

Три пути математика по автодорогам

В. А. Малышев, мехмат МГУ

ноябрь, 2011

Путь 1

слабый контакт с внешним миром. **Голая** (чистая, абстрактная, фундаментальная, академическая) наука = СТАТЬИ+КНИГИ. Риски - полная изоляция от реальной жизни

Далее идут три примера научного подхода к автопотокам на разных шкалах пространства-времени

1. строение малого (индивидуальный комфорт) или большого (статфизическое равновесие) кластера машин
2. средняя скорость машины на очень длинном времени
3. граф потоков произвольной сложности

Всегда ли нужны ли глубокие теории ?

Одномерный поток кластера машин (до его распада)

v - общая скорость,

d_i - длина машины с номером i ,

x_i - координата (переднего бампера) машины i

$$\dots < x_{i+1}(t) < x_i(t) < x_{i-1}(t) < \dots$$

расстояние машины i до предыдущей

$$d_i^+(t) = d_i^+(v(t)) = x_{i-1}(t) - d_{i-1}(t) - x_i(t),$$

плотность кластера из N машин в заданный момент

$$\rho = \frac{N}{\sum_{i=1}^N (d_i + d_i^+(v))},$$

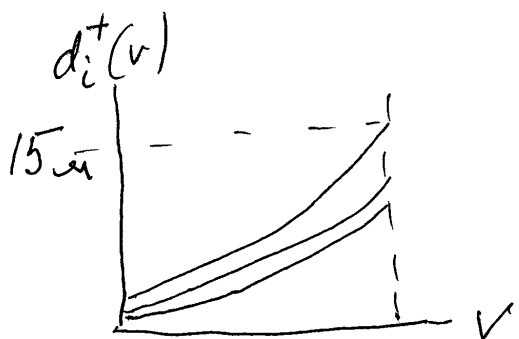
поток

$$J(v) = v\rho(v) = \frac{Nv}{\sum_{i=1}^N (d_i + d_i^+(v))}$$

Все величины v, ρ, J, d_i, d_i^+ наблюдаемы и статистически вычислимы. Они зависят от многих факторов - психики водителей (в регионе, стране), времени года и суток, погоды, качества дорог и т.д.

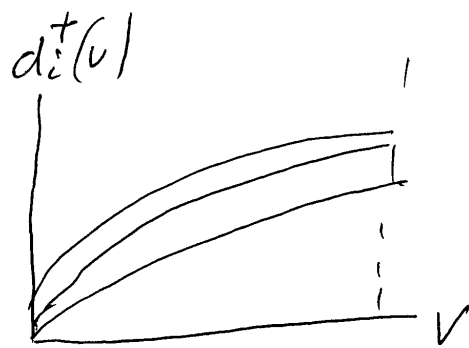
Проблема $\rho = \rho(v)$ меняется при изменении скорости, и $J = J(v)$ может даже не быть монотонной функцией - почему ? Несколько вариантов объяснения

1) Самое простое основано на взгляде на транспорт как на **экспериментальную науку** (как физика но не выводимая из физики) и на **экспериментальном наблюдении** - психика водителей разная - водитель i старается держать комфортное расстояние $d_i^+(t)$ до предыдущей машины. Предполагается, что скорость кластера машин меняется медленно и психика водителя реагирует намного быстрее изменения скорости



$$120 \frac{K \cdot 10^{-6}}{200C}$$

как $Cv^\alpha, \alpha > 1$



$Cv^\alpha, \alpha < 1$



Обозначим средние

$$d == \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i, d^+ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^+$$

Если скажем

$$d^+ = Cv^\alpha \implies \rho = \frac{1}{d + Cv^\alpha}$$

то уравнение

$$0 = \frac{dJ}{dv} = \frac{1}{d + Cv^\alpha} - \frac{C\alpha v^\alpha}{(d + Cv^\alpha)^2} = \frac{d + Cv^\alpha(1 - \alpha)}{(d + Cv^\alpha)^2}$$

и значит поток J не будет монотонным при $\alpha > 1$. Точка максимума

$$v = \left(\frac{d}{C(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Другие объяснения

2) отказ от предположения о медленном изменении скорости - тогда можно вводить разные дифф. уравнения в том числе с запаздыванием (по типу работ А. Буслаева)

3) объяснение из чистой математики - процессы типа exclusion process - здесь все водители ведут себя одинаково - каждый делает скачки на 1 через случайные независимые времена (М. Бланк)

4) из гидродинамики, ...

Вопрос - почему многие объяснения ведут к похожим результатам ?

Ответ вопросом на вопрос - почему вероятность что то объясняет в физике, хотя основные законы физики детерминированы.

Статистическая физика одномерных потоков

- есть вывод уравнения Бюргера из **случайной динамики** типа exclusion process. Пока не будет строгого вывода кинетики или гидродинамики из детерминированного движения машин, то микроподход (машины) и макроподход (потоки) останутся разными мирами. Какие трудности?
- Типичный гамильтониан в физике - "максвелловский" член + потенциальная энергия взаимодействия

$$\sum_i m \frac{v_i^2}{2} + \sum_i V(x_{i-1} - x_i)$$

Для автопотоков ничего подобного быть не может (в частности нет такого разброса скоростей).

- Скорее гамильтониан должен быть таким

$$C \sum_i \frac{(v_{i-1} - v_i)^2}{2} + \sum_i V(x_{i-1} - x_i - d_i^+(v_{i-1}))$$

где $d_i^+(v_{i-1})$ - заданные функции, разные, как в статфизических моделях со случайной (замороженной) средой. Первый член дает выравнивание средних скоростей в потоке, второй - индивидуальный комфорт (минимум затрачиваемой энергии). Для этого гамильтониана можно изучать как распределение Гиббса так и динамику малых отклонений от равновесия.

