, \dots, x_N) \in \Omega_N$  сопоставим подмножество  $A(x_1, \dots, x_N) \subset \Omega_\infty$ , состоящее из всех путей, первые  $N$  символов которых совпадают с  $x_1, \dots, x_N$ . Все события, которые только можно вообразить, принадлежат минимальной  $\sigma$ -алгебре  $\Sigma_\infty$ , порожденной всеми такими подмножествами.

**Упр. 32** Доказать, что в схеме Бернулли событие  $A$  “нет ни одной комбинации из двух последовательных нулей”, равно нулю.

Воспользоваться тем, что  $A$  принадлежит всем событиям  $A_{k,k+1} = \Omega \setminus \{\omega : x_k = x_{k+1} = 0\}$ , а значит и их пересечению, а также независимостью  $\xi_i$ .

**Вырожденные цепи** Цепи Маркова с любым конечным множеством состояний  $X = \{1, \dots, M\}$  определяются в точности как для  $M = 2$ , с помощью начальной вектор-строки и стохастической матрицы  $M \times M$ .

**Упр. 33** Сделать возможные обобщения предыдущих результатов этого раздела на случай произвольного  $M$ .

Состояние  $x \in X$  называется **поглощающим**, если  $p_{xx} = 1$ , то есть попав в  $x$ , мы не выйдем из этого состояния. Состояние  $x$  называется **несущественным**, если, выйдя из  $x$ , мы больше в него не вернемся (то есть нет такого пути положительной вероятности).

Неприводимым классом называется минимальное подмножество состояний  $A \subset X$  такое, что для любых двух  $x, y \in A$  есть путь  $x = x_1, x_2, \dots, x_l = y$  из  $x$  в  $y$  положительной вероятности  $p_{x_1 x_2} p_{x_2 x_3} \dots p_{x_{l-1} x_l} > 0$ . Цепь называется **неприводимой**, если такой класс один и он совпадает со всем  $X$ . В противном случае цепь называется **приводимой**. Заметим, что последняя терминология в разных местах может различаться.

**Упр. 34** Привести примеры на все эти понятия.

**Упр. 35** Какие трудности могут возникнуть, если цепь приводима? Показать, что все начальные формальные определения автоматически переносятся на этот случай, но не существование стационарных вероятностей, сходимость к ним, убывание корреляций.

## 2.3 Одномерные гиббсовские меры

Понятия, рассматриваемые ниже, возникли в физическом контексте, поэтому элементы множества  $\Omega_N = \{\omega = (x_{-N}, \dots, x_N), x_i = \pm 1\}$  называются конфигурациями,  $x_i$  называется спином в точке  $i$ , а интервал пространственной решетки  $\{-N, \dots, N\} \in Z$  из  $2N + 1$  точек называется конечным объемом.

Пусть дана некоторая функция  $\Phi : \{-1, 1\}^2 \rightarrow R$ , называемая **потенциалом**. Она определяет энергию  $\Phi(x_i, x_{i+1})$  взаимодействия спинов в точках  $i$  и  $i + 1$  **Энергией конфигурации**  $\omega$  называется сумма энергий взаимодействия между соседними спинами

$$E(\omega) = E(x_{-N}, \dots, x_N) = \sum_{i=-N}^{N-1} \Phi(x_i, x_{i+1})$$

Конфигурации, на которых достигается минимум энергии, называются **основными состояниями**. Пусть  $\Phi(x_i, x_{i+1}) = J x_i x_{i+1}$ , где  $J$  - вещественный параметр. Если  $J < 0$ , то основными состояниями будут  $x_{-N} = \dots = x_N = 1$  и  $x_{-N} = \dots = x_N = -1$ . Если же  $J > 0$ , то основными состояниями будут альтернирующие конфигурации  $(1, -1, 1 - 1, \dots)$  и  $(-1, 1 - 1, 1, \dots)$ .

**Упр. 36** Какими еще могут быть вещественные функции  $\Phi$  от двух двоичных переменных? Найти основные состояния для таких  $\Phi$ .

Вероятностная мера на множестве  $\Omega_N$ , называемая **мерой Гиббса** в конечном объеме, вводится так

$$P(\omega) = P^{(N)}(\omega) = \frac{\exp(-\beta E(\omega))}{Z_N} = \frac{\exp(-\beta E(\omega))}{\sum_{\omega} \exp(-\beta E(\omega))}$$

где параметр  $0 \leq \beta = \frac{1}{T} \leq \infty$  называется обратной температурой.

**Упр. 37** Основные состояния являются наиболее вероятными конфигурациями при любой температуре. При низких температурах, то есть если  $T \rightarrow 0$ , вероятности основных состояний стремятся к  $\frac{1}{2}$  (при любом фиксированном  $N$ ).

**Метод трансфер-матрицы** Матрица

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,-1} \\ u_{-1,1} & u_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-\beta J) & \exp \beta J \\ \exp \beta J & \exp(-\beta J) \end{pmatrix}$$

называется **трансфер-матрицей**. Пусть  $s(A)$  сумма всех элементов матрицы  $A$ , и введем двумерный вектор

$$e = (1, 1)$$

$U$  можно привести к диагональному виду

$$U = WDW^{-1}, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \implies U^N = WD^N W^{-1}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  - собственные значения. Они вещественные так как матрица симметрична. По теореме Перрона-Фробениуса для матриц с положительными элементами одно из них положительно и максимально по абсолютной величине. Пусть  $\lambda_1 > |\lambda_2| > 0$ .

**Упр. 38** Вычислить явно собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  и нормированные ортогональные собственные вектора  $e_1, e_2$  матрицы  $U$ .

Тогда **статистическая сумма** имеет асимптотику

$$Z_N = \sum_{x_1, \dots, x_N} \exp(-\beta E(x_1 \dots x_N)) = s(U^{2N}) = (eU^{2N}.e) \sim c_1^2 \lambda_1^{2N}$$

где мы разложили  $e = c_1 e_1 + c_2 e_2$ . Асимптотика **свободной энергии**  $F_N$  (то есть логарифма статсуммы, деленного на величину "объема")

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \log Z_N = \lambda_1$$

Так же как и раньше, можно ввести случайные величины  $\xi_i$ . Вероятности

$$P_{i_1, \dots, i_k}^{(N)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = P^{(N)}(\xi_{i_1} = x_{i_1}, \dots, \xi_{i_k} = x_{i_k})$$

называются конечномерными распределениями (в статистической физике они называются  **$k$ -частичными корреляционными функциями**). Как их считать и будут ли они иметь

предел при  $N \rightarrow \infty$ ? Одночастичные функции равны  $\frac{1}{2}$  ввиду симметрии  $P^{(N)}(\omega) = P^{(N)}(-\omega)$ . Рассмотрим, например, двухчастичные функции

$$\begin{aligned} P^N(x_0 = 1, x_1 = 1) &= \frac{(e, U^N e_+) u_{11}(e_+, U^{N-1} e)}{(e, U^{2N} e)} = \\ &= \frac{u_{11}(c_1 c_{+,1})^2 \lambda_1^{2N-1} + O(\lambda_1^N \lambda_2^N)}{(c_1)^2 \lambda_1^{2N} + O(\lambda_2^{2N})} \rightarrow_{N \rightarrow \infty} (c_{+,1})^2 \lambda_1^{-1} \exp(-\beta) \end{aligned}$$

где мы использовали разложение вектора  $e_+ = (1, 0) = c_{+,1} e_1 + c_{+,2} e_2$ . Вдумавшись в эту выкладку, нетрудно понять, что пределы существуют для всех корреляционных функций и определяют “вероятности” так называемых цилиндрических подмножеств множества  $\Omega_\infty = \{(\dots, x_i, \dots)\}$  бесконечных конфигураций (на решетке  $Z$ ), то есть множеств всех бесконечных конфигураций, имеющих заданные значения на конечном числе мест. Ввиду очевидных условий согласования (то есть условий конечной аддитивности), вероятностная мера определена в действительности на алгебре множеств, порожденной цилиндрическими множествами.

Центральное и типичное утверждение состоит в том, что эта мера продолжается на сигма-алгебру, порожденную алгеброй цилиндрических множеств (теорема Колмогорова). Для этого надо заметить, что любая вложенная последовательность цилиндрических множеств имеет непустое пересечение, и условие основной теоремы о продолжении меры автоматически выполнено. Построенная предельная мера называется **гиббсовским распределением в бесконечном объеме**.

Граничные условия это дополнительные члены (взаимодействие с внешней средой) в энергии взаимодействия. Мы разобрали случай пустых граничных условий (когда нет дополнительных членов). Для периодических граничных условий, то есть если в энергии есть дополнительный член  $\Phi(x_{-N}, x_N)$

$$Z_N = \text{Tr} U^{2N+1} = \lambda_1^{2N+1} + \lambda_2^{2N+1}$$

Мы воспользовались формулой

$$\text{Tr}(AB) = \sum_i \sum_j (A_{ij} B_{ji}) = \sum_i \sum_j (B_{ij} A_{ji}) = \text{Tr}(BA)$$

**Упр. 39** Доказать, что будет тот же результат для свободной энергии и для предельных корреляционных функций, если рассматривать другие граничные условия, например, если ввести дополнительные члены  $Jx_{-N} + Jx_N$ .

## 2.4 Случайные блуждания

Пусть  $x_0$  и  $x_n$  - две точки одномерной решетки  $Z$ . Путь длины  $n$  из точки  $x_0$  в точку  $x_n$  есть последовательность

$$\Gamma = x_0 x_1 \dots x_n$$

точек решетки так что  $|x_{i+1} - x_i| = 1$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Упр. 40** Доказать, что если  $n$  и  $y - x$  четны, то число путей длины  $n$  из  $x$  в  $y$  равно  $L_{x,y}(n) = C_n^{\frac{n+y-x}{2}}$ .

**Упр. 41** Пусть  $L_{x,y}^0(n)$  - число тех из них, которые хотя бы один раз попадают в 0. Тогда при  $x, y > 0$  (принцип отражения)

$$L_{x,y}^0(n) = L_{-x,y}(n)$$

а число путей длины  $n$  на  $Z$  из  $x > 0$  в  $y > 0$  которые не попадают в 0 равно

$$L_{x,y}^+(n) = L_{x,y}(n) - L_{-x,y}(n)$$

Введем теперь вероятностную меру  $P^n$  (случайное блуждание) на множестве путей длины  $n$ . Для этого зададим начальное положение  $x_0$  частицы и вероятности скачков  $p_{k,k\pm 1}$  из каждой точки  $k \in Z$ . Обозначим

$$P^n(\Gamma) = p_{x_0 x_1} \cdots p_{x_{n-1} x_n}$$

вероятность пути  $\Gamma$  длины  $n$  из  $x_0$  в  $x_n$ . Для однородного блуждания, то есть когда  $p_{k,k+1} = p, p_{k,k-1} = q$  будет

$$P^n(\Gamma) = p^k q^{n-k}$$

где  $k$  - число скачков направо. Через вероятности путей можно выражать вероятности других событий. Пусть например, в момент 0 частица находится в  $x_0 = 0$ , тогда вероятность того, что в момент  $n$  частица будет в точке  $x_n$  есть сумма вероятностей путей из 0 в  $x = x_n$ , или

$$P^n(x_n = x) = \sum_{\Gamma: x_0=0, x_n=x} P^n(\Gamma)$$

**Упр. 42** Обсудить условия согласования мер  $P^n$  и  $P^m$  для  $n \neq m$  так же как и раньше, чтобы далее можно было писать  $P = P^n$  опуская верхний индекс.

Теперь мы рассмотрим рекуррентный способ вычисления трех фундаментальных величин:

I) (вероятность достижения) вероятность  $Q_i$  из точки  $x_0 = i > 0$  достигнуть точки 0 раньше чем точки  $N$ , выражается как сумма

$$Q_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\Gamma_n} P(\Gamma_n)$$

по путям  $\Gamma_n$  таким, что

$$x_0 = i, x_n = 0, 0 < x_j < N, j = 1, 2, \dots, n-1$$

Из этого определения легко вывести рекуррентное соотношение

$$Q_i = p_{i,i-1} Q_{i-1} + p_{i,i+1} Q_{i+1}, Q_0 = 1, Q_N = 0$$

Важно этот вывод провести также на интуитивном уровне: сначала из  $i$  прыгаем либо в  $i-1$  либо в  $i+1$  с вероятностями  $p_{i,i-1}$  и  $p_{i,i+1}$  соответственно, что сводит задачу к начальной точке  $i-1$  или  $i+1$ .

Ясно что  $Q_{i+1} \leq Q_i$ . Перепишем

$$(p_{i,i-1} + p_{i,i+1}) Q_i = p_{i,i-1} Q_{i-1} + p_{i,i+1} Q_{i+1}$$

$$p_{i,i+1}(Q_i - Q_{i+1}) = p_{i,i-1}(Q_{i-1} - Q_i), i = 1, 2, \dots$$

и обозначая  $u_i = Q_{i-1} - Q_i, u_N = Q_{N-1}$ , имеем

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= \frac{p_{i,i-1}}{p_{i,i+1}} u_i = \left( \prod_{k=1}^i \frac{p_{k,k-1}}{p_{k,k+1}} \right) u_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - Q_N &= u_1 + \dots + u_N = u_1 \left( 1 + \sum_{i=1}^N \left( \prod_{k=1}^i \frac{p_{k,k-1}}{p_{k,k+1}} \right) \right) \\ 1 - Q_1 &= u_1 = \left( 1 + \sum_{i=1}^N \left( \prod_{k=1}^i \frac{p_{k,k+1}}{p_{k,k-1}} \right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Для однородного блуждания возможны два случая:

1)  $q \geq p$  Тогда  $\frac{p_{k,k-1}}{p_{k,k+1}} = \frac{q}{p} \geq 1$

$$\sum_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^i \frac{p_{k,k-1}}{p_{k,k+1}} \right) \rightarrow \infty \implies u_{\&} = 1 - Q_1 \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$$

2)  $q < p$ . Тогда ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^i \frac{p_{k,k+1}}{p_{k,k-1}} \right)$$

сходится и значит при  $Q_1 \rightarrow const < 1$ .

**Упр. 43** Рассмотрим блуждание на  $Z_+$  и обозначим  $R_i$  вероятность выйдя из  $i > 0$  попасть в 0 когда-нибудь, то есть сумму вероятностей всех путей  $i = x_0, x_1, \dots, x_n = 0$  таких, что  $x_k \neq 0, k = 1, \dots, n-1$ . Тогда  $R_i = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_i$ .

II) Пусть теперь

$$p_{01} = 1, p_{N,N-1} = 1$$

Такое блуждание называется блужданием с отражением на границе, так как если в момент 0 точка находится в отрезке  $\{0, 1, \dots, N\}$ , то она никогда из него не выйдет. Для среднего времени  $m_i^{(N)}$  достижения нуля из точки  $0 < i \leq N$  рекуррентные уравнения будут

$$m_0 = 0, m_i = p_{i-1}m_{i-1} + p_{i+1}m_{i+1} + 1, 0 < i < N, m_N = 1 + m_{N-1}$$

**Упр. 44** Показать аналогично предыдущему, что если  $p \geq q$ , то  $m_i^{(N)} \rightarrow_{N \rightarrow \infty} \infty$  для всех  $i$ . Если же  $p < q$ , то  $m_i^{(N)} \rightarrow_{N \rightarrow \infty} m_i < \infty$  для всех  $i$ .

III) Пусть  $\pi_i^{(N)}$  - стационарные вероятности для нашего блуждания.

**Упр. 45** Вычислить их и доказать, что если в однородном случае  $p > q$ , то  $\pi_i^{(N)} \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$  для всех  $i$ .

В последней лекции этого раздела мы их вычислим по другому.

**Блуждание в случайной среде** Каждый набор чисел  $\alpha = \{0 < \alpha_n < 1\}$  определяет случайное блуждание с вероятностями скачков  $p_{n,n+1} = \alpha_n, p_{n,n-1} = 1 - p_{n,n+1}$  на всей решетке  $Z$ . Но что будет, если эти числа сами случайны? Тогда говорят, о случайном блуждании в случайной среде. Однородной случайной средой называется случай, когда  $\alpha_n$  одинаково распределены. Мы предположим также, что  $\alpha_n$  независимы и  $\alpha_n = a_+, a_-$  с вероятностями соответственно  $\mu(a_+), \mu(a_-)$ , то есть образуют схему Бернулли, ее меру обозначим  $\mu$ . Фиксируем теперь набор  $\alpha$ , или как говорят заморозим случайную среду. Тогда среднее положение частицы  $E_\alpha S_t$  в момент  $t$  зависит от  $\alpha$ . Можно далее усреднить эту величину по распределению случайной среды  $\mu$ , то есть вычислить  $E_\mu E_\alpha S_t$ .

Обозначим

$$m = E_\mu \left( \ln \frac{p_{n,n+1}}{p_{n,n-1}} \right)$$

**Задача 3** Доказать, аналогично рекуррентному методу выше (или посмотреть доказательство в статье [15]), что если  $m > 0$ , то  $E_\mu(E_\alpha S_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ , а если  $m < 0$ , то  $E_\mu(E_\alpha S_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} -\infty$ , хотя казалось бы, должно быть условие  $E_\mu(p_{n,n+1} - p_{n,n-1}) > 0$  и  $E_\mu(p_{n,n+1} - p_{n,n-1}) < 0$  соответственно.

**Процесс Гальтона-Ватсона** Другим примером является блуждание на множестве  $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , причем состояние  $\xi(t)$  процесса интерпретируется как число частиц в момент  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Скачки могут быть больше чем на 1, а их вероятности подсчитываются так. Если в момент  $\xi(t) = n$ , то каждая из  $n$  частиц независимо от других дает двух потомков, остается как есть или гибнет с вероятностями  $p_2, p_1, p_0$  соответственно.

Введем производящую функцию распределения числа частиц в момент  $t$

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi(t) = n) z^n$$

Предположим, что в момент 0 есть одна частица то есть  $f_0(z) = z$ . Тогда в момент 1

$$f_1(z) = p_2 z^2 + p_1 z + p_0$$

В момент 2 п.ф. будет

$$f_1(f_1(z))$$

и аналогично

$$f_{t+1}(z) = f_t(f_1(z)) = f_1(f_t(z))$$

Среднее число частиц

$$m_t = \frac{df_t}{dz}(1) = \frac{df_{t-1}}{dz}(f_1(1) = 1) \frac{df_1}{dz}(1) = m_{t-1}(2p_2 + p_1) = m_{t-1}(1 + p_2 - p_0) \quad (4)$$

Поэтому есть три области в пространстве параметров, где система ведет себя по-разному: надкритическая, где  $p_2 > p_0$ , - где среднее число частиц растет, субкритическая,  $p_2 < p_0$ , - где среднее число частиц стремится к нулю, и критическая,  $p_2 = p_0$ , - где среднее не меняется.

Более точное описание поведения процесса в этих областях получается сложнее. Прежде всего есть предел вероятности вырождения  $f_t(0)$ , возрастающей вместе с  $t$

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(0)$$

Это можно увидеть из процесса итерации, так как  $f_1(z)$  возрастающая и строго выпуклая на  $[0, 1]$ , причем

$$f_1(0) = p_0, f_1(1) = 1$$

Поэтому уравнение

$$f_1(z) = z$$

имеет единственный корень  $q$  на  $[0, 1]$ , при этом  $q = 1$ , если  $m = 1$  и  $q < 1$ , если  $m > 1$ . Этот корень и равен предельной вероятности вырождения.

Важно также как ведет себя дисперсия числа частиц в момент  $t$

$$D_t = \frac{D_1 m^{t-1} (m^t - 1)}{m - 1}, m \neq 1$$

$$D_t = D_1 t, m = 1$$

что доказывается так же как (4). Отсюда следует, что при  $m > 1$  дисперсия растет. Центральным результатом в надкритической области является существование предела распределения величины  $\frac{\xi(t)}{m^t}$ , который равен

$$P\left(\frac{\xi(t)}{m^t} < x\right) \rightarrow W(x)$$

явный вид которой неизвестен. Очень краткое и четкое изложение процесса Гальтона-Ватсона см. [14].

## 2.5 Цепи Маркова с непрерывным временем

Интервалом времени теперь будет полуось  $t \in [0, \infty)$ , а множеством состояний  $S = \{1, \dots, N\}$ . Состояние процесса в момент  $t$  обозначим  $\xi(t) \in S$ . Мы приведем три основных подхода к определению цепей с непрерывным временем: они эквивалентны и везде параметрами являются числа  $\lambda_{ij} \geq 0, i \neq j$ , а также начальное распределение  $p_i(0)$ .

**Интуитивное определение** хотя и не является математически строгим, но совершенно необходимо для придумывания и продумывания прикладных моделей. Основой является наглядный постулат: если в момент  $t$  система была в состоянии  $i$ , то за интервал времени  $(t, t + \Delta t)$  совершается переход из  $i$  в  $j \neq i$  с вероятностью  $\lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$ . Тогда в этом же интервале времени

- вероятность будучи в  $i$  куда-то прыгнуть равна  $\Delta t \sum_{j:j \neq i} \lambda_{ij}$
- будучи в  $i$  никуда не прыгнуть равна  $1 + \lambda_{ii} \Delta t, \lambda_{ii} = - \sum_{j:j \neq i} \lambda_{ij}$

Отсюда, воспользовавшись формулой полной вероятности, выводим дифференциальное уравнения для  $p_i(t) = P(\xi(t) = i)$

$$p_t(i + \Delta t) = p_i(t)(1 - \Delta t \sum \lambda_{ij}) + \sum_{j:j \neq i} p_j(t) \lambda_{ji} \Delta t$$

или, перенося  $p_i(t)$  в левую часть, деля на  $\Delta t$  в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  получим

$$\frac{dp_t(i)}{dt} = \sum_{j:j \neq i} (p_j(t) \lambda_{ji} - p_i(t) \lambda_{ij}) \quad (5)$$



Выражения  $\sum_{j:j \neq i} p_j(t) \lambda_{ji}$  и  $\sum_{j:j \neq i} p_i(t) \lambda_{ij}$  имеют смысл входных (в состоянии  $i$ ) и выходных (из состояния  $i$ ) потоков.

Отсюда можно выводить дифференциальные уравнения для других величин. Например, для условной вероятности  $q_i(t)$  того, что находясь в момент 0 состоянии  $i$ , мы из него не выйдем на промежутке времени  $(0, t)$

$$q_t(i + \Delta t) = q_i(t)(1 + \lambda_{ii}\Delta t)$$

$$\frac{dq_t(i)}{dt} = \lambda_{ii}q_i(t), q_i(t) = e^{\lambda_{ii}t} \quad (6)$$

Значит вероятность того, что прыжка не будет в интервале времени  $(0, t)$ , но он будет в интервале  $(t, t + dt)$  равна

$$e^{\lambda_{ii}t} \lambda_{ii} dt \quad (7)$$

Одно из двух следующих определений необходимо для проверки правильности интуитивных рассуждений и для оформления математической статьи.

**Формальное определение на языке полугрупп**  $(N \times N)$  матрица  $H = (\lambda_{ij})$  со свойствами

$$\lambda_{ij} \geq 0, i \neq j, \lambda_{ii} = - \sum_{j:j \neq i} \lambda_{ij}$$

называется генератором полугруппы матриц

$$U^t = e^{Ht} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ht)^n}{n!}$$

где последний ряд сходится в любом смысле слова для любого  $t$  ввиду конечности нормы матрицы  $H$ . Мы увидим, что элементы  $U_{ij}^t$  будут условными вероятностями быть в  $j$  в момент  $t$ , при условии, что в момент 0 были в  $i$ . Марковское свойство на функциональном языке

$$U^{t+s} = U^t U^s$$

Для согласования формального и интуитивного определений надо рассмотреть  $U^{\Delta t}$  для малых  $\Delta t$ : для  $i \neq j$

$$U_{ij}^{\Delta t} = \lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$$

Дифференциальное уравнение (5) получается из

$$\frac{d}{dt} U^t = H U^t$$

Конечномерные распределения в терминах полугруппы записываются в виде

Для

$$0 \leq t_1 < \dots < t_k$$

$$P(\xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_k) = i_k) = \sum_i p_i(0) U_{ii_1}^{t_1} U_{i_1 i_2}^{t_2 - t_1} \dots U_{i_{k-1} i_k}^{t_k - t_{k-1}}$$

Далее по теореме Колмогорова вероятностная мера продолжается на более сложные события. Неудобство этого определения состоит в том, что неизвестно как ведет себя система в промежутках между моментами  $t_k$ . От этого свободно следующее

**Определение в терминах путей** Элементарные события на интервале времени  $[0, T]$  - пути, определяемые последовательностью состояний

$$i = i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_k = j$$

и моментами скачков в эти состояния

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t = t_{k+1}$$

Путь представляется кусочно-постоянной функцией  $f(t) = i_m, t_m \leq t < t_{m+1}$ , а вероятностное распределение на путях интуитивно представляется так:

1. в момент 0 мы в состоянии  $i$ ;
2. в каждом состоянии есть свой будильник, включающийся, как только точка попадает в это состояние, и звонящий случайно в соответствии с (7);
3. сразу после звонка выбираем куда прыгать с вероятностями

$$p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\sum_{j:j \neq i} \lambda_{ij}}$$

(Цепь Маркова с дискретным временем и такими переходными вероятностями называется **вложенной цепью**).

Здесь полезно другое разложение в ряд.

**Упр. 46** Из вида производной  $\frac{d}{dt}(e^{Ht}e^{-H_0t})$  вывести разложение

$$e^{Ht} = e^{H_0t} + \int e^{Hs}V e^{H_0(t-s)} ds = e^{H_0t} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} e^{s_k H_0} V e^{(s_{k-1}-s_k)H_0} \dots V e^{(t-s_1)H_0} ds_k \dots ds_1$$

где  $H_0, V$  - диагональная и внедиагональная части  $H$ . Доказать его сходимость. Проинтерпретировать каждый член ряда в терминах путей.

**Упр. 47** Записать конечномерные распределения в виде сумм и интегралов по путям и доказать равенство определению конечномерных распределений в терминах полугрупп.

**Стационарные вероятности и цепи** Уравнение для стационарных вероятностей сводится к равенству потоков

$$\frac{d}{dt}(\pi e^{Ht}) = 0 \Rightarrow \pi H = 0 \Rightarrow \pi_i \sum_{j:j \neq i} \lambda_{ij} = \sum_{j:j \neq i} \pi_j \lambda_{ji}$$

**Процесс Пуассона** Пусть сначала имеем два состояния  $S = \{0, 1\}$ ,  $\lambda_{01} = \lambda_{10} = \lambda$ . Цепь Маркова представляется кусочно-постоянной функцией, которая полностью определяется моментами скачков

$$0 < t_1 < t_2 < \dots$$

**Упр. 48** Доказать, что распределение момента первого скачка (а также и остальных) не зависит от начального вектора. Доказать, что случайные величины  $t_k - t_{k-1}$  независимы и имеют экспоненциальное распределение.

Процесс Пуассона  $\eta(t)$  определяется так:  $\eta(0) = 0$  и в каждый момент скачка прибавляется единица. Он связан со многими другими вещами, поэтому он имеет разные эквивалентные определения.

Второе определение. Кидаем частицы на полуось, сначала  $x_1$ , потом в точку  $x_2$  и т.д., так что расстояния  $x_k - x_{k-1}$  положительны, независимы и одинаково распределены с уже известным нам экспоненциальным распределением. Тогда распределение точек  $x_i$  будет таким же, как у моментов скачков в первом определении. Только здесь моменты скачков интерпретируются как координаты частиц на прямой.

Третье определение (на полупрямой). Бросим  $N$  частиц на отрезок  $[0, L]$  равномерно и независимо. Пусть множества  $A_1, \dots, A_k \subset [0, L]$  взаимно не пересекаются и пусть  $|A_i|$  - их меры Лебега. Пусть  $\xi_i$  - случайное число частиц, попавших в  $A_i$ . Вычислим вероятность

$$P_{N,M}(\xi_i = n_i) = C_M^{n_i} \left(\frac{|A_i|}{L}\right)^{n_i} \left(1 - \frac{|A_i|}{L}\right)^{M-n_i}$$

Тогда в пределе  $L, N \rightarrow \infty$  так, что  $\frac{N}{L} \rightarrow \rho$  (плотность числа частиц), называемом термодинамическим пределом, имеем

$$P_{N,L}(\xi_1 = n_1, \dots, \xi_k = n_k) \rightarrow \prod_{i=1}^k \frac{(\rho|A_i|)^{n_i}}{n_i!} e^{-\rho|A_i|}$$

**Упр. 49** Доказать эквивалентность определений 1 и 2.

## 2.6 Гауссовы системы и функции от них

**Язык случайных величин** Основой языка теории вероятностей является понятие случайной величины и системы случайных величин. Задание случайной величины  $\xi$  может пониматься в широком смысле, то есть просто как задание для каждого вещественного  $x$  числа

$$0 \leq F_\xi(x) = P(\xi < x) \leq 1$$

понимаемого как вероятность того, что  $\xi$  меньше  $x$ . Функция  $F_\xi(x)$  называется функцией распределения (случайной величины  $\xi$ ) и должна удовлетворять естественному условию неубывания.

Если говорят о случайном векторе  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ , то имеется в виду задание многомерной функции распределения

$$0 \leq F_\eta(x_1, \dots, x_N) = P(\eta_1 < x_1, \dots, \eta_N < x_N) \leq 1$$

с условием неубывания по каждой переменной.

Если говорят о системе случайных величин  $\{\eta_\alpha\}$ , занумерованной некоторым множеством индексов, возможно несчетным, то имеют в виду, что для любого конечного подмножества индексов задана функция распределения, причем все эти функции согласованы, то есть для  $\eta_{\alpha_1}, \dots, \eta_{\alpha_N}$

$$\lim_{x_N \rightarrow \infty} P(\eta_{\alpha_1} < x_1, \dots, \eta_{\alpha_N} < x_N) = P(\eta_{\alpha_1} < x_1, \dots, \eta_{\alpha_{N-1}} < x_{N-1})$$

Если  $\alpha$  пробегает одномерную прямую, или ее часть, то говорят о **случайном процессе**, а если пробегает другое многообразие, то о **случайном поле** на этом многообразии.

Более узкое понятие системы случайных величин имеет в виду систему измеримых функций  $\eta_\alpha(\omega)$  на некотором вероятностном пространстве  $\Omega$  с мерой  $\mu$  и тогда, например,

$$P(\eta_\alpha < x) = \mu(\{\omega : \eta_\alpha(\omega) < x\})$$

Если задана система случайных величин в широком смысле, то во-первых, всегда можно построить соответствующую систему в узком смысле на некотором  $\Omega$ . Это делается разными способами:

1. чаще всего вид  $\Omega$  неважен, и достаточно считать, что такие объекты  $\Omega, \eta_\alpha(\omega)$  просто существуют;
2. для конечной или счетной системы можно взять  $\Omega = R^n, n = 1, 2, \dots, \infty$ ;
3. если индексами являются функции на некотором пространстве  $X$ , то можно выбрать какой-либо счетный базис в этом множестве функций и поступить как в пункте 2, а на остальных функциях определить случайные величины по линейности или каким-либо предельным переходом;
4. иногда две системы случайных величин надо посадить на одно вероятностное пространство, то есть придумать для них совместное распределение, - так называемая проблема каплинга (coupling). Часто это требует определенного искусства

Сделаем небольшой экскурс в типы сходимости.

**Сходимость случайных величин** Если предполагать общее вероятностное пространство для всех участвующих случайных величин, то есть много видов сходимости, но скорее они относятся к анализу, чем к теории вероятностей. Это сходимость по некоторой норме, сходимость с вероятностью 1 (**сходимость почти наверное**), то есть для всех  $\omega$ , кроме множества меры нуль. И наконец, последовательность случайных величин  $\eta_n$  **сходится по распределению** (говорят также - по мере, по вероятности - но терминология может различаться) к случайной величине  $\eta$ , если для всех  $\epsilon > 0$

$$P(|\eta - \eta_n| > \epsilon) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Для системы случайных величин сходимость по вероятности означает эту сходимость для каждой конечной подсистемы, или для каждой случайной величины.

Если же речь идет о случайных величинах в широком смысле, то речь идет о сходимости мер на  $R^d$ : последовательность распределений  $\mu_n$  **слабо сходится** к распределению  $\mu$ , если  $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$  для всех ограниченных непрерывных функций  $f$  на  $R^d$ . Это эквивалентно сходимости вероятностей событий  $\mu_n(A)$  для  $A$  таких, что граница  $\partial A$  имеет

нулевую меру  $\mu$ , см. [4]. Этот нюанс с границей потому, что, например, мера с гладкой плотностью может сходиться к точечной мере.

Часто проще всего доказать сходимостъ моментов или сходимостъ характеристических функций. Это особенно просто, если например, случайные величины  $\eta_n$  равномерно ограничены сверху и снизу. Тогда сходимостъ моментов, характеристических функций и функций распределения являются эквивалентными понятиями. Более общо, если для некоторой константы  $C > 0$ , моменты порядка  $n$  не превосходят  $C^n n!$ , так как х.ф. в этом случае аналитична в окрестности нуля некоторого радиуса  $R$ . Для продолжения за эту окрестность получается, разлагая х.ф. в ряд в точке  $\frac{R}{2}$  вещественной оси и используя то, что производные х.ф. в других точках мажорируются производными в нуле.

В общем случае может быть много нюансов. Однако есть общее утверждение: если моменты  $E\eta_n^k, k = 1, 2, \dots$  сходятся к некоторым числам  $m^{(k)}$ , то последние являются моментами некоторой функции распределения  $F(x)$  и некоторая подпоследовательность последовательности  $F_{\eta_n}$  слабо сходится к  $F$ . Сама последовательность сходится, если  $m^{(k)}$  единственным образом определяют функцию распределения. Тонкий критерий Карлемана говорит, что для этого достаточна расходимостъ ряда  $\sum m_{2n}^{-\frac{1}{2n}}$ .

**Гауссов закон** Часто студенты-вероятностники не могут даже вспомнить вид гауссова закона. Но помнить что-то все таки надо, остальное - знать как быстро вывести самому.

Стандартной **гауссовой** плотностью называется функция

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

**Упр. 50** Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

*Указание: записать квадрат этого интеграла как двойной интеграл и перейти в нем к полярным координатам. Доказать, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = 0, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = 1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x - \frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

*Указание: вычислить последний интеграл, выделив полный квадрат под экспонентой.*

Случайная величина  $\xi$  называется стандартной (то есть с нулевым средним и единичной дисперсией) гауссовой, если

$$P(\xi < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x p(x) dx$$

Случайная величина  $\eta$  называется гауссовой, если для некоторых  $a, \sigma$  величина  $\xi = \frac{\eta - a}{\sigma}$  является стандартной гауссовой, то есть  $\eta = \sigma\xi + a$ , среднее и дисперсия  $\eta$  равны соответственно

$$E\eta = a, E\eta^2 = \sigma^2, Ee^{\lambda\eta} = Ee^{\lambda\sigma\xi + \lambda a} = e^{\frac{(\lambda\sigma)^2}{2} + \lambda a} \quad (8)$$

а плотность  $\eta$  равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Случайный вектор  $(\eta_1, \dots, \eta_N)$  называется гауссовым, если он может быть представлен в виде

$$\eta_i = \sum u_{ij} \xi_j + a_i \quad (9)$$

где  $\xi_1, \dots, \xi_N$  - независимые стандартные гауссовы величины, а  $u_{ij}, a_i$  - вещественные числа. Далее, если не оговорено противное, будем считать средние всех гауссовых величин равными нулю. В частности, в предыдущей формуле  $a_i = 0$ . Тогда, если матрица  $U = (u_{ij})$  не вырождена, то матрица  $C = UU^*$  с элементами

$$C(i, j) = E\eta_i \eta_j$$

является положительно определенной и называется **матрицей ковариаций** (гауссова вектора  $\eta$ ).

**Упр. 51** Если у гауссова вектора  $E\eta_i \eta_j = 0$ , то  $\eta_i$  взаимно независимы.

**Упр. 52** Если задан случайный вектор  $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ , как вычислить распределение функции  $F(\xi_1, \dots, \xi_N)$  от него? Исходя из этого, понять точный смысл определения (9).

**Моменты и функции от гауссовских величин** Как подсчитать моменты гауссова вектора  $\eta$  (среди его компонент могут быть одинаковые, но все имеют нулевые средние):  $E\eta_1 \dots \eta_N = 0$  если  $N$  нечетно и

$$E\eta_1 \dots \eta_N = \sum E\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots E\eta_{i_{N-1}} \eta_{i_N} \quad (10)$$

если  $N = 2n$  четно, где сумма берется по всем разбиениям множества  $\{1, \dots, N\}$  на пары. Эта формула очень важна: она фактически лежит в основе **диаграммной техники** в квантовой теории поля.

**Упр. 53** Доказать эту формулу, используя (9) или выражение

$$E \exp(a_1 \eta_1 + \dots + a_N \eta_N) = \exp\left(\sum a_i a_j C(i, j)\right)$$

которое можно вывести из (8). Указание: разложить в ряд по  $a_1, \dots, a_N$  обе части этого равенства и сравнить коэффициенты при  $a_1 \dots a_N$ .

**Случайные функции** Система (возможно бесконечная) случайных величин  $\{\xi_\alpha\}$  называется гауссовой, если любая конечная подсистема гауссова. Гауссовы случайные системы определяются и строятся очень просто: достаточно задать средние значения  $m_\alpha = E\xi_\alpha$  и ковариацию  $C(\alpha, \beta) = E\xi_\alpha \xi_\beta$ . Обычно гауссовы системы нумеруются элементами линейного пространства  $\mathbf{H}$ . Это подразумевает, что

$$\xi_{c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2} = c_1 \xi_{\alpha_1} + c_2 \xi_{\alpha_2}$$

Ковариация определяет в  $\mathbf{H}$  скалярное произведение, пополнение по которому расширяет  $\mathbf{H}$  до гильбертова пространства  $\hat{\mathbf{H}}$ . Обратно, если в  $\mathbf{H}$  уже есть свое скалярное произведение, то его можно считать ковариацией для занумерованной гауссовой системы.

Если речь идет о случайном поле на  $R^d$ , то в качестве  $\mathbf{H}$  можно взять пространство гладких (или кусочно гладких) функций на  $R^d$  с компактным носителем. Приведем три наиболее известных примера.

**Белый шум** Каждой функции  $f \in L_2(R^d)$  отнесем гауссову величину  $\xi(f)$  с нулевым средним и ковариацией

$$E\xi(f)\xi(g) = (f, g) = \int f(x)\bar{g}(x)dx = \int \delta(x-y)f(x)\bar{g}(y)dxdy$$

Поэтому, если носители  $f$  и  $g$  не пересекаются, то  $\xi(f)$  и  $\xi(g)$  независимы, что и объясняет название процесса. Говорят также, что ковариация задана обобщенной функцией  $C(x-y) = \delta(x-y)$ . Функция  $\delta(x)$  является формальным пределом обычной функции  $f_\epsilon$  - столбика шириной  $\epsilon$  и высотой  $\epsilon^{-1}$  так что для любой гладкой функции  $g$

$$\int \delta(x)g(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f_\epsilon(x)g(x)dx = g(0)$$

Можно ввести случайные величины “в точке”  $\xi_x = \xi(\delta_x)$  с распределением, являющимся пределом распределений  $\xi(f_\epsilon)$ . Если их дисперсии бесконечны, то говорят, что  $\xi_x$  являются обобщенными случайными величинами. В данном случае это именно так.

Процесс называется **стационарным**, если ковариация  $E\xi(f)\xi(g)$  не меняется при сдвигах

$$f(x) \rightarrow f(x-y), g(x) \rightarrow g(x-y)$$

**Винеровский процесс** Это гауссова система  $\xi_t$ , занумерованная моментами времени  $t \in [0, \infty)$  и такая, что  $\xi_0 = 0, E\xi_t = 0, E(\xi_t - \xi_s)^2 = |t - s|$ .

**Упр. 54** Доказать, что винеровский процесс есть процесс с независимыми приращениями, то есть для всех

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k$$

случайные величины  $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$  независимы.

**Упр. 55** Винеровский процесс непрерывен в том смысле, что  $E|\xi - \xi_{t+\Delta t}| \rightarrow 0$ , если  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Часто полезно мыслить случайный процесс как меру на множестве путей (траекторий). Особенно для случайных процессов со значениями на решетке, см. ниже, где эта мера строится, как мы это делали выше, по согласованной системе распределений. Сложнее построить меру на непрерывных траекториях, например для винеровского процесса. Это необходимо для таких вопросов как распределение максимума [18], граничных задач [1] и самопересечения траекторий [20]. Но часто, как например, в эвклидовой теории поля, свойства траекторий неважны.

Проще всего использовать специальный базис (типа wavelets) из функций Хаара. Две из функций этого базиса  $h_0(t) = 1$  и  $h_1(t)$ , равная 1 на интервале  $(0, \frac{1}{2})$ , -1 на  $(\frac{1}{2}, 1)$  и 0 в остальных случаях. Остальные элементы базиса

$$h_n(t) = 2^{\frac{j}{2}} h_1(2^j t - k)$$

для  $n = 2^j + k, j \geq 0, 0 \leq k < 2^j$ .

Определим винеровский процесс не как набор случайных величин, а как случайную функцию, в виде ряда

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(h_n, \chi_{(0,t)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \int_0^t h_n(s)ds \quad (11)$$

где  $\chi_{[0,t]}$  - индикатор интервала  $[0, t]$ . Отсюда легко подсчитывается ковариация. Каждый член ряда - непрерывная функция. Докажем равномерную сходимость ряда. Воспользуемся тем, что при  $a < \frac{1}{2}$  с вероятностью  $1 - \sup_n \frac{\eta_n}{n^a} = O(1)$ , это очевидно, если рассмотреть последовательность событий  $A(C) = \{\sup_n \frac{\eta_n}{n^a} < C\}$ . Тогда, при заданных  $t$  и  $j$ , только один интеграл в (11) отличен от нуля, и этот интеграл не превосходит  $2^{2^{-j}}$ , что и дает равномерную сходимость ряда из непрерывных функций.

**Процесс Орнштейна-Уленбека** Это система случайных величин  $\xi_x, x \in R$ , на прямой с нулевыми средними и ковариацией

$$C(x - y) = E\xi_x \xi_y = \exp(-m|x - y|)$$

**Упр. 56** Вычислить преобразование Фурье корреляционной функция

$$\hat{C}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(x) e^{ikx} dx = \frac{const}{m^2 + k^2}$$

Константа зависит от того, как вы определите преобразование Фурье.

Можно рассматривать произвольные многочлены от гауссовых величин, то есть линейные комбинации мономов  $\xi_{x_1} \dots \xi_{x_k}$ . Такие полиномы  $F$  образуют линейное пространство со скалярным произведением  $E(F_1 F_2)$ . Его можно пополнить до гильбертова пространства  $\hat{H}$ . Обозначим  $H_0$  подпространство  $\hat{H}$ , порожденное многочленами от случайной величины  $\xi(0)$ , то есть величинами  $1, \xi(0), \xi^2(0), \dots$ . Пусть  $P_0$  - ортогональный проектор на это подпространство, а  $U^t$  - оператор сдвига в  $\hat{H}$

$$U^t \xi_s = \xi_{s+t}$$

Введем операторы (трансфер-матрицы)

$$T^t = P_0 U^t P_0$$

Для построения ортонормированного базиса в  $H_0$  определим случайную величину, называемую **виковской экспонентой**

$$: \exp a\xi := \frac{\exp a\xi}{\langle \exp a\xi \rangle} = \exp(a\xi - a^2 \langle \xi^2 \rangle)$$

где  $a$  - число,  $\xi$  - гауссова величина. Это понятие идет из физики, где принято среднее обозначать как  $EF = \langle F \rangle$ . **Полиномом Вика** (скорее обозначение Вика, а полиномы Чебышева или Эрмита) :  $\xi^n$  : называется коэффициент в разложении в ряд Тейлора

$$: \exp a\xi := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} : \xi^n :$$

**Упр. 57** Доказать ортонормированность базиса  $1, \xi, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} : \xi^n :, \dots$ , вычислив

$$\langle : \exp a\xi :: \exp b\xi \rangle$$

и разлагая обе части в ряд по  $a$  и  $b$ . Более того, каждый базисный вектор является собственным для  $T^t$

$$T^t : \xi^n := \exp(-mnt) : \xi^n :$$



Введем операторы рождения-уничтожения в  $\mathbf{H}$

$$a^* : \xi^n := \sqrt{n+1} : \xi^{n+1} :$$

$$a : \xi^n := \sqrt{n} : \xi^{n-1} :, n > 0, a1 = 0$$

и гамильтониан

$$H = ma^*a$$

**Упр. 58** Доказать

$$T^t = \exp(-tH)$$

и полугрупповое (марковское) свойство

$$T^{t+s} = T^t T^s$$

## 2.7 Обратимость: равновесие и динамика

Пусть задан случайный процесс  $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$ . Обратный процесс определяется как  $\eta(t) = \xi(-t)$ . Процесс  $\xi(t)$  называется обратимым (понятие идет из физики), если распределения процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  совпадают.

Цепь Маркова  $\xi_t$  с непрерывным временем называется **обратимой** относительно меры  $\pi = \{\pi_i, i \in X\}$ , если (для всех  $i, j$ ) выполнено следующее **условие детального баланса**

$$\pi_i \lambda_{ij} = \pi_j \lambda_{ji} \quad (12)$$

$\pi$  может быть бесконечной мерой.

**Упр. 59** Обдумайте связь между двумя определениями, если  $\xi(t)$  - стационарная цепь Маркова. Будет ли обратный процесс марковским?

Для цепи с дискретным временем условие детального баланса имеет вид

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

Мы ограничимся случаем непрерывного времени, и предположим, что  $\pi_i > 0$  для всех  $i$ .

Обратимость относительно меры, равной единице в каждой точке, эквивалентна симметричности матрицы  $(\lambda_{ij})$ . Поэтому любая обратимая цепь получается из цепи с симметрической матрицей переходов преобразованием

$$\lambda_{ij} \rightarrow w_i \lambda_{ij} w_j^{-1}, w_i = \sqrt{\pi_i}$$

Предположим, что цепь неприводима, то есть между двумя любыми точками  $i_0, i_n$  существует путь  $\Gamma = i_0, \dots, i_n$  такой, что

$$\lambda(\Gamma) = \lambda_{i_1 i_2} \lambda_{i_2 i_3} \dots \lambda_{i_{n-1} i_n} > 0$$

Критерий Колмогорова обратимости марковского процесса относительно меры  $\pi$  состоит в выполнении равенств

$$\lambda(\Gamma) = \lambda_{i_1 i_2} \lambda_{i_2 i_3} \dots \lambda_{i_n i_1} = \lambda(\Gamma^{-1}) = \lambda_{i_1 i_n} \lambda_{i_n i_{n-1}} \dots \lambda_{i_2 i_1} \quad (13)$$

для любого замкнутого пути  $\Gamma = i_1, \dots, i_n, i_1$  и обратного к нему. На практике, достаточно требовать выполнение этого свойства только для базисных циклов (набор циклов называется базисным, если любой цикл является произведением базисных, см. элементарную топологию) в графе переходов цепи.

Действительно, (13) очевидно следует из (12). Докажем обратное. Между двумя любыми точками  $i_0, i_n$  существует путь  $\Gamma = i_0, \dots, i_n$  такой, что  $\lambda(\Gamma) > 0$  и  $\lambda(\Gamma^{-1}) > 0$ . Положим тогда

$$a_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ji}}, a(\Gamma) = a_{0i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{n-1} i_n}$$

Как следует из (13),  $a(\Gamma) = 1$  для замкнутого пути, то есть  $a(\Gamma)$  - коцикл, а для незамкнутого не зависит от пути, а только от начальной и конечной точки. Тогда мера  $\pi_k$ , удовлетворяющая (12), строится так: фиксируем точку  $0 = i_0$ , возьмем произвольно  $\pi_0 > 0$ , и положим для любого  $k = i_n$  и выбранного выше пути  $\Gamma$

$$\pi_k = \pi_0 a(\Gamma)$$

Условие детального баланса следует отсюда.

Суммируя в (12) по  $i$ , получим уравнения для стационарных вероятностей. Это доказывает, что если  $\sum \pi_i < \infty$ , то  $\pi_i$ , удовлетворяющие (12), пропорциональны стационарным вероятностям.

**Упр. 60** Рассмотрим блуждание на отрезке  $[0, N]$  прямой

$$p_n = P(n \rightarrow n+1), q_n = P(n \rightarrow n-1), p_n + q_n = 1$$

при  $n = 1, \dots, N-1$ , и с произвольными скачками с границы (граничными условиями)

$$p_{00}, p_{01} > 0, p_{00} + p_{01} = 1, p_{NN}, p_{N,N-1} > 0, p_{NN} + p_{N,N-1} = 1$$

Будет ли эта цепь обратимой? Вычислить стационарные вероятности, если  $p_n = q_n = \frac{1}{2}$ .

Часто получить сведения о мере  $\pi$  легче с помощью динамики, относительно которой  $\pi$  инвариантна. Особенно важно это для систем, где множество состояний - множество векторов большой длины. Это так называемые

**Процессы с локальным взаимодействием** Пусть задан граф  $G$  с множеством вершин  $V$ . Конфигурация определяется как функция  $x : V \rightarrow S$ , где  $S$  - некоторое множество значений (часто говорят, множество спинов), например  $S = \{1, -1\}$ . Построим марковскую цепь с непрерывным временем, и множеством состояний - множеством всех конфигураций  $S^V$ . Переходы в этой цепи - изменение значения конфигурации в одной точке  $v_0$ :  $x(v) \rightarrow x'(v)$ , где  $x'(v) = x(v), v \neq v_0$ , и  $x'(v_0) \neq x(v_0)$ , то есть в нашем случае  $x'(v_0) = -x(v_0)$  (spin-flip). Вероятность этого перехода за время  $dt$  равна  $\lambda(x'(v)|x(v), v_i \in O(v_0))dt$ , где  $O(v_0)$  - окрестность точки  $v_0$ , то есть сама  $v_0$  и все вершины, соединенные с ней ребром в графе  $G$ .

Построим обратимую динамику (называемую **динамикой Глаубера**), сохраняющая меру Гиббса (в модели Изинга) в конечном объеме. Напомним, что последняя есть мера на множестве конфигураций  $\omega = (x_1, \dots, x_N), x_i = \pm 1$

$$\pi(\omega) = \frac{\exp(\beta \sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1})}{Z_N}$$

Будет искать  $\lambda_{\omega\omega'}$  такие, чтобы выполнялось условие обратимости

$$\pi_{\omega}\lambda_{\omega\omega'} = \pi_{\omega'}\lambda_{\omega'\omega}$$

Переходы этой цепи - замена  $+$  на  $-$  и наоборот на одном из мест  $1 < i < N$ . При этом интенсивности будут зависеть от спинов ближайших соседей  $i-1, i+1$ . То есть  $\lambda_{+-}^{(i)}(x_{i-1}, x_{i+1}), \lambda_{-+}^{(i)}(x_{i-1}, x_{i+1})$ . Имеем условие

$$\begin{aligned} & \exp(\beta(\dots + x_{i-2}x_{i-1} + x_{i-1} + x_{i+1} + x_{i+1}x_{i+2} + \dots))\lambda_{+-}^{(i)}(x_{i-1}, x_{i+1}) = \\ & = \exp(\beta(\dots + x_{i-2}x_{i-1} - x_{i-1} - x_{i+1} + x_{i+1}x_{i+2} + \dots))\lambda_{-+}^{(i)}(x_{i-1}, x_{i+1}) \end{aligned}$$

Поэтому достаточно положить

$$\lambda_{+-}^{(i)}(x_{i-1}, x_{i+1}) = \exp(-\beta(x_{i-1} + x_{i+1})), \lambda_{-+}^{(i)}(x_{i-1}, x_{i+1}) = \exp(\beta(x_{i-1} + x_{i+1}))$$

Если  $i = 1$  или  $i = N$ , то в выражениях для  $\lambda$  будет один линейный член под экспонентой.

Этот прием - выбор вероятности перехода соответственно распределению Гиббса - называют методом теплового резервуара. Более общим методом является

**Алгоритм Метрополиса** Чтобы построить обратимый процесс, имеющий заданную инвариантную меру  $\pi$ , переходные вероятности ищутся в следующем виде

$$p_{xy} = p_{xy}^0 a_{xy}, x \neq y; p_{xx} = 1 - \sum_{y:y \neq x} p_{xy}$$

где  $p_{xy}^0$  - некоторая затравочная матрица, которую будем далее предполагать симметрической. Матрица  $p_{xy}$  обратима относительно меры  $\pi$ , если

$$\frac{a_{xy}}{a_{yx}} = \frac{\pi_y p_{yx}^0}{\pi_x p_{xy}^0}$$

Чтобы найти  $a_{xy}$  достаточно найти функцию  $F : R_+ \rightarrow [0, 1]$  такую что

$$\frac{F(z)}{F(\frac{1}{z})} = z$$

и положить

$$a_{xy} = F\left(\frac{\pi_y p_{yx}^0}{\pi_x p_{xy}^0}\right) = F\left(\frac{\pi_y}{\pi_x}\right)$$

Самый известный пример такой функции  $F(z) = \min(z, 1)$  определяет алгоритм Метрополиса.

**Упр. 61** Показать, что выбор в качестве затравочной динамики переворачивание любого из спинов с одинаковой интенсивностью и выбор  $F(z) = \frac{z}{1+z}$  совпадает с методом теплового резервуара в вышеприведенном примере.

## 3 Вероятностная интуиция на разных шкалах для малых систем

### 3.1 Стохастические игры и жизненные принципы

Хотя теория вероятностей во многом обязана азартным играм; играть в азартные игры нехорошо, в обычные игры - увлекательно для детей и некоторых взрослых. В школе я много играл в карты на крыше одного из домов в центре Москвы. После школы не играл никогда, но надо сказать, это школьное увлечение способствовало некоторым математическим задаткам. Жизненные принципы конечно не надо согласовывать с теорией игр. Но в жизни мы никогда не знаем стратегии партнера, и легко выдаем желаемое за действительное. Знание теории игр помогает отсеять некоторые свои заблуждения. Здесь приводятся несколько элементарных примеров из теории игр, не так формально, как в монографиях по теории игр.

**У кого больше денег, тот выигрывает при честной игре** Два игрока играют в орел-решку. У первого  $N$  монет, у второго  $n < N$ . Если выпадает орел, первый выигрывает монету, решка - второй.

Процесс игры описывается блужданием  $S_t, t = 1, 2, \dots$ , на отрезке  $[-N, n]$ , где  $S_t$  - сколько монет выиграл игрок. Игра кончается когда у одного из игроков кончаются деньги, то есть когда блуждание достигает одного из концов интервала. Вероятность выигрыша первого игрока есть вероятность достигнуть  $-N$  ранее  $n$ , которая всегда больше при честном бросании. Игра называется честной, если  $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$ .

Если же бросание нечестное, то есть например  $p_{i,i+1} = p > p_{i,i-1} = q$ , то все зависит от соотношения  $N - n$  и  $p - q$ .

**Задача 4** Получить соотношение между  $N, n, p$ , при которых шансы игроков равны. Можно воспользоваться результатами лекции о случайных блужданиях,

**Если знать стратегию соперника** Перед игроком в казино 2 коробки - красная и черная. Казино прячет одну монету в красную коробку или 2 монеты в черную. Игрок должен выбрать одну из двух коробок. Если он выбирает красную и отгадывает, то получает монету, если не отгадывает - отдает 2 монеты, если он выбирает черную и отгадывает, то получает 2 монеты, если не отгадывает - отдает 1 монету. Казалось бы надо всегда выбирать черную коробку - максимальный выигрыш и минимальный проигрыш. Но чтобы обмануть клиентов, казино меняет стратегию.

Стратегия казино - вероятность спрятать монету в красную с вероятностью  $p$ , 2 монеты в черную -  $1 - p$ . Стратегия игрока - вероятность выбрать красную коробку  $q$ , черную  $1 - q$ . Средний выигрыш

$$(p - 2(1 - p))q + (2(1 - p) - p)(1 - q) = 2 - 3p + 2q(3p - 2)$$

Поэтому если  $p < \frac{2}{3}$ , игрок должен всегда выбирать черную коробку, если  $p > \frac{2}{3}$ , то всегда красную. Если  $p = \frac{2}{3}$ , то при любой стратегии игрока будет нулевой средний выигрыш.

**Задача 5** Существенно сложнее при многократных повторениях этой игры, если казино меняет стратегию, то есть  $p(t)$  зависит от времени. Можно ли выиграть у казино, если оно меняет стратегию случайно? Как можно вычислять стратегию казино по повторам проигрышей?

**Имеет смысл играть, если знаешь детерминированную компоненту. Но, если мало денег, выгодно пропускать ходы** Есть случайное блуждание с дискретным временем на  $Z$ , с вероятностями скачков  $p_{i,i-1}, p_{i,i+1}$ . Игрок играет со случаем. На каждый скачок он заключает пари, вверх или вниз будет скачок. Угадал - выигрывает 1, не угадал - проигрывает 1. При этом он имеет конечную сумму денег -  $N$  монет. Стратегия игрока состоит только в одном - он может пропускать ходы.

Если  $p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = \frac{1}{2}$ , то при любой стратегии будет нулевой средний результат. Рассмотрим случай, когда снос

$$m_i = -p_{i,i-1} + p_{i,i+1}$$

отрицателен при  $i > 0$  и положителен при  $i < 0$ , но  $|m_i| - \frac{1}{2} = \delta_i$  возрастают при возрастании  $|i|$ . Тогда для долгой игры, и при наличии большого количества денег, выгодно ставить соответственно сносу. Если же денег мало, то есть риск их случайно проиграть из за случайностей скачков. Очевидно, что выгоднее ставить, если точка достаточно далеко от нуля.

**Задача 6** Игроку выделено время  $T$  на игру. Как надо играть, чтобы получить максимальный средний выигрыш, если вероятность разорения не должна превышать  $\epsilon$  ?

**Простейшая игра на бирже** Имеется случайный процесс  $\xi(t)$ , траектории которого - случайные ломаные, которые строятся по случайным моментам

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

которые образуют пуассоновский процесс. Именно

$$\xi(t) = \xi(t_{2k}) + t - t_{2k}, t_{2k} < t < t_{2k+1}$$

$$\xi(t) = \xi(t_{2k+1}) - (t - t_{2k+1}), t_{2k+1} < t < t_{2k+2}$$

Игра состоит в том, что игрок может купить или продать 1 акцию в момент  $t$  по цене  $x(t)$ . Единственное ограничение - если произошла покупка или продажа, то следующая сделка не может быть раньше, чем через время  $\epsilon$ .

Если мы знаем всю траекторию до момента  $t$ , а нам надо принять решение в момент  $t$ , то понятно что надо купить когда траектория начинает расти, а продать; когда она начинает уменьшаться. Если же в момент покупки  $t_k$  нам надо сразу сказать, когда продать, то есть фиксировать момент  $t_k + t$  продажи, то ситуация существенно сложнее.

**Задача 7** Пусть акция куплена в момент начала роста, как выбрать  $t$ , чтобы оптимизировать средний выигрыш?

**Всегда ли одношаговая выгода оптимальна** Марковские управляемые процессы можно обобщать и формализовать до абсурда. Я не знаю однако, хорошего свода содержательных примеров.

Пусть есть  $N$  состояний  $\{1, 2, \dots, N\}$  и две возможные матрицы переходов  $P_k = (p_{ij}^{(k)})$ ,  $k = 1, 2$ . Стратегия игрока состоит в том, что, будучи в состоянии  $i$ , он выбирает одну из матриц  $k = k(i)$ , точнее ее  $i$ -тую строку. Тогда случайный процесс  $\xi(t)$  будет марковский с матрицей переходов  $(p_{ij}^{(k(i))})$ . При этом, на каждом шаге, когда  $\xi(t) = i$ , игрок получает доход (или расход)  $c_{i,k(i)}$ . Одна из возможных стратегий: выбрать  $k = k(i)$  так, чтобы

$$c_{i,k(i)} = \max_k c_{i,k}$$

**Задача 8** Всегда ли такая стратегия оптимальна при долгой игре ?

**Уметь терпение продолжать и уметь остановиться** Есть  $n$  точек  $x_1 < \dots < x_n$  на прямой. Игрок не глядя вытаскивает координату точки, но не знает какая она по счету. Ему надо выбрать максимальную координату. На каком то шаге ему надо сказать, что он выбирает именно эту координату. Пусть он действует так: фиксирует  $k$ , а после  $k$  шагов выбирает первую точку с координатой, большей всех предыдущих. Если таковой не будет, то выбирает максимум из первых выбранных  $k$  точек.

Подсчитаем вероятность  $P_k$ , что при этой стратегии он получит максимальную координату. Пусть  $P_k(m)$  - вероятность того, что среди выбранных сначала  $k$  точек самой правой будет  $x_m, m \geq k$ . Тогда

$$P_k = \sum_{m=k}^{n-1} P_k(m) \frac{1}{n-m} + P_k(n)$$

**Задача 9** Подсчитать с помощью формулы Стирлинга асимптотику  $P_k$ , если  $k = [\alpha n]$  и  $n \rightarrow \infty$  и узнать для каких  $\alpha$  достигается максимум этой вероятности. Прочитать главу 3 книги Дынкин, Юшкевич “Теоремы и задачи о процессах Маркова” и понять почему такой способ оптимален среди всех остальных.

**Поиск минимума - голь на выдумки хитра** Существует множество стохастических процедур поиска минимума функции  $U(x)$  на конечном множестве  $X$ . Функция  $U$  всегда в дальнейшем предполагается известной, то есть легко вычисляемой. От случайного перебора и простейшего градиентного спуска до сочетаний разных идей, улучшающих случайных перебор.

Одна из них, называемая **имитацией отжига** (simulated annealing), полезна, если у функции есть много локальных минимумов, в которых градиентный спуск может застрять навсегда. Пусть  $X$  - множество вершин некоторого графа  $G$ . Алгоритм поиска представляет собой конечную марковскую цепь с дискретным временем на  $X$ , неоднородную по времени. Именно, начальное состояние есть точка  $x_0$ . Если в момент  $t$  состояние  $x_t$ , то выбирается равновероятно один из ближайших соседей  $x'_t$ , и полагается  $x_{t+1} = x'_t$ , если  $U(x'_t) \leq U(x_t)$ , а если  $U(x'_t) > U(x_t)$ , то выбираем  $x_{t+1} = x'_t$  с вероятностью

$$p = \exp(-\beta_n(U(x'_t) - U(x_t)))$$

и  $x_{t+1} = x_t$  с вероятностью  $1 - p$ . Последовательность обратных температур  $\beta_n \rightarrow \infty$  называется **схемой охлаждения**. Для малых множеств скорость сходимости является очень быстрой, именно

$$P(x_n \notin E_{min}) \sim \left(\frac{K}{n}\right)^n$$

для схемы охлаждения  $\beta_n = \frac{R}{\log n}$ , см. [43]. Однако, если множество достаточно велико, то константа  $K$  естественно растет и для нее нет хороших оценок. Более того, все зависит конечно и от сложности энергетического ландшафта (понятие сложности никто не отменял), и ее трудно включить в оценки. Короче, математические модели здесь даже в постановках далеко отстают от практических задач.

То же самое можно сказать и об идеях, связанных с параллельными алгоритмами. Одна из идей в этом направлении - специфическое взаимодействие между параллельными процессорами (**генетические алгоритмы**, см. [41]), аналогичное мутациям и кроссинговеру ДНК, или более общим процедурам [42]. Здесь множество  $X$  параметризуется как множество слов большой длины. В начальный момент выбирается не слишком большое подмножество  $X_0 \subset X$ , каждое  $\alpha \in X_0$  порождает поиск минимума по определенному

алгоритму, например, градиентному спуску. Одновременно с этой процедурой происходит обмен информацией между случайно выбранными парами слов, например, два слова рвутся в случайных местах и происходит их рекомбинация слов:  $\alpha = \alpha_1\alpha_2$  и  $\beta = \beta_1\beta_2$  переходят в  $\alpha_1\beta_2$  и  $\beta_1\alpha_2$ .

### 3.2 Детерминизм на грубых шкалах

Рассмотрим однородное блуждание  $S_t, t = 0, 1, \dots$ , на решетке  $Z$  с вероятностями скачков

$$P(i \rightarrow i - 1) = q, P(i \rightarrow i + 1) = p$$

Закон больших чисел

$$\frac{S_t}{t} \rightarrow p - q$$

можно переписать иначе, если сделать скейлинг времени и координаты (изменить масштаб). **Скейлинг** измеряемой величины - это изменение единицы измерения. Если при этом одна из единиц в  $N \gg 1$  раз больше второй, то часто говорят о макро и микро единицах (или шкалах) соответственно. Например, скейлинг координаты и времени можно сделать двумя эквивалентными способами:

1) считать единицей микрошкалы 1, тогда единица макрошкалы состоит из  $N$  единиц микрошкалы, а в  $x$  единицах макрошкалы содержится  $xN$  единиц микрошкалы

$$t = \tau N, S = xN$$

где  $t, S$  - микропараметры,  $\tau, x$  - макропараметры. Для закона больших чисел, если ввести макровремя  $\tau$  и макрокоординату  $x$ , то в пределе будет

$$x = x(\tau) = v\tau + x(0), v = p - q$$

если в начальный момент мы были в точке  $S(0) = x(0)N$ . То есть в пределе мы получили детерминированное движение точки по прямой. Заметим, что скорость одинакова в обеих шкалах. Такой скейлинг иногда называют эйлеровым или жидкостным скейлингом.

2) можно также считать 1 единицей макрошкалы, тогда единица микрошкалы будет малое число  $\epsilon = \frac{1}{N}$ . Тогда за время  $\epsilon$  возможны скачки

$$P(i \rightarrow i - \epsilon) = q, P(i \rightarrow i + \epsilon) = p$$

а за микровремя  $t = \frac{\tau}{\epsilon}$  мы сдвигаемся в среднем на  $x = \epsilon vt = v\tau$ .

Как получить из случайных блужданий более сложное детерминированное движение со скоростью  $v = v(x)$ , зависящей от  $x$ ? Для этого рассмотрим блуждание на решетке  $Z_\epsilon$ , когда точка совершает за время  $\epsilon$  скачок вправо или влево с вероятностями  $p_{i,i+\epsilon} = p(i), p_{i,i-\epsilon} = 1 - p(i)$ , где  $0 \leq p(x) \leq 1$  - гладкая функция на  $R$ . Если в момент  $t = 0$  точка находилась в начале координат, то где она будет через число скачков  $\frac{\tau}{\epsilon}$ , то есть через макровремя  $\tau$ ? Обозначим это положение  $\xi(\frac{\tau}{\epsilon})$ . Утверждение состоит в том, что

$$E\xi\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right) \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} x(\tau)$$

где  $x(\tau)$  удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = v(x(\tau)) = 2p(x(\tau)) - 1$$

Действительно, так как  $p(x) \leq 1$ , то за малое макровремя  $\Delta\tau$  частица не может уйти на более чем  $\Delta\tau$ , то есть  $|x(\tau + \Delta\tau) - x(\tau)| \leq \Delta\tau$ . Поэтому в любой момент времени  $t$  на этом интервале

$$v(t) = v(x(\tau)) + o(\Delta\tau)$$

Отсюда и следует результат.

**Частица в случайной среде** Частица в момент  $t = 0$  находится в точке  $x = 0$  и имеет нулевую скорость. Затем она движется под влиянием внешней силы  $F(t)$ , направленной вправо согласно закону Ньютона

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t) \quad (14)$$

где  $m$  - масса частицы,  $v(t)$  - ее скорость. Кроме того, на прямой в случайных точках

$$0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$$

расположены препятствия, из-за которых импульс  $p = mv$  частицы получает постоянные отрицательные приращения  $-C\epsilon$ . Разности  $x_k - x_{k-1}$  считаются независимыми и одинаково распределенными, их плотность постоянна и равна  $\rho\epsilon^{-1}$ . Поэтому за малый промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$  импульс частицы получит приращение

$$\Delta p = F(t)\Delta t - v(t)\Delta t\rho\epsilon^{-1}C\epsilon + o(\Delta t) + o(\epsilon)\Delta t$$

При  $\epsilon \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  отсюда следует **уравнение Ньютона с трением**

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t) - Av$$

При этом  $Av, A = \rho C$ , называется вязким сопротивлением.

**Упр. 62** Доказать это со всей строгостью.

**Индукцированная цепь** Обычно вероятностный процесс не есть такое “гладкое” блуждание на прямой или в пространстве, иначе говоря функция  $p(i)$  осложнена разрывами, например на границе области, в которой частица блуждает. Рассмотрим, например, блуждание в дискретной полосе

$$\{(i, j), i \in Z, j \in \{0, 1, \dots, N\}\} = Z \times \{0, 1, \dots, N\}$$

то есть на декартовом произведении одномерной решетки и конечного множества. Пусть вероятности скачков за один шаг  $p_k(j, j_1) = p((i, j) \rightarrow (i + k, j_1))$  однородны и ограничены по первой координате, то есть не зависят от  $i$ , и равны нулю при  $|k| > k_0$ . Эта цепь Маркова состоит из двух компонент  $(i(t), j(t))$ , при этом конечно ни  $i(t)$  ни  $j(t)$  по отдельности не являются цепями Маркова.

Мы хотим доказать, что при  $t \rightarrow \infty$

$$\frac{Ei(t)}{t} \rightarrow v \quad (15)$$

и найти эту скорость  $v$ . Рассмотрим конечную цепь Маркова на  $\{0, 1, \dots, N\}$  с вероятностями скачков

$$q(j \rightarrow j_1) = \sum_k p((i, j) \rightarrow (i + k, j_1))$$



Она уже является цепью Маркова (по определению) и называется **индуцированной цепью**. Предполагая все  $q(j \rightarrow j_1)$  положительными, мы видим что распределение  $p_t(j)$  на индуцированной цепи сходится к стационарному  $\pi(j)$  с экспоненциальной скоростью.

Введем очень важное понятие **условного математического ожидания**  $E(\xi|\eta) = E(\xi|\eta = j)$  одной случайной величины  $\xi$  относительно другой  $\eta$ . Это функция на множестве значений величины  $\eta$ , равная среднему значению  $\xi$  по условной вероятностной мере, при условии, что  $\eta = j$ , то есть

$$E(\xi|\eta = j) = \sum_k kP(\xi = k|\eta = j)$$

Тогда

$$E\xi = \sum_j E(\xi|\eta = j)P(\eta = j)$$

Имеем при  $t \rightarrow \infty$

$$Ei(t) = \sum_{s < t} E(i(s+1) - i(s)) = \sum_{s < t} \sum_j E(i(s+1) - i(s)|j(s) = j)P(j(s) = j)$$

Но

$$\sum_j E(i(s+1) - i(s)|j(s) = j)P(j(s) = j) = \sum_k \sum_j kp_k(j)P(j(s) = j) \rightarrow v = \sum_{k,j} kp_k(j)\pi(j)$$

причем с экспоненциальной скоростью.

**Блуждание в полуплоскости** Рассмотрим полуплоскость  $Z \times Z_+ = \{(k, l) : l \geq 0\}$ . Из внутренних точек полуплоскости, то есть из точек вида  $(k, l), l > 0$ , частица может совершить скачок в любую из четырех точек  $(k+i, l+j) = (k+1, l), (k-1, l), (k, l+1), (k, l-1)$  с вероятностями  $p_{ij}$  соответственно. Вектор среднего скачка (**снос**) определяется как

$$m_0 = (m_{01}, m_{02}) = \left( \sum_{i,j} ip_{ij}, \sum_{i,j} jp_{ij} \right)$$

Предположим, что  $m_0$  смотрит по направлению к границе, то есть  $m_{02} < 0$ . Из точек границы  $(k, 0)$  скачок может быть в любую из трех точек  $(k+i, j) = (k+1, 0), (k-1, 0), (k, 1)$  с вероятностями  $q_{ij}$  соответственно. Вектор среднего скачка из точек границы определяется как

$$m_1 = (m_{11}, m_{12}) = \left( \sum_{i,j} iq_{ij}, \sum_{i,j} jq_{ij} \right)$$

Мы покажем, что при скейлинге движение будет состоять из двух прямолинейных участков.

**Движение к границе** Пусть в начальный момент частица находится вдали от границы, именно в точке  $(0, N)$ . Обозначим  $\tau_0$  первый момент достижения границы. Мы хотим доказать, что

$$\frac{\tau_0}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{m_{02}}$$

То есть на макрошкале частица движется с постоянной скоростью до столкновения с границей. Действительно, сначала точка будет двигаться по закону больших чисел, так как в течение времени  $t < N$  она никак не сможет достичь оси  $j = 0$ . Затем вероятность достижения границы будет расти, и мы должны показать, что отклонение от прямолинейного движения не очень велики. Мы сделаем это в несколько более общем виде.

**Экспоненциальные оценки для мартингалов** Рассмотрим однородное случайное блуждание  $S_t, t = 0, 1, \dots$ , на решетке  $Z$  с  $S_0 = 0$  и со скачками  $p = q = \frac{1}{2}$ . Покажем, что вероятность за  $N$  шагов хоть раз выйти из  $\delta N$ -окрестности нуля экспоненциально мала. Это следует из общего результата об экспоненциальных оценках для **мартингалов**. Последовательность случайных величин  $S_0 = 0, S_1, \dots$  - мартингал, если почти наверное

$$E(S_{n+1}|S_n, \dots, S_0) = S_n$$

или, обозначая  $\xi_k = S_k - S_{k-1}$ ,

$$E(\xi_{n+1}|\xi_n, \dots, \xi_1) = 0$$

то есть независимость не предполагается. Тогда если  $|S_{n+1} - S_n|$  равномерно ограничены, то для любого  $\delta > 0$  существует  $\epsilon > 0$  такое, что имеет место экспоненциальная оценка

$$P(|S_n| > \delta n) < \exp(-\epsilon n)$$

Доказательство в одну строчку. Для достаточно малых  $h > 0$

$$\begin{aligned} P(|S_n| > \delta n) &\leq \exp(-\delta hn)E(hS_n) \leq \exp(-\delta hn)E(hS_{n-1})E(\exp(h\xi_n)|\xi_{n-1}, \dots, \xi_1) \leq \\ &\leq \exp(-\delta hn)E(hS_{n-1})E(1 + h\xi_n + h\xi_n^2|\xi_{n-1}, \dots, \xi_1) = \exp(-\delta hn)E(hS_{n-1})(1 + O(h^2)) \leq \\ &\leq \exp(-\delta hn)(1 + O(h^2))^n \leq \exp(-\frac{1}{2}\delta hn) \end{aligned}$$

Отсюда и из равномерной ограниченности вытекает экспоненциальная оценка

$$P(\max_{i=1, \dots, n} |S_i| > \delta n) \leq \exp(-\delta' n) \quad (16)$$

**Движение вдоль границы** Пусть в момент  $t = 0$  частица находится на границе или вблизи от нее. Тогда, как и для полосы, можно ввести индуцированную цепь на полуоси  $Z_+$ , на которой экспоненциально быстро установится стационарное распределение по второй координате  $j$ , обозначим его  $\pi_j$ . Нам понадобится только  $\pi_0$ . Тогда для больших  $t$

$$i(t) \sim t(\pi_0 m_{11} + (1 - \pi_0)m_{01})$$

Факт экспоненциальной сходимости нетрудно интуитивно понять. Прежде всего, вероятность отойти от нуля на расстояние  $d$  не превосходит  $e^{-\delta d}$ , так как снос направлен к нулю (оценки, аналогичные (16)). В то же время вблизи от нуля цепь ведет себя как конечная цепь Маркова, где есть экспоненциальные оценки сходимости.

**Упр. 63** Получить точное доказательство или посмотреть его в [21].

Существует общая теория сведения блужданий в многомерных областях с границей к динамическим системам, см. [22].

**Детерминистическая аппроксимация в стохастическом управлении** Рассмотрим блуждание на  $Z^2$ . Пусть есть два управления. Иначе говоря, два типа скачков  $p_{IJ}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , и значит два возможных средних вектора скачков  $(m_{11}, m_{12}), (m_{21}, m_{22})$ , причем

$$m_{11} > m_{12} > 0, 0 < m_{21} < m_{22}$$

Пусть в момент 0 частица в точке  $(0, 0)$ . Мы скажем, то из этой точки за макровремя  $\tau$  мы пришли в точку  $(1, 1)$ , если

$$\lim \frac{(i(\tau N), j(\tau N))}{N} = (1, 1)$$

Как выгоднее придти в макроточку  $(1, 1)$ , то есть в макроокрестность точки  $(N, N)$  при  $N \rightarrow \infty$ , если можно выбирать план скачков  $k(t)$  заранее, но за каждое переключение надо платить ?

Оказывается есть ровно два симметричных способа с одним единственным переключением. В первом способе надо сделать сначала  $aN$  шагов с матрицей переходов  $p_{IJ}^{(1)}$ , а потом  $bN$  шагов с матрицей переходов  $p_{IJ}^{(2)}$ , причем должно быть

$$a(m_{11}, m_{12}) + b(m_{21}, m_{22}) = (1, 1)$$

Второй способ - наоборот.

**Произведение случайных матриц** Вероятность на алгебраических структурах развивается уже довольно давно, см. например [38]. Центральное место в этой теории занимает изучение произведений  $g_n \dots g_1$  независимых одинаково распределенных случайных матриц  $g_i$ . Как ведет себя асимптотически норма вектора  $x_n = g_n \dots g_1 x_0$ ? Мы дадим интуитивную картину, однако для ее обоснования не надо новых идей. Основное замечание состоит в том, что радиальные проекции векторов  $r(x_n) = \frac{x_n}{\|x_n\|}$  на единичную сферу образуют цепь Маркова (аналог индуцированной цепи), ввиду линейности действия матрицы на вектор. Если распределение  $g_i$  имеет плотность, то, ввиду компактности сферы, эта цепь Маркова эргодична. Поэтому  $\log \frac{\|x_n\|}{\|x_0\|}$  есть сумма функций на цепи Маркова. По эргодической теореме (сходимость к инвариантной мере)  $\frac{1}{n} \log \frac{\|x_n\|}{\|x_0\|}$  имеет предел  $\lambda_1$ . Из эргодичности следует, что они не зависят от  $x_0$ , и что существует предел норм матриц

$$\lim \frac{1}{n} \log \|g_n \dots g_1\| = \lambda_1$$

называемый максимальным **показателем Ляпунова**. Если бы матрицы были одинаковы и неслучайны, то он совпадал бы с их максимальным собственным значением.

### 3.3 Условные меры для маловероятных событий

**Условные меры** Пусть в квадрате  $[0, 1]^2$  задано множество  $A$ . В квадрат бросается точка с плотностью  $p(x, y)$ , то есть вероятность попасть в множество  $A$  равна

$$P(A) = \int_A p(x, y) dx dy$$

Как определить условную вероятность  $P(A|x)$  того, что точка попала в  $A$ , если известно, что первая координата этой точки равна  $x$ . Эта условная вероятность называется еще

условным математическим ожиданием случайной величины - индикатора множества  $A$  при заданном значении другой случайной величины - первой координаты брошенной точки. Последнее событие невероятно, имеет меру 0. Поэтому надо специально определять это понятие. Есть два определения.

Одно естественное, но его надо давать особо в каждом конкретном случае: обозначим  $L = L(x, \delta)$  вертикальную полосу шириной  $\delta$  и высотой 1 с центром в точке  $(x, 0)$ . Тогда определение таково

$$P(A|x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{\int_{A \cap [0,1]} p(x, y) dy}{\int_{[0,1]} p(x, y) dy}$$

Второе менее естественное, но более универсальное. Рассмотрим две меры на отрезке  $[0, 1]$ . Первая мера - мера Лебега  $\lambda$  - определяет вероятность  $\lambda(B)$  того, что координата первой точки принадлежит множеству  $B$ . Вторая мера  $\mu_A(B)$  на этом же отрезке равна мере Лебега множества  $(B \times [0, 1]) \cap A \subset [0, 1]^2$ . Мера  $\mu_A$  **абсолютно непрерывна** относительно меры  $\lambda$ . Это значит, что если  $\lambda(B) = 0$ , то и  $\mu_A(B) = 0$ . Тогда (**теорема Радона-Никодима**) существует единственная функция  $f_A(x)$  что

$$\mu_A(B) = \int_0^1 f_A(x) \lambda(dx)$$

Функция  $f_A(x)$  называется производной меры  $\mu_A$  по мере  $\lambda$  и обозначается

$$f_A = \frac{d\mu_A}{d\lambda}$$

Как правило, в наиболее интересных случаях (предельные гиббсовские меры), если есть две меры  $\mu$  и  $\nu$ , и  $\mu$  **сингулярна** (то есть не является абсолютно непрерывной) относительно  $\nu$ , то и  $\nu$  сингулярна относительно  $\mu$ .

## Броуновский мост

**Упр. 64** Доказать, что условные конечномерные распределения винеровского процесса  $w(t), w(0) = 0$ , на интервале  $(0, 1)$  при условии что  $w(1) = a$ , совпадают с соответствующими конечномерными распределениями (безусловными или условными при условии  $B(1) = 0$ ) процесса

$$B(t) = w(t) - t(w(1) - a)$$

называемого броуновский мост.

**Маловероятные пути блужданий** Какова вероятность того, что на интервале времени  $[0, \tau N]$  оно будет двигаться (в том же скейлинге) близко к другой непрерывной кривой  $\phi(\tau)$ ? Как нетрудно понять - эта вероятность будет экспоненциально мала (см. экспоненциальные оценки предыдущей лекции), но задача состоит в явном вычислении экспоненциального множителя, или асимптотики  $L_\tau(\phi)N$  логарифма этой вероятности, где  $L_\tau(\phi)$  - некоторый функционал на множестве непрерывных кривых, называемый **функционалом действия**. Перейдем к точным формулировкам в самом простом случае, когда  $\phi(\tau)$  линейная функция  $\phi(\tau) = v\tau$ .

Будем говорить, что блуждание удовлетворяет принципу больших уклонений (для функции  $v\tau$ ) с функционалом действия  $L_\tau(v)$ , если

$$\ln P(A_{[\tau N], \delta}) \sim L_\tau(v)N \tag{17}$$

где

$$A_{[\tau N], \delta} = \left\{ \sup_{t=0,1,\dots, [\tau N]} |S_t - vt| < \delta N \right\}$$

Идея доказательства состоит в том, чтобы изменить вероятности скачков  $\frac{1}{2}$  на

$$p^\lambda = \frac{e^\lambda}{e^\lambda + e^{-\lambda}}, q^\lambda = \frac{e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}}$$

так, чтобы  $S_t - vt$  имело нулевые средние (а в общем случае стало мартингалом) для нового блуждания. Именно, выберем единственное решение  $\lambda = \lambda(v) > 0$  уравнения

$$\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}} = v \quad (18)$$

Тогда верна формула **замены меры**: вероятности по мере  $P_0 = P$  представляются через средние по новой бернуллиевской мере  $P_\lambda$

$$P(A_{[\tau N], \delta}) = E_\lambda[I(A_{[\tau N], \delta}) \exp(-\lambda S_{[N\tau]} + [N\tau]h(\lambda))], h(\lambda) = \log(e^\lambda + e^{-\lambda})$$

$$P(A_{[\tau N], \delta}) = \exp(-\lambda[N\tau]v + [N\tau]h(\lambda)) E_\lambda[I(A_{[\tau N], \delta}) \exp((\lambda[N\tau]v - \lambda S_{[N\tau]})]$$

где  $I(A_{[\tau N], \delta})$  - индикатор события  $A_{[\tau N], \delta}$ . Действительно, вероятности произвольного пути  $\Gamma$  длины  $[N\tau]$  равны

$$P_0(\Gamma) = \frac{1}{2^{[N\tau]}}, P_\lambda(\Gamma) = \frac{e^{\lambda S_{[N\tau]}}}{(e^\lambda + e^{-\lambda})^{[N\tau]}}$$

Доказательство (17) с функционалом действия  $L_\tau(v) = \tau(-v\lambda(v) + h(\lambda(v)))$  следует из оценок

$$E_\lambda I(A_{N\delta}) \exp(-|\lambda|\delta N) \leq P(A_{N\delta}) \leq E_\lambda [I(A_{N\delta}) \exp(|\lambda|\delta N)]$$

В обобщениях основной вопрос - как сделать замену меры. Для двумерных блужданий в углах эта работа проделана в [16], где видно какие сложности возникают. Все они ведут в общую теорию о связи блужданий в многомерных областях с границами и динамических систем [22].

**Связь с методом перевала** Помимо приведенной вероятностной техники и прямого использования формулы Стирлинга в лекции 4 для получения асимптотики больших уклонов, очень информативен метод, использующий элементы теории функций комплексного переменного. Именно, стандартное представление коэффициентов производящей функции через интеграл Коши дает

$$P\{S_n = [vn]\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^{[vn]+1}} E z^S dz$$

Подынтегральную функцию можно переписать в виде

$$\exp(n(h(\lambda) - v\lambda)) \exp(-\lambda + \epsilon_n)$$

где

$$E z^S = (E \exp(\lambda \xi))^n = e^{nh(\lambda)}, z = e^\lambda, \epsilon_n = -[an] + \alpha n$$

Надо теперь сдвинуть контур так, чтобы он пересекал положительную полуось в критической точке, то есть где производная экспоненты равна нулю, то есть

$$h'(\lambda) = v$$

что совпадает с (18). Функция  $h(\lambda) = \ln \text{Exp}(\lambda\xi)$  является вещественно аналитической и выпуклой на вещественной оси с минимумом в нуле, откуда следует единственность критической точки. Поэтому, по стандартным результатам для метода перевала, мы получаем ту же асимптотику для логарифма вероятности, что и выше.

### 3.4 Диффузия

Марковские процессы с дискретным или непрерывным временем и произвольным пространством  $X$  состояний строятся с помощью системы условных мер  $P(t; x, A)$ , то есть условных вероятностей быть в момент  $t + s$  в множестве  $A$ , если в момент  $s$  мы были в точке  $x$ . Если все эти меры абсолютно непрерывны относительно некоторой одной меры  $d\lambda$  (часто это мера Лебега  $dx$ ) на пространстве  $X$ , то такой процесс называется регулярным, в противном случае **сингулярным**. В регулярном случае можно говорить о семействе условных плотностей  $p(t; x, y) \geq 0$  таких что

$$P(t; x, A) = \int_A p(t; x, y) dy$$

При этом требуется марковское свойство, то есть для всех  $t, s, x, y$  уравнения

$$p(t + s; x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t; x, y) p(s; y, z) dy$$

Они называются часто уравнениями Чэпмена-Колмогорова или Фоккера-Планка. Если  $p(t; x, y) = p(t; y - x)$  зависят только от разности, то говорят о процессе с независимыми приращениями. Марковость определяет операторы на пространстве мер

$$(U^t \mu)(A) = \int_R \mu(dx) \left[ \int_A p(t; x, y) dy \right]$$

и на пространстве функций

$$(U_*^t f)(x) = \int p(t; x, y) f(y) dy$$

Для малых систем основные исследуемые процессы регулярны, для больших (точнее бесконечно-частичных) как правило сингулярны. Основная часть регулярных процессов составляют диффузионные процессы. Исследование подобных процессов является частью науки, называемой стохастический анализ. Среди развитой в нем техники центральной местом в нем является идея диффузии. Здесь мы изложим логическую схему и основные приемы построения диффузионных процессов, надеясь что читатель восполнит выкладки сам или посмотрит в другие книги. План изложения следующий: сначала мы напомним как винеровский процесс получается из диффузионного скейлинга. Затем мы будем строить функции от него: сначала в виде стохастического интеграла, затем как решения стохастических дифференциальных уравнений. И наконец мы докажем, что решения последних уравнений являются марковскими процессами и выведем прямые и обратные уравнения для них.

**Диффузионный скейлинг** Если  $p = q = \frac{1}{2}$  то закон больших чисел говорит, что  $\frac{S_t}{\sqrt{N}} \rightarrow 0$ . Для более интересного результата надо выбрать более тонкую (диффузионную) шкалу

$$\frac{S_t}{\sqrt{N}} = x_t, t = N\tau$$

Формальный подсчет особенно прост для однородного блуждания. Рассмотрим блуждание на решетке с шагом  $\epsilon$  и с гладкой начальной плотностью  $\rho_0(y)$ , ограниченной на решетку,

$$\rho_{t+\delta}(i) = \rho_t(i - \epsilon)\frac{1}{2} + \rho_t(i + \epsilon)\frac{1}{2} = \rho_t(i) + \frac{1}{2}\frac{d^2\rho_t(i)}{dx^2}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

где мы разложили правую часть с точностью до  $o(\epsilon^2)$ . При  $\epsilon \rightarrow 0$  формальный предел дает уравнение для эволюции плотности во времени

$$\rho_t(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2\rho_t(x)}{dx^2}$$

решением которого является

$$\rho_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\tau}\right)\rho_0(y)dy$$

Другой способ исходит из предела характеристических функций  $S_t$ , который мы уже считали. Далее можно воспользоваться формулой обращения. Мы хотим восстановить вероятности  $P(a < \xi < b)$  или, более общо, средние другой функции  $g(\xi)$ , надо применить обратное преобразование Фурье

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{g}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

что даст

$$Eg(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{g}(\lambda)Ee^{i\lambda S}d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{g}(\lambda)f_S(\lambda)d\lambda$$

**Стохастические интегралы** Далее  $w(t)$  - стандартный винеровский процесс. Мы определим два вида стохастических интегралов от случайных функций  $f(t)$

$$\int_0^t f(s)ds = \lim S_n^{(1)}, S_n^{(1)} = \lim \sum f(t_{n,k})(t_{n,k+1} - t_{n,k}) \quad (19)$$

$$\int_0^t f(s)dw(s) = \lim S_n^{(2)}, S_n^{(2)} = \lim \sum f(t_{n,k})(w_{n,k+1} - w_{n,k}) \quad (20)$$

где пределы берутся по разбиениям интервала  $[0, t]$  таким, что

$$\max |t_{n,k+1} - t_{n,k}| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

понимается по распределению. Например, это могут быть функции вида  $f(t) = F(t, w(t))$ . Полезно для примера посчитать какой-нибудь интеграл, например,

$$\int_0^t w(s)dw(s) = \lim \sum w(t_{n,k})(w_{n,k+1} - w_{n,k}) = \frac{1}{2}(w^2(t) - w^2(0)) - \quad (21)$$

$$-\frac{1}{2} \lim \sum (w_{n,k+1} - w_{n,k})^2 = \frac{1}{2}(w^2(t) - w^2(0)) - \frac{1}{2}t$$

**Основной постулат:** всегда будет предполагаться, что  $(w_{n,k+1} - w_{n,k})$  независимы от всех случайных величин  $f(t)$  при  $t \in [0, t_{n,k}]$ . Обычно эта независимость постулируется на языке  $\sigma$ -алгебр, но мы намеренно этого не делаем, подчеркивая алгоритмическую алгебраичность всех дальнейших вычислений. При ВСЕХ дальнейших операциях (подстановки в функции, взятие стохастических интегралов, предельные переходы, решение стохастических уравнений) это свойство независимости будет сохраняться.

Стохастические интегралы проще всего понять на уровне сходимости моментов. Так, моменты от (19) (да и сам интеграл) сходятся ввиду непрерывности траекторий винеровского процесса. Что касается интеграла (20), среднее от него равно тождественно нулю. От второго момента остается выражение

$$E \sum f^2(t_{n,k})(w_{n,k+1} - w_{n,k})^2 = \sum E f^2(t_{n,k})(t_{n,k+1} - t_{n,k})$$

которое также сходится. Аналогично можно доказать сходимость остальных моментов, но проще доказывать сходимость в смысле  $L_2$ -нормы, то есть

$$E(S_n^{(2)} - S_m^{(2)})^2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty, m > n} 0$$

Если для некоторых случайных функций  $a(s), b(s)$  (в тех же предположениях о независимости) для всех  $0 \leq t \leq T$

$$\xi(t) = \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw(s)$$

то будем условно писать

$$d\xi(t) = a(s)ds + b(s)dw(s)$$

Так введенный **стохастический дифференциал** линеен, но формула дифференцирования произведения и сложной функции отличается от обычной. Основным утверждением является следующая теорема.

**Theorem 5** (*Формула Ито*)

$$dF(t, w(t)) = F'_t(t, w(t))dt + \frac{1}{2}F''_{xx}(t, w(t))dt + F'_x(t, w(t))dw(t)$$

Полного доказательства мы привести здесь не сможем [19], но это тот самый случай, когда сразу ясно по какому пути идти. Надо начать с частных случаев. Случай  $F(t)$  очевиден, случай  $F(w(t))$  мы уже сделали для  $F = w^2$ , см. (21). А для любого многочлена это не очевидное, но простое упражнение. Далее надо рассмотреть произведение  $F(t, w) = f(t)g(w)$ , причем сначала, опять же, самые простые случаи. Возможность приближения многочленами завершает доказательство для достаточно гладких функций.

**Стохастические дифференциальные уравнения** Формально уравнение имеет вид

$$d\eta(t) = a(t, \eta(t))dt + b(t, \eta(t))dw(t) \quad (22)$$

с инфинитезимальными коэффициентами сноса  $a(t, x)$  и диффузии  $b(t, x)$ . Неформальное решение этого уравнения можно понимать как предел решения соответствующего интегрального уравнения

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t a(s, \eta(s))ds + \int_0^t b(s, \eta(s))dw(s)$$



где начальное значение  $\eta(0)$  необходимо считать независимым от  $w(t)$ . методом итераций. Именно

$$\eta_n(t) = \eta(0) + \int_0^t a(s, \eta_{n-1}(s)) ds + \int_0^t b(s, \eta_{n-1}(s)) dw(s)$$

Но еще лучше как явный ряд

$$\eta(t) = \eta(0) + \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_n(t) - \eta_{n-1}(t))$$

По индукции очевидно, что основной постулат о независимости выполнен для всех  $t, \eta_n(t)$ , а значит и для предела, если он существует. Доказательство сходимости стандартно (как и для обыкновенных дифференциальных уравнений). Полагая  $\Delta_n(t) = \eta_n(t) - \eta_{n-1}(t)$ , имеем

$$E\Delta_n^2(t) \leq \text{const} \int_0^t E\Delta_{n-1}^2(s) ds \leq \dots \leq \frac{C^n}{n!}$$

для некоторой константы  $C > 0$ .

**Полугруппы и диффузионные процессы** Марковость процесса  $\eta(t)$  почти очевидна, ввиду локальности и первого порядка уравнения (22):  $\eta(t)$  есть решение уравнения (22) на интервале  $[s, t]$ ,  $s < t$ , с заданным  $\eta(s)$ .

Мы хотим найти уравнение для переходной плотности и генератор полугруппы, который действует на дважды дифференцируемые функции  $f$ . Для этого надо доказать выполнение следующих условий: для любого  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{|y-x|>\epsilon} p(t; x, y) dy &= o(t) \\ \int_{|y-x|<\epsilon} (y-x)p(t; x, y) dy &= a(x)t + o(t) \\ \int_{|y-x|<\epsilon} (y-x)^2 p(t; x, y) dy &= b(x)t + o(t) \end{aligned}$$

Эти три условия являются определением **диффузионного процесса**,

**Упр. 65** Проверить, что процесс  $a(t) + \sigma(t)w(t)$ , где  $a(t), \sigma(t)$  - достаточно гладкие функции, является диффузионным. Для каких функций  $A(x)$  процесс  $A(\eta(t))$  будет диффузионным, если  $\eta(t)$  - диффузионный процесс.

Разлагая

$$f(y) - f(x) = \frac{df}{dx}(y-x) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(y-x)^2 + \alpha(y-x)^2$$

где  $\alpha$  малое число; и ограничиваясь интегралом по окрестности  $|y-x| < \epsilon$  получим

$$(U^{\Delta t} f)(x) - f(x) = \int p(\Delta t, x, y) (f(y) - f(x)) = a(x) \frac{df}{dx} \Delta t + \frac{1}{2} b(x) \frac{d^2f}{dx^2} \Delta t + \alpha \Delta t \sup b + o(\Delta t)$$

Интеграл по  $|y-x| > \epsilon$  оценивается аналогично. Деля на  $t$ , в пределе  $t \rightarrow 0$  получаем уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

### 3.5 Уход в бесконечность

На примере счетных цепей с дискретным временем обсудим глобальное (на всем промежутке времени) поведение траекторий для регулярных цепей Маркова. Цепь называется регулярной, если переходные меры  $P(A|x)$  для разных  $x$  абсолютно непрерывны относительно фиксированной меры на пространстве состояний, для счетных цепей это мера, равная единице в каждой точке. Прежде всего, всегда можно ограничиться случаем неприводимости и непериодичности: мы будем предполагать, что для любых состояний  $x, y$  существует путь  $\Gamma_{xy}$  из  $x$  в  $y$  положительной вероятности, причем наименьшее общее кратное длин всех таких путей равно 1. Последнего всегда можно достичь, добавляя переход  $p_{ii} > 0$  для некоторого  $i$ .

**Взрывы** Можно ли уйти в бесконечность за конечное время (как говорят, может ли произойти взрыв) он может уйти в бесконечность. Это проще пояснить с для непрерывного времени. Ситуация здесь вполне аналогична уходу в бесконечность для дифференциальных уравнений и достаточно простого примера. Рассмотрим марковскую цепь  $\xi(t)$  с непрерывным временем, множеством состояний  $Z_+$  и интенсивностями переходов  $\lambda_n = n^a$  из  $n$  в  $n + 1$ . Пусть  $\xi(0) = 1$ . Самое простое объяснение таково: среднее время перейти из  $n$  в  $n + 1$  равно  $n^{-a}$ . Значит среднее время  $\tau_0$  уйти из 0 в  $\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} < \infty$$

при  $a > 1$ . При желании можно найти это точно из рекуррентного уравнения для  $\tau_n$ .

**Классификация - среднее время и вероятность возвращения** Основное, и очень общее, утверждение в теории цепей Маркова на счетных множествах - очень простая их классификация. Надо еще раз отметить, что аналогичные утверждения можно сформулировать для общих регулярных цепей (но никак не для сингулярных).

**Theorem 6** Любая цепь либо возвратна либо невозвратна. Цепь **возвратна** если имеет место одно из следующих эквивалентных условий:

- для любых двух состояний  $i, j$  вероятность попасть когда-либо из  $i$  в  $j$   $Q_{ij} < 1$
- для некоторых  $i, j$  вероятность попасть когда-либо из  $i$  в  $j$   $Q_{ij} < 1$

В противном случае, то есть когда для всех  $i, j$   $Q_{ij} < 1$ , цепь называется **невозвратной** или **транзитной**.

Для любой возвратной цепь среднее время  $m_{ij}$  достижения  $j$  выйдя из  $i$  либо конечно для всех  $i, j$  либо бесконечно для всех  $i, j$ . В первом случае цепь называется **положительной возвратной** или **эргодической**, во втором **нулевой возвратной**.

В последнем случае существует стационарное распределение  $\pi$ . Именно, пусть  $\tau_{ii}$  - случайный первый момент, выйдя из  $i$ , вернуться в  $i$ . Тогда

$$\pi_i = \frac{1}{E\tau_{ii}}$$

Интуитивное доказательство очень простое. Рассмотрим траектории достаточно большой длины  $N$ , выходящие из  $i$ . Число попаданий в  $i$  асимптотически равно  $\pi_i N$ , по определению  $\pi$ . С другой, оно вычисляется через средние времена возвращений как  $\frac{N}{E\tau_{ii}}$ .

**Упр. 66** Воспользовавшись рекуррентными формулами в лекции о случайных блужданиях, показать, что для однородного блуждания с дискретным временем на  $Z_+$  цепь будет транзитивной, нулевой возвратной и эргодической соответственно для  $p > q, p = q, p < q$ .

Есть много конструктивных критериев классификации, в том числе необходимых и достаточных, но как правило общие критерии неконструктивны. Так задача конструктивной классификации блужданий в неограниченных областях размерности  $d$  тесно связана с эргодической теорией кусочно гладких динамических систем в размерности  $d - 2$ , см. [22]. Простейшие геометрически наглядные критерии эргодичности используют так называемые **функции Ляпунова**. Рассмотрим блуждание в  $Z^d$  с вероятностями скачков  $p_{xy}$  из  $x$  в  $y$ , причем  $p_{xy} = 0$  если  $|x - y| > D$  для некоторого  $D > 0$ : Пусть существует  $\epsilon > 0$  и вещественная функция  $f(x) > 0$  такая, что для всех  $x$  с нормой большей некоторого  $A > 0$  среднее ее приращение за один шаг

$$\sum_y p_{xy} f(y) - f(x) < -\epsilon$$

то цепь эргодична. Эту функцию, вернее ее линии уровня, часто легко построить по полю векторов среднего сноса

$$m_x = \sum_y p_{xy} (y - x)$$

Для этого вектора сноса должны смотреть в сторону меньших значений функции и углы  $\phi(x)$  между ними и касательными к линиям уровня в соответствующих точках  $x$  должны лежать в диапазоне  $\delta < \phi(x) < \pi - \delta$ , см. [21].

**Теория потенциала** Теперь мы обсудим по каким путям осуществляется уход в бесконечность. Для транзитивной цепи рассмотрим функцию Грина, то есть матрицу средних чисел попаданий в  $y$  выйдя из  $x$

$$G(x, y) = 1 + P + P^2 + \dots$$

**Потенциалом** вещественной функции  $f(x)$  называется функция  $\sum_y G(x, y) f(y)$ . Его можно интерпретировать как в электростатике: поле, создаваемое в точке  $x$  распределенным зарядом  $f(x)$ . Это особенно естественно для простого симметрического блуждания на  $Z^3$ , где оператор  $P$  связан с оператором Лапласа (на решетке)

$$(-\Delta f)(x) = ((1 - P)f)(x) = f(x) - \frac{1}{2d} \sum_{|e|=1} f(x + e) = E_x f(S_1) - f(S_0)$$

где последнее равенство показывает его связь со случайным блужданием  $S_n$ , выходящим из точки  $S_0 = x$ . Потенциал при этом совпадает с кулоновским (если шаг решетки стремится к нулю). Можно интерпретировать также как суммарный средний доход от блуждания, если каждый раз при попадании в точку  $y$  получаем доход  $f(y)$ .

Решение задачи Дирихле в конечной области  $\Lambda$  с границей  $\partial\Lambda$  (множество точек на расстоянии 1 от  $\Lambda$ ) и заданной функцией  $u(x)$  на  $\partial\Lambda$

$$(1 - P)g = f, g|_{\partial\Lambda} = u$$

связано с тем, как траектория выходит на границу и имеет вид

$$f(x) = E_x[u(S_\tau) + \sum_{j=0}^{\tau} g(S_j)], \tau = \inf\{j \geq 0 : S_j \notin \Lambda\}$$

В частности, функция  $f$  называется **гармонической**, если  $f = Pf$ .

**Финальные события и граница Мартина** Финальным событием процесса  $\eta_t$  называется событие, которое не зависит от поведения процесса на любом ограниченном отрезке времени. Примерами могут быть события  $I(A)$  - траектория содержится в множестве  $A$  начиная с некоторого момента. Финальные события образуют сигма-алгебру  $\Sigma_{final}$ . Наглядное описание финальных событий дает теорема Блэкуэлла (Blackwell):  $\Sigma_{final}$  порождается событиями вида  $I(A)$ . Однако, часто удобнее пользоваться соответствием между  $\Sigma_{final}$  и ограниченными гармоническими функциями. Действительно, пусть  $\xi$  ограничена и измерима относительно  $\Sigma_{final}$ . Тогда ее среднее  $f(x) = E_x \xi$  по мере блуждания, вышедшего из точки  $x$ , удовлетворяет уравнению  $f = Pf$ . Обратно, пусть  $f(x)$  - ограниченная гармоническая функция. Тогда  $f(\eta_t)$  - ограниченный мартингал и значит имеет предел  $\xi$ , который является финальной случайной величиной.

Рассмотрим блуждание на  $Z$ , однородное на каждой полуоси, но сносы направлены в  $\infty$  в точках  $x > 0$ , и в  $-\infty$  в точках  $x < 0$ . С вероятностью 1 точка уйдет в  $\infty$  или в  $-\infty$ . Это два разных финальных события.

**Упр. 67** Доказать, что других финальных событий нет, найдя все ограниченные гармонические функции.

Тонкое финальное поведение классифицируется по отношению потенциалов

$$K(i; j) = \frac{G(i, j)}{G(0, j)}$$

где 0 - некоторое выделенное состояние. Топология Мартина на пространстве состояний  $S$  определяется так: последовательность состояний  $j_n$  является последовательностью Коши, если  $K(i; j_n)$  есть последовательность Коши для всех  $i$ . Пополнение  $S$  по этой топологии обозначим  $S^*$ . Тогда (выходной) границей Мартина называется  $S^* \setminus S$ . Один из основных результатов этой теории: для любой начальной точки процесс сходится почти наверное к некоторой точке границы Мартина, но может сходиться не к любой точке, а только к так называемым крайним точкам, см. [26].

## 4 Макро и микро шкалы для больших систем

### 4.1 Равновесные распределения

#### 4.1.1 Идеальный газ

Идеальный газ - простейший пример системы из большого числа частиц. В кубе  $\Lambda \subset R^d$  находится конечное число  $N$  частиц, каждая из которых определяется координатой и скоростью, то есть конфигурация частиц есть точка  $((x_1, v_1), \dots, (x_N, v_N))$  множества (фазового пространства)  $X = X_{N, \Lambda} = (\Lambda \times R^d)^N = \Lambda^N \times R^{dN}$ . Если частицы тождественны

(то есть имеют одинаковые массы, заряды и т.д.), то естественно, чтобы все дальнейшее было инвариантно относительно группы  $S_N$  перестановок  $N$  частиц

$$((x_1, v_1), \dots, (x_N, v_N)) \rightarrow ((x_{i_1}, v_{i_1}), \dots, (x_{i_N}, v_{i_N}))$$

Состоянием системы называется неотрицательная мера  $\mu$  на  $X$  с борелевской  $\sigma$ -алгеброй, инвариантная относительно  $S_N$ . При этом требуется условие нормировки:  $\frac{\mu}{N!}$  есть вероятностная мера на  $X$ . Иногда вместо  $X$  рассматривается фактор-пространство  $X/S_N$  пространства  $X$ , симметризованного по группе  $S_N$  перестановок, тогда  $\mu$  дает вероятностную меру на каждом из факторов. Чистым состоянием называется точечная мера, или сама точка пространства  $X$ . Динамика, то есть группа преобразований  $U^t : X \rightarrow X$  задается условием, то частицы движутся свободно с заданными им первоначально координатами и скоростями, не видя друг друга. При столкновении со стенками сосуда происходит упругое отражение.

Эта модель соответствует физическому пониманию разряженного газа, где столкновения между молекулами относительно редки. Идеальный газ - это идеализация такой физической ситуации.

Сейчас мы введем важное специальное состояние. Оно определяется во-первых независимостью всех  $2N$  векторов  $x_1, v_1, \dots, x_N, v_N$ . При этом вектора  $x_k$  распределены в  $\Lambda$  одинаково и равномерно, а скорости частиц  $v_i$  одинаково распределены с плотностью **распределения Максвелла**

$$f_\beta = C \exp(-\beta \frac{mv^2}{2}), C = (\frac{m\beta}{2\pi})^{\frac{d}{2}}$$

то есть имеют гауссово распределение с нулевым средним и диагональной матрицей  $\sigma^2 \mathbf{1} = (\beta m)^{-1} \mathbf{1}$ . При этом средняя кинетическая энергия частицы равна

$$\langle E \rangle = \int \frac{mv^2}{2} f_\beta dv = \frac{d}{2} \beta^{-1}$$

где  $\beta = \frac{1}{kT}$  - параметр, называемый обратной температурой,  $T$  - температура,  $k$  - **постоянная Больцмана**.

Введенное распределение  $\mu_\beta$  инвариантно относительно динамики, то есть для всех  $A \subset X$  и  $t \in R$

$$\mu_\beta(A) = \mu_\beta(U^{-t}A)$$

Заметим, что ввиду независимости, инвариантность достаточно проверить для одной частицы. Распределение ее скорости сохраняется по определению. Более того, при движении с заданной фиксированной скоростью  $v$  мера Лебега на  $\Lambda$  будет инвариантной. Это становится очевидным, если рассмотреть куб с **периодическими граничными условиями**, то есть с отождествленными противоположными сторонами. при этом ломаная траектория становится прямой линией на торе.

Число  $n_\Lambda(A)$  частиц в  $A$  является случайной величиной с распределением

$$P(n_\Lambda(A) = k) = C_N^k \left(\frac{|A|}{|\Lambda|}\right)^k \left(1 - \frac{|A|}{|\Lambda|}\right)^{N-k}$$

которое при термодинамическом предельном переходе  $N \rightarrow \infty, \Lambda \uparrow R^d, \frac{N}{|\Lambda|} \rightarrow \rho$ , стремится к распределению Пуассона. Аналогично, числа частиц  $n(A_i)$  в не пересекающихся  $A_i$  будут независимыми случайными величинами. Легко понять, что можно продолжить это

распределение до меры  $\mu$  на на счетных локально-конечных (то есть конечных в любом ограниченном подмножестве  $R^d$ ) подмножествах  $R^d$  называется пуассоновским случайным полем, а если учитывать, что частицам приписаны еще и независимые скорости, то идеальным газом в бесконечном объеме. Динамика в бесконечном объеме определяется аналогично и даже проще, так как нет отражения от границ, а мера  $\mu$  инвариантна относительно этой динамики. Однако, проще всего доказывать инвариантность предельным переходом из конечного объема.

**Уравнение состояния** Следует сказать, что вывод уравнения состояния идеального газа не обязательно требует распределения скоростей Максвелла см. [23].

**Давлением** называется средний передаваемый импульс на единицу времени и единицу площади реальной стенки (или виртуальной стенки внутри сосуда) частицами, падающими на нее с одной из сторон. Рассмотрим площадку  $dS$ , возьмем ее перпендикулярной оси  $x$ . За время  $(t, t + dt)$  частица со скоростью  $v$  может попасть на через площадку, с одной из фиксированных сторон, только если в момент 0 она находилась в некоторой части цилиндра, опирающегося на площадку и имеющего ось параллельную  $v$  и сечение  $dS$ . Длина этой части цилиндра равна  $|v|dt$ , а его объем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)dS|v|dt = v_1 dS dt$$

где  $\alpha$  - угол между вектором скорости и плоскостью площадки,  $v_1$  - проекция вектора скорости на ось  $x$ . Вероятность того, что частица со скоростью  $v$  попадет в этот цилиндр равна

$$\frac{v_1 dS dt}{V}$$

где  $V = |\Lambda|$  - объем куба, и тогда ее переданный импульс будет  $2mv_1$ . Интегрируя по полупространству  $\{v_x > 0\}$  скоростей одной частицы, и умножая на число частиц  $N$ , получим средний передаваемый импульс  $P$  за единицу времени на единицу площади

$$P = \frac{1}{dS dt} \int_{v_x > 0} 2mv_1 \frac{v_1 dS dt}{V} N dv = \frac{1}{2} 2m\rho \langle v_1^2 \rangle = \frac{2}{3} \rho \langle E_{kin} \rangle = \rho \beta^{-1} = \rho kT$$

где  $\rho = \frac{N}{V}$  - плотность частиц. Это дает **уравнение состояния** идеального газа

$$PV = \beta^{-1} N \tag{23}$$

или

$$P = kT\rho$$

Надо подчеркнуть нюанс в этих рассуждениях: мы брали  $dS, dt$  бесконечно малыми, чтобы можно было интегрировать по полупространству. Если брать их просто малыми  $\Delta S, \Delta t$ , то надо сначала перейти к бесконечному объему и лишь потом совершить переход  $\Delta S, \Delta t \rightarrow 0$ .

#### 4.1.2 Случайные графы, перколяция, фракталы

Случайность может вводиться либо на множестве всех графов скажем с заданным числом вершин (именно это обычно понимается под теорией случайных графов), либо на его гораздо более узком подмножестве, что дает не менее глубокие теории.

**Абстрактные случайные графы** Пусть есть  $N$  точек-вершин, и есть схема Бернулли  $\xi_{v,v'}$ , то есть независимые случайные величины, занумерованные парами  $\{v, v'\}$  вершин,  $\xi_{v,v'} = 1, 0$  с вероятностями  $p, q$ . При этом  $\xi_{v,v'} = 1$  означает, что между этими вершинами есть ребро, а  $\xi_{v,v'} = 0$  - что нет ребра. Ясно, что любой граф с  $N$  вершинами имеет положительную вероятность. Однако асимптотически при  $N \rightarrow \infty$  какие-то классы подграфов будут более выражены чем другие, что очень сильно зависит от  $p = p(N)$ .

Можно представить себе порядки величин, когда, при изменении  $p$ , в графе будут происходить интересные события (фазовые переходы). Именно, вероятность того, что из данной вершины не будет ни одного ребра равна  $(1 - p)^{N-1}$ . Поэтому при  $p = \frac{1}{N^{1+\epsilon}}$  вероятность того, что данная вершина не будет изолирована равна примерно  $\frac{1}{N^\epsilon}$ , и поэтому число не изолированных вершин будет  $o(N)$ . Наоборот; если  $p = \frac{1}{N^{1-\epsilon}}$ , то с вероятностью не меньшей

$$(1 - (1 - p)^{N-1})(1 - (1 - p)^{N-2})(1 - (1 - p)^{N-3}) \dots (1 - (1 - p)^{N-n}) < (1 - e^{-\frac{1}{2}N^\epsilon})^{\frac{1}{2}N}$$

из данной вершины есть путь длины  $\frac{1}{2}N$ , состоящий из разных ребер, и значит будет связная компонента порядка  $N$ .

Поэтому большие изменения в структуре графа будут происходить в районе  $p = \frac{1}{N}$ . Подобным вопросам посвящен фундаментальный труд [17].

**Перколяция** Рассмотрим конфигурацию спинов  $\omega = \{x_{m,n}\}, x_{m,n} = 1, 0$ , на двумерной решетке  $\{(m, n)\} \in Z^2$ . Вершину  $(m, n)$  назовем занятой, если  $x_{m,n} = 1$ , и свободной в противном случае. Любые две соседние (то есть находящиеся на расстоянии 1 друг от друга) занятые вершины соединим ребром. Получится граф  $G = G(\omega)$ .

Будем считать теперь величины  $x_{m,n}$  случайными: независимыми и одинаково распределенными, то есть  $x_{m,n} = 1, 0$  с вероятностью  $p, q$  соответственно. Тогда граф  $G = G(\omega)$  становится случайным.

Структура этого графа существенно зависит от  $p$ . В частности это касается его **связных компонент**, называемых также **кластерами**. Таким образом, кластер графа  $G$  это максимальное подмножество  $A$  вершин решетки такое, что для любых двух его вершин  $v, v' \in A$  существует связывающий их путь по ребрам графа  $G$ .

**Theorem 7** *Существует  $0 < p_{cr} < 1$  такое, что при  $p < p_{cr}$  все кластеры конечны с вероятностью 1, а при  $p > p_{cr}$  с положительной вероятностью есть хотя бы один бесконечный кластер.*

Обозначим  $A$  событие, состоящее в том, что все кластеры конечны (говорят об островах единиц в океане нулей), и пусть  $P(A, p)$  его вероятность. Очевидно, что  $P(A, p_1) \geq P(A, p_2)$ , если  $p_1 \leq p_2$ . Поэтому достаточно доказать, что при достаточно малых положительных  $p$  вероятность  $P(A, p) = 1$ . Действительно, тогда положим  $p_{cr} = \sup\{p : P(A, p) = 1\}$ . Для  $p$  близких к единице картина будет симметричной — острова нулей в океане единиц.

Пусть  $K_N$  - число связных множеств из  $N$  вершин, содержащих начало координат.

**Lemma 1** *(об оценке числа кластеров) Существует константа  $C > 0$  такая, что  $K_N < C^N$ .*

Доказательство леммы проводится конструктивным перебором всех кластеров.

Занумеруем четыре вершины, находящиеся от нуля на расстоянии 1, числами 1,2,3,4. Возьмем первую и решаем, включить ее в кластер или нет. Если включаем вершину  $v$ ,

то все еще не занумерованные вершины, находящиеся на расстоянии 1 от  $v$ , нумеруем (в произвольном или каком-то заранее выбранном порядке) вслед за уже занумерованными числами 5, ... Если не включаем  $v$ , то берем следующую из уже занумерованных вершин и поступаем с ней так же. Любой кластер может быть так получен, а до  $N$ -той вершины кластера нам придется принять не более  $4.3^{N-1}$  решений.

Обозначим  $P_{0,N}$  вероятность того, что кластер, содержащий начало координат 0, имеет не менее  $N$  вершин. Из леммы следует, что  $P_{0,N} < (Cp)^N$ , и  $P_{0,N} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Значит пересечение этих событий (начало координат входит в бесконечный кластер) имеет нулевую вероятность.

Но вместо начала координат можно было взять любую точку. Значит вероятность дополнения к множеству  $A$  равна нулю как объединение счетного числа множеств меры нуль. Обзоры по теории перколяции см. [24, 25].

**Случайные грамматики, деревья и фракталы** Мы рассматриваем слова из двух символов 0, 1. Мы скажем, что слово  $\beta$  получено из слова  $\alpha$  с помощью подстановки  $\gamma \rightarrow \delta$ , если  $\alpha = \alpha_1 \gamma \alpha_2, \beta = \alpha_1 \delta \alpha_2$ . Грамматика определяется конечным множеством *допустимых подстановок*

$$\gamma_i \rightarrow \delta_i, i = 1, \dots, k$$

(среди слов  $\gamma_i$  могут быть одинаковые) и изучает, какие слова можно получить из данного слова совершая допустимые подстановки в некотором порядке. Случайная грамматика есть марковский процесс  $\alpha(t)$ . За время  $dt$  возможны любые переходы вида

$$\alpha(t) = \alpha_1 \gamma_i \alpha_2 \rightarrow \alpha(t + dt) = \alpha_1 \delta_i \alpha_2$$

с вероятностью  $\lambda_i dt$ . Корреляционная функция  $N(\gamma, t)$  в момент  $t$  определяются как среднее число подслов  $\gamma$  в слове  $\alpha(t)$ . Если существуют пределы

$$f(\gamma) = \frac{1}{N(t)} \lim_{t \rightarrow \infty} N(\gamma, t)$$

где  $N(t)$  - среднее число символов в слове  $\alpha(t)$ , то согласованная система  $f(\gamma)$  определяет стационарный случайный процесс на  $Z$  с двумя значениями, то есть вероятностную меру на  $\{0, 1\}^Z$ .

Если все  $\gamma_i$  отдельные символы (такая грамматика называется контекстно свободной), то помимо цепи  $\alpha(t)$  с непрерывным временем, можно построить цепь с дискретным временем (случайная  $L$ -система), где каждой допустимой подстановке  $\gamma_i \rightarrow \delta_i$  приписываются вероятности  $p_i$ , и в моменты  $n = 1, 2, \dots$  к *каждому символу* слова  $\alpha_n$  применяется соответствующая подстановка с соответствующей вероятностью. В этом случае процесс подстановок можно рассматривать как бинарное плоское дерево с дополнительной структурой: каждой его вершине приписан 0 или 1. При этом одночастичная корреляционная функция определяется из ветвящегося процесса, аналогичного процессу Гальтона-Ватсона, но с двумя типами частиц.

Рассмотрим пример грамматики с двумя допустимыми переходами

$$0 \rightarrow 000, 1 \rightarrow 101$$

в дискретном времени. Это конечно не случайный, а детерминированный процесс. Если начальное слово  $\alpha_0 = 1$ , что числа символов в  $\alpha_n$  равно  $3^n$ , из них число единиц  $2^n$ , то есть  $N_1(n) = 2^n$ .



**Упр. 68** Доказать, что предельная инвариантная мера точечная и сосредоточена на конфигурации из одних нулей.

Однако, это слишком грубый результат. Назовем фрактальной (или критической) экспонентой слова  $\gamma$  (или корреляционной функции  $f(\gamma)$ )

$$h(\gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log N(\gamma, t)}{\log N(t)}$$

Многие грамматики можно отобразить на некоторые геометрические конструкции, называемые фракталами. Отождествим слово  $\alpha_n$  с замкнутым подмножеством  $A_n$  единичного отрезка, именно с объединением интервалов  $[\frac{k-1}{3^n}, \frac{k}{3^n}]$  по всем  $k$  таким, что на  $k$ -ом месте слова  $\alpha_n$  стоит единица. Пересечение  $A_n$  - знаменитое канторово множество, замкнутое, нигде не плотное, совершенное и имеет меру нулевую Лебега. Мера Лебега канторова множества равна нулю, что результату предыдущего упражнения.

Для фракталов более интересны другие понятия размерности. Например, размерность подобия для **автомодельных множеств**, то есть какие составлены из  $k$  себе подобных, масштаб каждого из которых уменьшен в  $r = r(k)$  раз, определяется как  $D_{auto} = -\frac{\log k}{\log \frac{1}{r}}$ .

Так для отрезка размерность подобия  $-\frac{\log k}{\log \frac{1}{k}} = 1$ , для квадрата 2, для канторова множества  $\frac{\log 2}{\log 3}$ . Более общей является размерность Хаусдорфа, определения которой мы не приводим.

**Упр. 69** Доказать, что фрактальная экспонента  $h(1) = \log_3 2$  и равна хаусдорфовой размерности канторова множества.

Рассмотрим несколько измененную грамматику

$$0 \rightarrow 000, 1 \rightarrow 101, 1 \rightarrow 011$$

причем первой подстановке приписывается вероятность 1, а двум последним подстановкам приписываются вероятности  $p, q$  соответственно.

**Упр. 70** Доказать, что инвариантная мера и фрактальная экспонента  $h(1)$  такие же как и в предыдущем примере. Как найти фрактальную экспоненту слова 11 ?

О случайных грамматиках см. [28].

**Случайные триангуляции сферы** Рассмотрим гладкие триангуляции двумерной сферы, то есть разбиение ее на  $N$  треугольников с гладкими ребрами, причем два ребра могут пересекаться только в вершинах. Две таких триангуляции назовем изоморфными, если существует гомеоморфизм сферы на себя, переводящий вершины и ребра одной из триангуляций в вершины и ребра другой. Пусть  $C(N)$  - число классов изоморфизмов таких триангуляций.

**Упр. 71** Доказать, что  $C(N)$  конечны и более того, для некоторых  $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ , будет

$$\gamma_1^N < C(N) < \gamma_2^N$$

Указание: оценка сверху доказывается аналогично оценке числа кластеров в задаче перколяции.

В действительности, есть гораздо более точный результат

$$C(N) \sim cN^{-\frac{7}{2}} a^N, a > 0$$

Есть два метода доказательства - нелинейные рекуррентные соотношения, приводящие к алгебраическим производящим функциям, и случайные матрицы (см. ниже). Это связано с двумерной квантовой гравитацией, см. подробный обзор этих и близких вопросов в [29].

### 4.1.3 Взаимодействия и фазовые переходы

От идеального газа мы переходим к системам с взаимодействием. В равновесных системах с взаимодействием вероятности или плотности конфигураций  $\omega$  пропорциональны

$$\exp(-\beta E(\omega))$$

где  $E(\omega)$  - энергия конфигурации. В зависимости от ее вида модели могут быть трех основных видов: каждая частица или спин одинаково взаимодействует с каждым, взаимодействие лишь между ближайшими соседями, иерархическая система взаимодействия.

**Приближение среднего поля** Модель Кюри-Вейса, где есть  $N$  спинов  $s_i = \pm 1, i = 1, \dots, N$ . Энергия

$$E_N = -\frac{J}{N-1} \sum_i \sum_{j:j \neq i} s_i s_j = -\frac{J}{N-1} S_N^2 + \frac{J}{N-1} S_N, S_N = \sum_{i=1}^N s_i$$

В этой модели каждый спин взаимодействует с каждым одинаково, то есть спин  $x_i$  взаимодействует со средним полем  $\frac{1}{N-1} \sum_{j:j \neq i} s_j$ , создаваемым остальными спинами. Отсюда название. Мы хотим выразить вероятность конфигурации  $\{s_i\}$

$$P(\{s_i\}) = \frac{\exp(-\beta E_N)}{Z_N} = \frac{\exp(\frac{\beta J S_N^2}{N-1})}{2^N \langle \exp(\frac{\beta J S_N^2}{N-1}) \rangle_0}$$

через среднее  $\langle . \rangle_0$  по распределению независимых случайных величин  $\xi_i = \pm 1$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$ . Ясно, что максимум вероятности определяется прежде всего значением  $s$  в асимптотике сумм  $S_N = [sN]$ , так как малое отклонение  $s \pm \epsilon$  даст экспоненциально убывающий множитель. Асимптотика же определяется формулой для больших отклонений сумм независимых величин из лекции 4. Обычно ссылаются на принцип больших отклонений и теорему Варадана, но и здесь достаточно формулы Стирлинга. Подставляя асимптотику больших отклонений из лекции 4 и ограничиваясь функцией под экспонентой, мы видим, что максимумов этой функции конечное число ввиду ее аналитичности, а определяются они игрой идет между энергией и энтропией. Дифференцируя выражение под экспонентой, получаем уравнение (выкладки сделает читатель, если захочет)

$$s = \tanh(2\beta J s)$$

График правой части показывает, что при  $2\beta J \leq 1$  будет единственный максимум  $s = 0$ , а при  $2\beta J > 1$  их будет два, отличающихся знаком. Важный момент: помимо основного экспоненциального множителя для обоих максимумов будут конечно и степенные множители, которые тоже можно вычислить, но этого делать не надо, так как они равны ввиду  $(\pm)$ -симметрии.

Говорят, что при критической температуре  $T = \beta^{-1} = 2J$  происходит фазовый переход от одной фазы к двум.

**Локальные модели (статистическая физика)** Рассмотрим двумерную модель Изинга - распределение вероятностей на конфигурациях  $\omega = \{\sigma_n, n \in \Lambda\}$  в кубе  $\Lambda = [-N, N]^2$  двумерной решетки

$$P(\{\sigma_n\}, \beta, \Lambda, \{\sigma_b\}) = Z^{-1} \exp(-\beta U), U = \sum_{|n-n'|=1} \sigma_n \sigma_{n'} + \beta H_b$$

где  $b \in \partial\Lambda$ , а граница - множество вершин решетки на расстоянии 1 от  $\Lambda$ ,

$$H_b = \sum_{|n-b|=1, b \notin \Lambda} \sigma_n \sigma_b$$

- энергия взаимодействия с внешним окружением. Мы рассмотрим два типа граничных условий - когда на границе все плюсы или все минусы, то есть

$$H_{b,+} = \sum_{|n-n'|=1} \sigma_n, H_{b,-} = - \sum_{|n-n'|=1} \sigma_n$$

соответственно. Обозначив соответствующие вероятности  $P_{\pm}$ , имеем теорему.

**Theorem 8** *Для малых  $\beta$  пределы*

$$P_{\pm}(\sigma_{(0,0)} = 1, \beta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} P_{\pm}(\sigma_{(0,0)} = 1, \beta, \Lambda)$$

*существуют и равны  $\frac{1}{2}$  (то есть не зависят от граничных условий). Для больших  $\beta$  эти пределы также существуют, но неравны и, более того, при*

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_+(\sigma_{(0,0)} = 1, \beta) &= 1, \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_-(\sigma_{(0,0)} = 1, \beta) = 0 \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_+(\sigma_{00} = -1, \beta) &= 0, \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_-(\sigma_{00} = -1, \beta) = 1 \end{aligned}$$

**Ряды для малых  $\beta$**  Формальное разложение для функции  $\xi$  от конечного числа  $\sigma_n$

$$\langle \xi \rangle = \frac{\langle \xi \exp zU \rangle_0}{\langle \exp zU \rangle_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \langle \xi, U^n \rangle_0$$

становится сходящимся рядом для малых  $|z|$ , если  $U$  ограниченная случайная величина. Оно следует из определения семиинвариантов

$$\langle \xi \rangle = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \langle \exp \lambda \xi \rangle = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \frac{\langle \exp(\lambda \xi + zU) \rangle_0}{\langle \exp zU \rangle_0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \langle \exp(\lambda \xi + zU) \rangle_0$$

Разлагая по  $z$ , получаем результат. В применении к модели Изинга

$$\langle \xi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \sum_{A_1, \dots, A_n} \langle \xi, \Phi_{A_1}, \dots, \Phi_{A_n} \rangle_0$$

где среди  $A_i$  пробегают пары ближайших соседей  $\{n, n'\}$  и могут быть одинаковые, а  $\Phi_A$  - либо  $\sigma_n \sigma_{n'}$  либо  $\sigma_n \sigma_b$ . Для конечных  $N$  этот ряд конечно сходится, но радиус сходимости убывает с ростом объема. Основная трудность здесь - получение оценок равномерных по объему. Для этого заметим прежде всего, что если объединение  $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$  несвязно, то семиинвариант равен нулю. Это следует из

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \ln \langle \exp(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2) \rangle &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} [\ln \langle \exp(\lambda_1 U_1) \rangle + \\ &+ \ln \langle \exp(\lambda_2 U_2) \rangle] = 0 \end{aligned}$$

если  $U_1, U_2$  независимы.

Самый сложный момент доказательства - оценка семиинвариантов для связных объединений  $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$

$$| \langle \xi, \Phi_{A_1}, \dots, \Phi_{A_n} \rangle_0 | \leq C^n n!$$

Эту оценку можно получить непосредственно (нетривиальная комбинаторная задача) или доказывая аналитичность моментов для малых  $|\beta|$  с помощью уравнений Кирквуда-Зальцбурга, см. [27].

**Контуры для низких температур** Рассмотрим модель Изинга в квадрате  $\Lambda = [-N, N] \subset Z^2$  с граничными условиями  $\sigma_b = 1, b \in \partial\Lambda$ .

**Theorem 9** Вероятность того, что в начале координат значение спина будет противоположно значениям спина на границе,

$$P_{\Lambda,+}(\sigma_{(0,0)} = -1) < e^{-8(\beta-1)}$$

Эта ситуация противоположна ситуации в одномерной модели Изинга. Если термодинамический предел существует (а это так, хотя мы не будем этого доказывать), то мы получаем два различных гиббсовских поля (две фазы) с одинаковым взаимодействием.

Введем двойственную решетку  $\Lambda^*$ , вершинами которой будут точки  $(z_1, z_2), |z_i| < N+1$ , с полуцелыми координатами  $z_i$ . С каждой конфигурацией  $\sigma_x$  в  $\Lambda$  свяжем подграф  $G = G(\{\sigma_x\})$  в двойственной решетке, состоящий из ее ребер: ребро принадлежит ему тогда и только тогда, когда по обе стороны от ребра стоят спины разного знака.

**Упр. 72** Перебором доказать, что в каждой вершине  $\Lambda^*$  сходится четное число, то есть 0, 2, 4 ребер  $G$ . Условимся скруглять немного правый верхний и левый нижний углы в любой вершине, где сходится 4 ребра. Тогда граф  $G$  разобьется на связные компоненты  $\Gamma_k$  - замкнутые ломаные без пересечений и самопересечений, - которые называются контурами.

Доказать, что между конфигурациями спинов и такими графами  $G$  есть взаимно однозначное соответствие. Для этого достаточно построить конфигурацию спинов по данному  $G$ . Это делается по индукции, начиная со спинов между внешними контурами (то есть не содержащимися ни в каких других контурах) и границей. Тогда взаимодействие может быть переписано в контурном виде

$$U = 2\beta|\gamma| - \beta L$$

где  $\gamma$  - набор всех контуров  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  в  $G$ ,  $|\gamma|$  - число ребер в  $\gamma$ ,  $L$  - число ребер  $\Lambda^*$ , лежащих полностью внутри области  $\Lambda \cup \partial\Lambda$ .

Вероятность  $P_{\Lambda,+}(\Gamma)$  того, что данная замкнутая ломаная  $\Gamma$  присутствует в  $\gamma$ , может быть оценена сверху

$$P_{\Lambda,+}(\Gamma) \leq \frac{\sum_{\gamma: \Gamma \in \gamma} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\gamma} e^{-2\beta|\gamma|}} \leq \frac{e^{-2\beta|\Gamma|} \sum' e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\gamma} e^{-2\beta|\gamma|}} \leq e^{-2\beta|\Gamma|}$$

где в  $\sum'$  - суммирование по всем  $\gamma$ , не содержащим  $\Gamma$  и не содержащим контуров, пересекающихся с  $\Gamma$ .

Число контуров длины  $n$ , выходящих из данной вершины, не превосходит  $4 \cdot 3^n$ , а число контуров длины  $n$ , охватывающих данную точку, не превышает  $4n3^n$ . Тогда из оценки

$$P_{\Lambda,+}(\sigma_{(0,0)} = -1) \leq \sum_{\Gamma} P_{\Lambda,+}(\Gamma)$$

где сумма берется по всем  $\Gamma$ , охватывающим начало координат, следует теорема.

#### 4.1.4 Ренормгруппа и эвклидовы случайные поля

**Ренормгруппа** Рассмотрим сначала другой метод вычислений в одномерной модели Изинга с наиболее общим симметричным взаимодействием ближайших соседей

$$\sum_i [J_1 \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{J_2}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1})]$$

В термодинамическом пределе она представляет собой последовательность случайных величин  $\sigma_i$ . Оставим только четные спины и обозначим  $\sigma_i^{(1)} = \sigma_{2i}$ . Эта операция соответствует увеличению единицы масштаба (скейлингу) в два раза. Как будут распределены новые величины  $\sigma_i^{(1)}$ ? Ответ здесь очень прост - также как и в модели Изинга, но с другими константами взаимодействия. Это легко понять, если в конечном объеме при подсчете статсуммы взять сначала сумму по нечетным спином. Эта сумма легко берется, так как сводится к независимым суммам

$$\begin{aligned} \sum_{x_{i+1}=\pm 1} \exp([J_1 \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{J_2}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1})] + [J_1 \sigma_{i+1} \sigma_{i+2} + \frac{J_2}{2} (\sigma_{i+1} + \sigma_{i+2})]) = \\ = \exp([J_1^{(1)} \sigma_i \sigma_{i+2} + \frac{J_2^{(1)}}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+2})]) \end{aligned}$$

так как самая общая положительная функция от двух двоичных переменных имеет вид такой вид, но с другими коэффициентами. Это преобразование в *пространстве взаимодействий* называется преобразованием ренормгруппы.

**Упр. 73** Показать, что преобразование коэффициентов имеет вид

$$\begin{aligned} \exp J_1^{(1)} &= (\cosh(2J_1 + J_2) \cosh(2J_1 - J_2) \cosh^{-2} J_2)^{\frac{1}{4}} \\ \exp J_2^{(1)} &= \exp J_2 (\cosh(2J_1 + J_2) \cosh^{-1}(2J_1 - J_2))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Продолжая рекуррентно, будем получать взаимодействие между спинами на все большем расстоянии с соответствующими константами  $J_1^{(k)}, J_2^{(k)}$ . Очевидно, что  $J_1^{(1)} \rightarrow 0$  так как мы уже знаем, что на большом расстоянии спины в одномерной модели Изинга становятся независимыми. Предел же  $J_2^{(k)}$  соответствует одночастичным распределениям в начальной модели Изинга.

Уже преобразование двумерной модели Изинга, если оставить спины с четной суммой индексов, дает новый вид взаимодействия, включающий, помимо двухчастичных взаимодействий, четырехчастичное. Далее взаимодействие все более усложняется. Можно представить себе некоторое пространство взаимодействий, в котором действует преобразование ренормгруппы. Первый вопрос - как описать пространство взаимодействий. Это сделано в ряде случаев, когда спин на решетке принимает конечное число значений и главное, в области малых  $\beta$ . См. обзор [32] с многочисленными ссылками на более ранние работы.

Второй вопрос - какие есть другие модели, где вычисления просты и даже можно выписать неподвижные точки. Заметим, что в случае одномерной модели Изинга, неподвижные точки - независимые поля. Другой класс случайных полей, где это легко выяснить - гауссовские обобщенные поля. В гауссовском случае вместо взаимодействия берется обратный оператор - ковариация.

Скейлингом случайного поля  $\xi(x), x \in R^d$ , называется преобразование (или группа преобразований)

$$(R_a(s)\xi)(x) = s^a \xi(sx), s > 0$$

Для обобщенных полей точнее сказать

$$(R_a(s)\xi)(f) = \xi(R_a(s)f), (R_a(s))f(x) = s^{a-d}f(s^{-1}x)$$

Это преобразование порождает автоморфизм алгебры всех случайных величин, а двойственное преобразование  $R^* = R_a^*(s)$  действует на меры

$$\langle \xi \rangle_{R^*\mu} = \langle R^*\xi \rangle_\mu$$

Неподвижные точки  $R$  называются автомодельными распределениями (полями). Поле называется инфракрасно (ультрафиолетово) асимптотически свободным, если его предел при  $s \rightarrow \infty$  ( $s \rightarrow 0$ ) является (автомодельным) гауссовским полем.

**Упр. 74** Гауссово поле автомодельно тогда и только тогда, когда его ковариация инвариантна, то есть  $C(x) = s^{2a}C(sx)$ .

Основная задача, которая породила довольно много глубоких работ - построение негауссовых полей в окрестности гауссова автомодельного поля, см. классический труд Глимма-Джаффе [31], внесших основной вклад в эту науку. При изучении таких полей возникает другая проблема - расходимости, о которых мы здесь дадим лишь самое начальное представление. Вообще, эти модели являются пожалуй наиболее сложными, как технически так и концептуально, из всех существующих вероятностных моделей. Однако, техника многомасштабных разложений, которая в них была развита, применяется не только в многочисленных теоретических моделях, таких как перколяция, блуждания без самопересечений, случайные операторы Шредингера и т.д., но входит в эффективные численные алгоритмы решения уравнений в частных производных, см. [34].

## Эвклидовы поля

**Идеальный оазис** Любая теория должна иметь идеальный пример (или как говорят, модель), где нет особых сложностей и все можно сделать до конца. Такой моделью в эвклидовой теории поля является гиббсовская перестройка процесса Орнштейна-Уленбека  $\xi(t)$ , определяемого гауссовой мерой  $\mu_0$  (в физических терминах эта модель соответствует квантовому нелинейному гармоническому осциллятору). Иначе говоря это мера  $\mu_N$ , абсолютно непрерывная относительно  $\mu_0$  с плотностью

$$\frac{d\mu_N}{d\mu_0} = Z_N^{-1} \exp(-\beta U_N), U_N = \int_{-N}^N \xi^4(t) dt$$

Так как  $\xi(t)$  случайные величины с конечной дисперсией, то интеграл можно понимать как предел по вероятности конечных сумм. Но можно понимать его и в обычном смысле, так как процесс Орнштейна-Уленбека имеет непрерывные траектории. Ввиду ограниченности  $U$  снизу, мера  $\mu_N$  тривиальным образом существует. Этим и завершается построение поля в конечном объеме. Следующая задача - изучение термодинамического предельного перехода: можно доказать, что при  $N \rightarrow \infty$  существует пределы всех конечномерных распределений

$$\mu_N\{\omega : \xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_k) < x_k\}$$

которые определяет меру  $\mu$  в бесконечном объеме. Более того, этот предел определяет марковский процесс с экспоненциальным убыванием корреляций. Доказательство использует трансфер-матрицу и очень близко к соответствующим рассуждениям лекции раздела 2 об одномерных гиббсовских полях.

**Цель теории** Целью эвклидовой квантовой теории поля является построение и изучение аналогичных случайных полей в  $R^d$ . При этом интерес (диктуемый физикой, на чем мы здесь не можем останавливаться) представляют только те поля, у которых  $U = \int_{\Lambda} \Phi(\xi(x)) dx$ , а гауссово поле задается ковариацией

$$\hat{C}(k) = \frac{1}{m^2 + k^2} \quad (24)$$

Это определяется принципом максимальной локальности поля - взаимодействие поля с самим собой, задаваемое функцией  $\Phi$ , может быть лишь в одной точке, а взаимодействие, связывающее разные точки пространства, должно определяться только гауссовой ковариацией, и быть также максимально локальным. На решетке это соответствовало бы взаимодействию ближайших соседей. Надо сказать, что цель не достигнута в физическом случае  $d = 4$  (4 это размерность пространства-времени).

**Трудности** возникают уже при построении поля в конечном объеме, например в единичном кубе  $\Lambda$ . При  $d > 1$  гауссово поле с ковариацией (24) является обобщенным и функции типа  $\Phi(\xi(x))$  от него не существуют.

**Упр. 75** Доказать, что при  $x \rightarrow 0$

$$C(x) \sim \begin{cases} C \ln |x|, & d = 2 \\ \frac{C}{|x|^{d-2}}, & d > 2 \end{cases}$$

Поэтому сначала обобщенное гауссово поле приближается обычным. Один из способов - ковариацию  $\hat{C}(k)$  изменить на  $\hat{C}_{\kappa}(k) = \hat{C}(k) \chi_{[0, \kappa)}(|k|)$ , где  $\kappa$  называется параметром (ультрафиолетового) урезания. Тогда при  $\kappa \rightarrow \infty$  (как говорят, при снятии урезания) конечно  $\chi_{[0, \kappa)}(|k|) \rightarrow 1$ , но может случиться, что случайная величина  $U = \int_{\Lambda} \Phi(\xi(x)) dx$  имеет предел по вероятности, а также что предел будет ограничен снизу. Тогда и случайное поле с плотностью

$$\frac{d\mu_{\Lambda, \kappa}}{d\mu_{0, \kappa}} = Z_{\kappa}^{-1} \exp(-\beta U), \quad Z_{\kappa} = \langle \exp(-\beta U) \rangle_{0, \kappa}$$

относительно гауссовой меры  $\mu_{0, \kappa}$ , будет иметь предел. Однако, такая простая ситуация имеет место только в размерности  $d = 2$ . Самый простой - виговская экспонента

$$\Phi(\xi) =: \exp a\xi := \frac{\exp a\xi}{\langle \exp a\xi \rangle}$$

Ее ограниченность снизу очевидна, да и дисперсия легко вычисляется

$$\langle U^2 \rangle = \int \exp(a^2 C(x-y)) dx dy$$

и при снятии урезания существует при  $d = 2$  и  $a^2 < 4\pi$ . Однако, в важных для физики случаях (когда  $\Phi$  многочлен и размерность  $d > 2$ ) этот прием не работает.

**Диаграммы и интегральные функции от обобщенных гауссовых полей** Что-бы лучше понять препятствия к существованию пределов при снятии урезания, естественно начать с моментов случайной величины  $U$ , которые для  $\Phi = \xi^m$  представляются в виде линейной комбинации диаграмм

$$\langle U^n \rangle_\kappa = \int \langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \rangle_\kappa dx_1 \dots dx_n = \sum_G \int I_G(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (25)$$

$$I_G(x_1, \dots, x_n) = \prod C_\kappa(x_i - x_j) \quad (26)$$

где  $G$  пробегает все диаграммы, то есть разбиения набора  $(\xi_1, \dots, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  из  $mn$  величин на пары  $\langle \xi_i, \xi_j \rangle_\kappa$ . Однако, среди этих пар будут пары с  $i = j$  (называемые петлями), для которых  $C_\kappa(x_i - x_j) \rightarrow \infty$ . От этой неприятности можно избавиться, если вместо  $\xi^m$  взять виковский моном, который например для  $m = 4$  равен :  $\xi^4 := \xi^4 - 6 \langle \xi^2 \rangle \xi^2 + 3 \langle \xi^2 \rangle^2$ . Удобно изображать виковский моном вершиной с  $m$  отростками. Тогда диаграмма будет графом с  $n$  вершинами и  $2n$  ребрами, соответствующими всевозможным спариваниям  $mn$  отростков, с запрещением спаривать друг с другом отростки одной вершины.

**Упр. 76** Доказать, что сумма в (26) будет по всем диаграммам без петель, то есть не будет множителей  $C(0)$ . Вывести отсюда существование предела (25) в размерности  $d = 2$ .

Хотя ограниченность снизу при снятии урезания теряется, тем не менее, как можно показать, в размерности 2 статсумма остается ограниченной, и соответствующее поле в размерности 2 существует. В размерностях  $d \geq 3$  проблема усугубляется.

**Расходимости** Моменты и семиинварианты  $U$  входят в формальные ряды по  $\beta$  для свободной энергии и других распределений эвклидова поля. Например,

$$\ln \langle \exp(-\beta U) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle U, \dots, U \rangle \frac{(-\beta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \sum_G I_G$$

**Упр. 77** Доказать, что в семиинвариантах встречаются лишь связные диаграммы.

Если в размерности 2 проблема сходимости моментов была решена устранением петель, то в общем случае на вопрос, какие диаграммы расходятся, отвечает теорема счета степеней. Пусть  $G$  - связная диаграмма (без отростков),  $V, |V| = n$ , - множество ее вершин;  $L$  - множество ее ребер. Для любого  $V' \subset V$  обозначим  $L(V')$  множество внутренних ребер, то есть имеющих оба конца в  $V'$ ,  $b = b(L')$  - число внешних ребер, то есть имеющих один конец в  $V'$ . Пусть

$$C(x) \sim \frac{C}{|x|^{d-\alpha}}$$

**Theorem 10** Тогда диаграмма конечна тогда и только тогда, когда для всех  $V'$

$$\omega(V') = -\alpha |L(V')| + d(|L(V')| - |V'| + 1) < 0$$



Эта теорема - классика квантовой теории поля, но доказательство ее громоздко, доказательство на вероятностном языке см. в [33, 32].

Диаграммы с  $b = 0$  называются вакуумными, с  $b = 2$  - массовыми. В модели  $\xi^m$  все диаграммы конечны. Модели, где лишь для конечного числа диаграмм  $\omega(V') < 0$ , называется сверхперенормируемой. Примером может быть  $\xi^4$ , где это может быть для двух вакуумных диаграмм с  $|V| = 2, 3$  и для одной массовой с  $|V| = b = 2$ . Если  $\omega(V') < 0$  может быть лишь для  $b$ , меньших некоторого  $b_0$ , то теория называется перенормируемой, примером могут быть  $\xi^6$ ,  $\xi^4$ . В остальных случаях теория называется неперенормируемой, как например  $\xi^8$ ,  $\xi^6$ .

В теории формальных перенормировок изучается как изменить взаимодействие, чтобы все члены ряда стали конечными. Простейший пример - модельная теория с ковариацией

$$\hat{C}(k) = \frac{1}{(m^2 + k^2)^2}$$

где  $d = 4, \frac{1}{3} < \epsilon \leq \frac{1}{2}$  и  $m = 4$ . В ней расходится одна вакуумная диаграмма с двумя вершинами, соответствующая  $\langle U^2 \rangle$ . Тогда для устойчивости статсуммы надо изменить (перенормировать) взаимодействие на зависящую от  $\kappa$  константу

$$-\beta U \implies -\beta U - \beta^2 E_N, E_N = \frac{4!}{2} \int C^4(x-y) dx dy$$

**Многомасштабные разложения** Так называется область, объединяющая технику ренормгруппы и кластерных разложений, о которых мы говорили выше. В применении к евклидовым полям к ним добавляются еще формальные перенормировки. За умеренно простым введением в предмет отсылаем опять к [33, 32] и к многочисленным ссылкам там.

**Спектр и комбинаторика случайных матриц** Модель случайных матриц задается вероятностным распределением  $\mu$  на множестве самосопряженных  $n \times n$ -матриц  $\phi = (\phi_{ij})$  с плотностью

$$\frac{d\mu}{d\nu} = Z^{-1} \exp(-n(\text{tr}(\frac{\phi^2}{2}) - \text{tr}(V))) \quad (27)$$

где  $V = \sum a_k \phi^k$  - полином от  $\phi$ , ограниченный снизу,  $\nu$  - мера Лебега на вещественном  $n^2$ -мерном пространстве векторов  $(\phi_{ii}, \Re \phi_{ij}, \Im \phi_{ij}, i < j)$ . Можно это распределение переписать в виде плотности

$$\frac{d\mu}{d\mu_0} = Z_0^{-1} \exp(-\text{tr}(V))$$

по гауссовой мере  $\mu_0$ , то есть когда  $V = 0$ . Легко видеть, что ковариации меры  $\mu_0$  равны  $\langle \phi_{ij}, \phi_{kl}^* \rangle = \langle \phi_{ij}, \phi_{lk} \rangle = h \delta_{ik} \delta_{jl}$ . Для самого существования вероятностной меры  $\mu$  необходимо, чтобы старший коэффициент  $a_p$  полинома  $V$  был положительным, а  $p$  было четным.

Изучение спектра началось с гауссовского случая. Первое важное наблюдение состоит в том, что это распределение инвариантно относительно унитарной группы, поэтому оно может быть параметризовано произведением инвариантного распределения на унитарной группе, то есть меры Хаара, на распределение собственных значений. Последнее, после замены переменных, имеет типичный для статистической физики частиц вид

$$p_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Z_n^{-1} \exp(-n \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{2}) [\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)]^2 \quad (28)$$

Отсюда можно вывести, что число собственных значений  $N_n(a, b)$ , лежащих в интервале  $(a, b) \subset R$  асимптотически равно

$$N_n(a, b) \sim n \int_a^b p(x) dx$$

где  $p(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}$  при  $|x| \leq 2$  и нулю в противном случае. Доказательство - разложением (28) по ортогональным по мере  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ , то есть по полиномам Чебышева-Эрмита, см [39, 40].

Связь между случайными матрицами и перечислением двумерных комплексов дается формальным рядом по семиинвариантам или по диаграммам

$$\log Z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle tr(V), \dots, tr(V) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{D_n} I(D_n)$$

где  $\sum_{D_n}$  - сумма по всем связным диаграммам с  $n$  вершинами и  $L$  ребрами. Пусть, например,  $V = a_4 \phi^4$ . Мы поясним только связь между членом, соответствующим  $D_n$  и некоторым двумерным комплексом. Каждая диаграмма имеет занумерованные вершины  $1, \dots, n$ ,  $L = 2n$  ребер, каждая вершина имеет отростки, соответствующие множителям произведения  $\phi_{ij} \phi_{jk} \phi_{kl} \phi_{li}$ . Отросток, например соответствующий  $\phi_{ij}$ , можно представлять как двустороннюю двумерную полосу, стороны которой имеют матричные индексы  $i$  и  $j$  соответственно. Договоримся, что спаривание отростков-полосок делается так, что спаренные стороны имеют одинаковые индексы. Так как индекс встречается дважды в каждой вершине, то начиная с некоторой стороны с индексом  $i$ , есть единственный связный путь в диаграмме по ребрам с индексом  $i$ . Эти пути замкнуты и называются индексными петлями.

Пусть например,  $n = 2$  и все индексы  $i, j, k, l$  различны. Тогда каждая индексная петля имеет два ребра и будет 4 двумерных клетки, граница каждой состоит из двух вершин и двух ребер. Поэтому получим комплекс гомеоморфный сфере. В общем случае, для каждого графа  $D$  существует минимальное клеточное вложение  $f(D)$  этого графа в компактную ориентируемую поверхность  $S_\rho$  рода  $\rho$ . Клеточность вложения означает, что каждая индексная петля ограничивает открытую область поверхности  $S_\rho$ , гомеоморфную диску, а минимальность означает, что нет меньших  $\rho$  с таким же свойством. Эта карта имеет  $k$  вершин,  $2k$  ребер и  $N$  двумерных клеток, тогда по формуле Эйлера  $k = N + 2\rho - 2$ .

Постепенное детальное введение в предмет см. [35], а настоящая вакханалия комбинаторики и алгебры начинается в работах ближе к физике [36, 37].

## 4.2 Неравновесные процессы

### 4.2.1 Существование бесконечночастичной динамики

Основывается на так называемой картине **кластерной динамики**: существует  $t_0 > 0$ , что бесконечно множество частиц разбивается на конечные группы (кластеры), которые на малом интервале времени  $[0, t]$  движутся как конечные системы, не испытывая (или почти не испытывая) влияния других кластеров. Проще всего это показывается на процессах с локальным взаимодействием. Рассмотрим сначала марковский процесс с непрерывным временем в кубе  $\Lambda = [-N, N]^d$ , то есть с множеством состояний  $\{1, 0\}^\Lambda$ . Пусть задана положительная функция  $\lambda(\xi, \eta)$  на  $\{0, 1\}^{A_0 \times A_0}$ , где  $\xi, \eta$  - конфигурации на кубе  $A_0 = [-D, D]^d$ .

Она определяет конечную цепь Маркова с непрерывным временем на  $\{0, 1\}^{A_0}$ . Аналогичный, с той же или другой функцией  $\lambda_A(\xi, \eta)$ , процесс можно определить на произвольном кубе  $A$ , конгруэнтном  $A_0$ . Обозначим генераторы этих цепей  $V_A$ .

Рассмотрим теперь марковскую полугруппу  $\exp H_\Lambda t$  на  $\{0, 1\}^\Lambda$  с генератором

$$H_\Lambda = \sum_{A \subset \Lambda} V_A$$

При этом неявно матрица  $V_A$  понимается теперь как тензорное произведение  $V_A \otimes 1_{\Lambda \setminus A}$ . Фиксируем теперь множество  $B \subset \Lambda$ , произвольное цилиндрическое множество на  $C(B)$  и заметим, что если  $B \cap A = \emptyset$ , то для любой меры  $\mu$  мера  $V_A \mu(C(B)) = 0$ , то есть любой переход вне  $B$  не меняет спинов на  $B$ . Поэтому в разложении

$$C(B) \exp H_\Lambda t = \exp \sum_{A \subset \Lambda} V_A t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{A_1, \dots, A_n} V_{A_1} \dots V_{A_n} \quad (29)$$

вклад в изменение спина в точках  $B$  дадут лишь те члены суммы, где

$$x \in A_1, A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, \dots, (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n \neq \emptyset$$

Можно доказать (простая комбинаторная задача), что, равномерно по  $\Lambda$ , число таких членов не превосходит  $C^n n!$  для некоторого  $C > 0$ , зависящего от размерности и максимума диаметров  $A$ , который мы предположим конечным. Тогда для достаточно малых  $t > 0$  ряд абсолютно сходится равномерно по  $\Lambda$ .

Поэтому определено преобразование мер, которое мы обозначим  $U^t, t \leq t_0$ . Ввиду компактности  $\{0, 1\}^{Z^d}$  для произвольного  $t$  преобразование мер определяется представлением  $t = nt_0 + t', t' < t_0$

$$U^t = (U^{t_0})^n U^{t'}$$

**Упр. 78** Для  $d = 1$ , улучшив комбинаторную оценку, доказать, что ряд (29) сходится для всех  $t$ .

#### 4.2.2 Явные решения

**Независимые частицы на решетке** На этой системе покажем очень простой прием для нахождения инвариантных мер.

Состояние системы в момент  $t$  описывается числом  $n_i(t)$  частиц в каждой точке  $i$  решетки  $Z$  или любого ее интервала. Все частицы одинаковы и каждая совершает блуждание с непрерывным временем независимо от других, совершая скачки  $i \rightarrow i + 1$  и  $i + 1 \rightarrow i$  с вероятностями  $\mu dt$  за время  $dt$ .

Пуассоновская мера определяется так: все  $n_i$  независимы и имеют пуассоновское распределение с параметром  $\lambda$

$$\pi(k) = P(n_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda k}$$

Докажем, что она инвариантна. Для двух точек  $0, 1$  это тривиальная проверка. пишем уравнения для стационарных вероятностей  $\pi(k, m) = P(n_0 = k, n_1 = m)$ . Например для  $k, m > 0$

$$\pi(k, m) \mu(k + m) = \pi(k - 1, m + 1) \mu(m + 1) + \pi(k + 1, m - 1) \mu(k + 1)$$

или

$$\frac{k+m}{k!m!} = \frac{m+1}{(k-1)!(m+1)!} + \frac{k+1}{(k+1)!(m-1)!}$$

Далее используем простую лемму: пусть на одном пространстве состояний  $S = \{s\}$  заданы несколько цепей Маркова  $\mathbf{M}_i$  с переходными интенсивностями  $\lambda_{ss'}^{(i)}$ . Пусть КАЖДАЯ из них имеет одну и ту же инвариантную меру  $\pi$ . Тогда и цепь с переходными интенсивностями

$$\lambda_{ss'} = \sum_{\alpha} \lambda_{ss'}^{(\alpha)}$$

имеет ту же инвариантную меру. Это следует из сложения уравнений для стационарных вероятностей

$$0 = \sum_{s'} (\pi_{s'} \lambda_{s's} - \pi_s \lambda_{ss'})$$

В нашем случае надо взять в качестве цепей  $\mathbf{M}_i$  нашу цепь, но исключить все переходы кроме  $i \rightarrow i+1$  и  $i+1 \rightarrow i$ .

**Взаимодействующие частицы с запретами (exclusion process)** Множество состояний  $\{0, 1\}^N = \{(x_1, \dots, x_N), x_i = 0, 1\}$ . Мы интерпретируем 1 как частицу в соответствующей точке, а 0 как пустое место (дырку). Переходы: за время  $dt$  для любого  $i = 1, 2, \dots, N-1$

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_N) \rightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_N)$$

с вероятностью  $\lambda dt$ . То есть меняются местами частица и дырка на местах  $i, i+1$ , а остальные остаются без изменения. Эквивалентное определение - любая частица прыгает в любую из двух соседних точек с вероятностью  $\lambda dt$ , если в ней нет частицы. Отсюда название - процесс с запретами.

В неравновесной динамике бесконечного числа частиц часто пользуются корреляционными уравнениями (ББГКИ-иерархией), то есть уравнениями для корреляционных функций (конечномерных распределений). Введем одночастичные и двухчастичные корреляционные функции, например,

$$p_t(i; 1) = P(x_i(i) = 1), p_t(i, i+1; 10) = P(x_i(i) = 1, x_{i+1}(i) = 0)$$

Тогда с точностью до  $o(dt)$  для  $0 < i < N$  имеем

$$\begin{aligned} p_{t+dt}(i; 1) &= p_t(i-1, i, i+1; 111) + (p_t(i-1, i, i+1; 011) + p_t(i-1, i, i+1; 110))(1 - \lambda dt) + \\ &\quad + p_t(i-1, i, i+1; 010)(1 - 2\lambda dt) + \\ &\quad + (p_t(i-1, i, i+1; 100) + p_t(i-1, i, i+1; 001))\lambda dt + p_t(i-1, i, i+1; 111)2\lambda dt \end{aligned}$$

Мы видим, что одночастичные функции, вообще говоря, выражаются через двухчастичные. Но иногда удается получить **замкнутые корреляционные уравнения**. Так, в нашем случае, объединяя первые четыре члена правой части и остальные по два, имеем

$$\begin{aligned} p_{t+dt}(i; 1) - p_t(i; 1) &= \lambda dt [-p_t(i-1, i; 01) - p_t(i, i+1; 10) + p_t(i-1, i; 10) + p_t(i, i+1; 01)] = \\ &= \lambda dt [p_t(i-1; 1) - 2p_t(i; 1) + p_t(i+1; 1)] \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда видно, что первая корреляционная функция для нашего процесса с начальным условием  $p_0(i; 1)$  совпадает с распределением ОДНОЙ частицы, совершающей симметрическое блуждание на отрезке  $[1, N]$  со скачками налево и направо с интенсивностью  $\mu$ .

Последний процесс называется **двойственным процессом**. С его помощью можно изучить динамику корреляционных функций.

Введем дополнительно две граничные точки  $i = 0$  и  $i = N + 1$  и граничные условия для всех  $t$

$$p_t(0; 0) = 1, p_t(N + 1; 0) = 1$$

Тогда в точках  $i = 1$  и  $i = N$  имеем

$$\begin{aligned} p_{t+dt}(1; 1) - p_t(1; 1) &= \lambda dt[-2p_t(1; 1) + p_t(2; 1)] \\ p_{t+dt}(N; 1) - p_t(N; 1) &= \lambda dt[p_t(N - 1; 1) - 2p_t(N; 1)] \end{aligned}$$

В стационарном случае получаем уравнение

$$\Delta p = 0$$

Его общее решение внутри интервала имеет вид

$$C_0 + C_1 i$$

Из граничных условий получим обе константы. Например, для граничных условий

$$p_t(0; 0) = 1, p_t(N + 1; 1) = 1$$

получим

$$p(i; 1) = \frac{i}{N + 1}$$

Легко проверить, что в случае пустых граничных условий без точек  $0, N$  инвариантной мерой будет бернуллиевская мера. В последнем же случае наоборот, инвариантная мера нетривиальна и не будет бернуллиевской.

Нахождение в явном виде последней возможно с помощью довольно сложного алгебраического метода, см. обзор [44].

### 4.2.3 Приближение Больцмана

**Независимые частицы** Как и в идеальном газе, частица определяется точкой  $(x, v)$  фазового пространства  $\{(x, v)\} \in R^d \times R^d$ , где  $x$  - вектор координаты,  $v$  - скорость частицы. В бесконечном объеме система точечных частиц задается мерой на всех локально конечных (то есть конечных на каждом ограниченном подмножестве) подмножествах. Для заданной меры  $\mu$  обозначим  $n(A)$  - среднее число частиц в ограниченном объеме  $A$  фазового пространства. Если существует функция  $f(x, v)$  такая что

$$n(A) = \int_A f(x, v) dx dv$$

то  $f$  называется одночастичной (корреляционной) функцией распределения  $\mu$ .

Пусть в бесконечном объеме в момент  $t = 0$  задано распределение  $\mu$  с одночастичной корреляционной функцией  $f(0, x, v)$ . Нас интересует как будет меняться эта корреляционная функция со временем, если движение частиц свободное, как в идеальном газе. Имеем

$$f(t + \delta; x, v) = f(t; x - v\delta, v) \tag{31}$$

Вычитая  $f(t; x, v)$  из обеих частей этого равенства, деля на  $\delta$  и переходя к пределу  $\delta \rightarrow 0$ , получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad (32)$$

Единственным решением задачи Коши для этого уравнения будет

$$f(t, x, v) = f(0, x - vt, v)$$

Пусть, кроме того, каждая частица может независимо выйти из системы или привлечь одну частиц в объем  $dx dv$  с интенсивностями  $\kappa_{in,out}(t, x, v)$  соответственно. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \kappa(t, x, v)f, \kappa = \kappa_{in} - \kappa_{out}$$

**Упр. 79** Проверить, что, если  $k$  не зависит от  $t$ , также есть явное решение

$$f(t, x, v) = f(0, x - vt, v) \exp\left(-\int_0^t \kappa(x - vs, v) ds\right)$$

Учет взаимодействия (столкновений) между частицами ведет к значительно более сложным проблемам. Самый простой случай - взаимодействие типа среднего поля в стохастической химической кинетике.

**Химические унарные реакции** Фазовое пространство здесь дискретное  $\{1, 2, \dots, Q\}$  то есть вместо функции  $f(t, x, v)$  здесь рассматриваются концентрации  $c_q(t)$  вещества типа  $q \in \{1, 2, \dots, Q\}$ , Уравнения для этих концентраций выводятся из следующего марковского процесса с непрерывным временем. Состояниями процесса являются векторы  $(n_1, \dots, n_Q)$ , где  $n_q$  - число частиц типа  $q$ .

Каждая частица типа  $q$  живет независимой жизнью и превращается в частицу типа  $q'$  с интенсивностью  $\lambda_{qq'}$ . Можно трактовать эту цепь двояко. Занумеруем частицы и следим за судьбой частицы с номером  $i$ . Каждая молекула с номером  $i$  крутится независимо, то есть последовательность ее состояний образует отдельную цепь Маркова, и вся система состоит из  $N$  одинаковых независимых конечных цепей Маркова с  $Q$  состояниями. Пусть  $p_{i,q}(t)$  - вероятность типа  $q$  у молекулы  $i$  в момент  $t$ ,  $\pi_q$  - ее стационарные вероятности, которые не зависят от  $i$ ,

$$\frac{dp_{i,q}(t)}{dt} = \sum_{q'} (p_{i,q'}(t)\lambda_{q'q} - p_{i,q}(t)\lambda_{qq'}) \quad (33)$$

Можно также следить за вектором  $(n_1, \dots, n_Q)$ . Здесь возможные переходы

$$(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_Q) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_Q)$$

с интенсивностью  $n_q \lambda_{qq'}$ . Общее число частиц  $N$  сохраняется, но числа  $n_q$  конечно не сохраняются. Введем концентрации

$$c_q^{(N)}(t) = \frac{n_q(t)}{N}, E c_q^{(N)}(t) = \frac{1}{N} E n_q(t) = \frac{1}{N} \sum_i p_{i,q}(t), c_q(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E n_q(t)}{N}$$

Предполагая, что последний предел существует для  $t = 0$ , очевидно, что он существует и для всех  $t > 0$ . Суммируя по  $i$  в (33) получаем уравнения

$$\frac{dc_q(t)}{dt} = \sum_{q'} (c_{q'}(t)\lambda_{q'q} - c_q(t)\lambda_{qq'})$$

Это основные уравнения химической кинетики для концентраций  $c_i(t)$ , линейные для унарных реакций.

**Понятие о бинарных реакциях** Каждая пара молекул с номерами  $i \neq j$  с вероятностью  $\lambda_{ij \rightarrow kl} dt$  переходят в пару  $k, l$ . Тогда в терминах вектора состояний  $(n_1, \dots, n_Q)$  имеем возможные переходы

$$(n_1, \dots, n_i, \dots, n_k, \dots, n_j, \dots, n_l, \dots, n_Q) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k + 1, \dots, n_j - 1, \dots, n_l + 1, \dots, n_Q)$$

с интенсивностью  $\frac{1}{N} n_i n_j \lambda_{ij \rightarrow kl}$ .

Уравнениях классической химической кинетики: для всех  $t > 0$  существуют пределы

$$c_i(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i^{(N)}(t)}{N}$$

если это имеет место в начальный момент. Эти предельные концентрации удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dc_k(t)}{dt} = \sum_{i,j,l} (c_i(t)c_j(t)\lambda_{ij \rightarrow kl} - c_k(t)c_l(t)\lambda_{kl \rightarrow ij}) \quad (34)$$

Многое о стохастической химической кинетике можно почитать в [30] и в ссылках там же.

**Локальные столкновения** Приближение Больцмана для систем с локальным взаимодействием выглядит аналогично, но получить строгие результаты значительно сложнее (в литературе можно найти доказательства в слишком сильных предположениях и наброски доказательств в менее ограничительной ситуации). Дело в том, что ньютоновская динамика частиц не случайна, и при всех известных параметрах, результат столкновения также не случаен. Но при столкновении частиц, помимо их координат, скоростей и потенциала взаимодействия, есть другие неизвестные параметры. Например, если это сферические частицы, то часто берется единичный вектор  $\omega$  между центрами двух сфер в момент столкновения. Этот вектор случаен, он зависит от всей истории системы, что и создает большие проблемы при попытках вывода уравнения Больцмана. Более общо, могут быть другие параметры, которые мы обозначим  $\omega$ . В физике же принимается гипотеза молекулярного хаоса (Stosszahl ansatz) о распределении  $\mu(\omega)$  параметров  $\omega$ . Тогда уравнение Больцмана условно можно представить как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \int d\mu(\omega) T_\omega(v_1, v'_1, v, v') (f(x, v_1) f(x, v'_1) - f(x, v) f(x, v')) dv_1 dv'_1 dv'$$

Новое в сравнении с (34) состоит в непрерывности фазового пространства, где скорости являются аналогами типов частиц, ядре  $T$  - аналоге интенсивностей переходов, а также в локальном параметре  $x$ , изменение которого определяется вторым членом левой части.

#### 4.2.4 Гидродинамическое приближение

Популярный пример: системы с реакциями и диффузией. В каждой точке  $x$  решетки  $Z^d$  может находиться  $n_q(x)$  частиц типа  $q = 1, 2, \dots, Q$ . Микродинамика системы определяется несколькими независимыми марковскими процессами. Во-первых в каждой точке задан марковский процесс  $\xi_x = (n_1(x), \dots, n_Q(x))$  - система химических реакций в смысле раздела 2, пусть  $\lambda_r$  - интенсивности химических реакций  $r = 1, \dots, R$ . Эти процессы независимы и одинаково распределены. Кроме того, каждая частица совершает простое независимое блуждание с непрерывным временем, однородному по времени и по пространству. Параметры  $\lambda_{e,q}$  - интенсивности скачков, где  $e$  пробегает  $2d$  единичных векторов вдоль осей, - могут зависеть от типа  $q$ . Предположим сначала, что вектора сноса

$$m_q = \sum_e e \lambda_{e,q} \neq 0$$

для всех  $q$ . Мы будем использовать скейлинг

$$x = \frac{X}{\epsilon}, t = \frac{\tau}{\epsilon}, \lambda_r \rightarrow \epsilon \lambda_r$$

где  $X \in R^d, \tau \in R$  - макропеременные. Число частиц в любой точке имеет порядок  $O(1)$ . Этот скейлинг говорит в частности, что за конечное макровремя  $\tau$  в данной точке происходит число  $O(\tau)$  реакций.

**Theorem 11** Пусть в начальный момент  $t = 0$  задано начальное распределение Пуассона

$$\prod_x \prod_q \frac{(b_{q,x})^{n_q(x)}}{n_q(x)!} \exp(-b_{q,x})$$

частиц на решетке такое что  $b_{q,x} = c_q(0, \epsilon x)$  для некоторых гладких ограниченных функций  $c_q(0, X), X \in R^d$ . Тогда при  $\epsilon \rightarrow 0$  для любой функции  $x(\epsilon) : R_+ \rightarrow Z^d$  таких, что  $\epsilon x(\epsilon) \rightarrow X$ , существуют пределы концентраций

$$c_q(\tau, X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle n_q(\frac{\tau}{\epsilon}, x(\epsilon)) \rangle$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial c_q}{\partial \tau} = -m_v \frac{\partial c_q}{\partial X} + F_v(c_1, \dots, c_V) \quad (35)$$

где функции  $F_v$  такие же как правые части уравнения (34).

Коротко, идеи доказательства таковы. Прежде всего, если все реакции унарны, этот результат можно доказать самому. Кроме того, легко доказать, что при отсутствии реакций независимая система частиц удовлетворяет уравнению (35) без последнего члена. Реакции же идут существенно медленнее транспорта, и за конечное макровремя их число в каждой точке  $O(1)$ . Поэтому, в промежутках между реакциями распределения разных типов частиц в каждой точке стремятся быть независимыми и распределенными по Пуассону с некоторыми интенсивностями  $c_{q,x}$ , благодаря быстрому перемешиванию при блуждании. Оценки сходимости предельных переходов основаны на том или ином варианте кластерных разложений.



Если все сносы  $m_v = 0$ , то нужен другой (диффузионный) скейлинг

$$x = \frac{y}{\epsilon}, t = \frac{\tau}{\epsilon^2}, \lambda_r(n) \rightarrow \epsilon^2 \lambda_r(n)$$

который отвечает разнице в шкалах времен реакции и теплового движения. При этом возникают уравнения реакции-диффузии, если мы принимаем интенсивности скачков в каждом направлении  $\lambda_{e,q} = \frac{1}{2d}$ ,

$$\frac{\partial c_v}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \Delta c_v + F_v(c_1, \dots, c_V)$$

## Список литературы

- [1] В. Феллер. Введение в теорию вероятностей, том 1. Москва. 1967.
- [2] С. Карлин. Основы теории случайных процессов. Москва. 1971.
- [3] А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. Москва. Наука. 1996.
- [4] А. Ширяев. Вероятность. Москва. 1980.
- [5] М. Лозв. Теория вероятностей. Москва. 1962.
- [6] В. Малышев, М. Меньшиков, Е. Петрова. Лекции по теории вероятностей. 1997. МГУ.
- [7] Н. Н. Лузин. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. Москва. 1953.
- [8] M. Li, P. Vitanyi. An introduction to Kolmogorov complexity and its applications. Springer, 1997.
- [9] В. А. Успенский. Четыре алгоритмических лица случайности. 2006. Москва.
- [10] J. Hertz, A. Krogh, R. Palmer. Introduction to the theory of neural computation. Addison Wesley. 1991.
- [11] E. Scheinerman. Invitation to dynamical systems. Prentice Hall, 1995.
- [12] И. Корнфельд, Я. Синай, С. Фомин. Эргодическая теория. Москва. 1980.
- [13] А. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем, тома 1,2. Москва. 1999.
- [14] K. Athreya, P. Ney. Branching processes. Springer, 1972.
- [15] F. Solomon. Random walks in a random environment. Annals of Probability, 1975, v. 3, No, 1, 1-31.
- [16] И. А. Игнатюк, В. А. Малышев, В. В. Щербаков. Влияние границ в задачах о больших уклонениях. Успехи мат. наук, 1994, т. 49, вып. 2, 43–102.
- [17] B. Bollobas. Random Graphs. 1985. Academic Press.
- [18] М. Лидбеттер, Г. Линдгрэн, Х. Ротсен. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. Москва. 1989.
- [19] Г. Маккин. Стохастические интегралы. Москва. Мир. 1972.
- [20] G. Lawler. Intersections of random walks. Birkhauser. 1991.
- [21] G. Fayolle, V. Malyshev, M. Menshikov. Topics in the constructive theory of countable Markov chains. Cambridge Univ. Press, 2008, 2nd edition.
- [22] V. Malyshev. Networks and dynamical systems. Adv. Appl. Probability., 1993, v. 26, pp. 140-175.
- [23] В. В. Козлов. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. 2002. Москва-Ижевск.

- [24] G. Grimmett. Percolation. 1999. Springer.
- [25] Х. Кестен. Теория просачивания для математиков. Москва. 1986.
- [26] Дж. Кемени, Дж. Снелл, А. Кнепп. Счетные цепи Маркова. Москва. 1987.
- [27] В. А. Малышев, Р. А. Минлос. Гиббсовские случайные поля. Москва. 1985.
- [28] В. Малышев. Случайные грамматики. УМН, 1998, том 53, вып. 2, 107-134.
- [29] В. Малышев. Вероятность вокруг квантовой гравитации: Планарная гравитация. УМН, 1999, том 54, вып. 4, 3-46.
- [30] В. Малышев, С. Пирогов. Обратимость и необратимость в стохастической химической кинетике. УМН, 2008, вып. 1,
- [31] Дж. Глимм, А. Джаффе. Математические методы квантовой физики. 1984. Москва.
- [32] В. Малышев. Ультрафиолетовые проблемы в теории поля и многомасштабные разложения. В "Итоги науки и техники: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. ", АН СССР, ВИНТИ, Москва, 1986, том 24, стр. 111-186.
- [33] В. Малышев. Введение в эвклидову квантовую теорию поля. МГУ. 1985.
- [34] W. Hackbusch. Multi-grid methods and applications. Springer. 1985.
- [35] S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on surfaces and their applications. 2003.
- [36] R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield. Dimers and amoebae. Preprint. 2003.
- [37] R. Kenyon. Introduction to dimer models. 2003. Preprint.
- [38] У. Гренандер. Вероятности на алгебраических структурах. Москва.
- [39] M. Mehta. Random Matrices. Elsevier. 2004.
- [40] L. Pastur. Spectral and probabilistic aspects of random matrix models. 1995.
- [41] R. Cerf. Asymptotic convergence of genetic algorithms. Adv. Appl. Probability, 1998, v. 30, No. 2; 521-550.
- [42] G. Paun, G. Rozenberg, A. Salomaa. DNA computing. 1998. Springer.
- [43] R. Azencott (Ed.) Simulated Annealing. 1992. John Wiley.
- [44] B. Derrida, M. Evans, V. Hakim, V. Pasquier. Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation. J. Physics A, 1993, v. 26, No. 7, 1493-1517.

## Предметный указатель

- абсолютная непрерывность, 43
- алгебра множеств, 7
- алгоритм Метрополиса, 34
- автомодельность, 56, 61
- борелевское множество, 7
- числа Фибоначчи, 9
- давление, 53
- дерево, 11
- диффузионный процесс, 48
- динамика Глаубера, 33
- двойственный процесс, 68
- элементарное событие, 12
- энергия, 17
- энтропия, 15
- эргодическая цепь, 49
- эргодическая теория, 8
- формула полной вероятности, 16
- функционал действия, 43
- функция Ляпунова, 50
- гармоническая функция, 51
- генетические алгоритмы, 37
- граф, 4
- грамматика, 10
- характеристическая функция, 13
- хейронные сети Литтла-Хопфилда, 5
- имитация отжига, 37
- индуцированная цепь, 40
- инвариантная мера, 4
- кластеры, 54
- кластерная динамика, 65
- конечный автомат, 4
- корневое дерево, 11
- корреляционные функции, 18
- квадратичное рекуррентное соотношение, 11
- линейные отображения мер, 5
- линейные рекуррентные соотношения, 9
- локальная предельная теорема, 14
- марковские управляемые процессы, 36
- мартингал, 41
- матрица ковариаций, 29
- мера, 4
- мера Гиббса, 18
- моменты, 13
- нелинейные цепи Маркова, 6
- неприводимая цепь, 17
- неравенство Чебышева, 13
- несущественное состояние, 17
- невозвратность, 49
- независимость, 12
- обратимость, 32
- орбита, 6
- основное состояние, 17
- поглощающее состояние, 17
- показатель Ляпунова, 42
- полином Вика, 31
- потенциал, 50
- распределение Максвелла, 52
- семиинварианты, 13
- схема охлаждения, 37
- сходимость по распределению, 27
- сходимость почти наверное, 27
- сигма-алгебра, 7
- сингулярность, 43
- скейлинг, 38
- слабая сходимость, 27
- случайная величина, 12, 26
- событие, 12
- статистическая сумма, 18
- стохастический дифференциал, 47
- свободная энергия, 18
- свободная некоммутативная группа, 11
- теорема Макмиллана, 15
- теорема Радона-Никодима, 43
- трансфер-матрица, 18
- транзиентность, 49
- уравнение Ньютона с трением, 39
- уравнение состояния, 53
- условие детального баланса, 32
- условное математическое ожидание, 40
- вероятностное пространство, 12
- вероятностное распределение, 12
- виковская экспонента, 31
- вложенная цепь, 25
- возвратность, 49
- закон больших чисел, 14
- замена меры, 44
- замкнутые корреляционные уравнения, 67