Машина на шоссе в дальнем странствии

Снижение средней скорости быстрой машины из-за медленных машин
Автотрасса - действительная ось. Положение машин задается точками

$$\dots < x_i(t) < x_{i-1}(t) < \dots$$

(потоки считаются не очень плотными, поэтому длина машины роли не играет)

Медленные машины не встречают на своем пути препятствий и проходят свой путь с постоянной скоростью v_2 . Прибытие на шоссе с интенсивностью $\lambda dx dt$. Длины r_i предписанных им маршрутов независимы с функцией распределения $G(x)$ и средним m_G .

быстрая машина - скорость $v_1 > v_2 > 0$ до тех пор пока не догонит впереди идущую медленную машину. После этого быстрая машина движется вместе с этой медленной машиной j некоторое случайное время τ_j (ждет возможности обгона) и затем обгоняет ее, сразу набирая скорость v_1 . Основное предположение состоит в том, что τ_j независимы и имеют функцию распределения $F(s)$.

Здесь ответ СЛОЖНО зависит от F и G .

Введем случайные величины β с плотностью распределения $g(x) = m_G^{-1}(1 - G(x))$ и $\gamma = \min(v_2\tau_1, \beta)$, где τ_1, β считаются независимыми. Пусть

$$d = \lambda m_G (v_2^{-1} - v_1^{-1}), c = E\gamma$$

Теорема С вероятностью 1 при длине пути быстрой машины $x \rightarrow \infty$ среднее время прохождения пути x

$$T(x) \sim \frac{x}{v_1} \alpha, \alpha = \frac{1 + dc v_1 v_2^{-1}}{1 + dc} > 1$$

или средняя скорость \bar{v}_1 быстрой машины

$$\frac{x}{T(x)} \rightarrow \bar{v}_1 = \frac{1 + dc}{1 + dc v_1 v_2^{-1}} v_1$$

Замкнутая транспортная сеть с простейшей динамикой на графе любой сложности

- Граф G города с улицами и перекрестками и средним числом машин M в УСТАНОВИВШЕМСЯ режиме
- вершины $v \in V$ - перекрестки, $|V| = N$ - число вершин, множество L - ребер (улиц)
- Матрица маршрутизации $P = (p_{ij})$ - стохастическая, то есть для всех i

$$\sum_j p_{ij} = 1$$

p_{ij} - доля машин из числа подъезжающих к вершине i , которым надо поворачивать к вершине j .

- μ_i - пропускная способность вершины (среднее число машин, которые может пропустить вершина i за единицу времени) -

Алгоритм, дающий распределение пробок

1. все параметры N, M, p_{ij}, μ_i допускают статистическое оценивание
2. решаем систему для интенсивностей ρ_i входящих потоков в вершины (в стационарном режиме они равны выходящим)

$$\sum_{i=1}^N \rho_i p_{ij} = \rho_j, \quad j = 1, \dots, N$$

3. вычисляем нагрузки

$$r_i = r_{i,N} = C_N^{-1} \rho_i \mu_i^{-1}$$

с нормировочным множителем

$$C_N = \max_i \rho_i \mu_i^{-1}$$

4. строим выборочную меру на $[0, 1]$

$$I_N(A) = \frac{1}{N} \sum_{i:r_i \in A} 1, \quad A \subset [0, 1]$$

5. вычисляем

$$\lambda_{cr} = \int_0^1 \frac{r}{1-r} dI_N(r)$$

6. Тогда при $\lambda < \lambda_{cr}$ пробок не будет, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ будут. Иначе говоря, пробок можно избежать только уменьшением λ , то есть уменьшением числа машин.

Математическая формулировка того же - критическая точка

В математике все формальнее

- Математика рассматривает пределы в определенном скейлинге. У нас $M = M(N)$, $N \rightarrow \infty$ и

$$\frac{M}{N} \rightarrow \lambda = \text{const}$$

- надо что то предположить о регулярности последовательности графов - выборочные меры слабо сходятся $I_N(A) \rightarrow I(A)$ и положим

$$\lambda_{cr} = \lim_{z \rightarrow 1-} h(z) = \lim_{z \rightarrow 1-} \int_0^1 \frac{r}{1-zr} dI(r)$$

- самое главное - о структуре самой случайной динамики машин - здесь много вариантов, в основе которых лежат многие ранние работы по системам связи.

Теорема

Если $\lambda < \lambda_{cr}$ то средние времена ожидания на вершинах равномерно ограничены по N и по $1 \leq i \leq N$.

Если $\lambda \geq \lambda_{cr}$ то пробки будут в том узле, где нагрузка максимальна, то есть в этом узле средние времена ожидания растут при $N \rightarrow \infty$

V. Malyshev, A. Yakovlev. Condensation in large closed Jackson networks. Annals of Applied Probability, v. 6, No. 1 (1996), 92-115. (этот общий результат появился в связи с системами связи)

Путь 2 - контакты с учеными-транспортниками на уровне транспортной науки

Три принципа, которых надо придерживаться

- Транспортная наука - не математика. Для решения транспортных задач далеко не всегда нужны глубокие математические теории. Часто достаточно **школьной математики**, Пример пренебрежения школьной математикой - дороги типа бутылок разной формы.
- Без здравого смысла может возникнуть только математика бессмысленная для транспорта. Пример **отсутствия здравого смысла** - переполнение машинами узкого пространства или заполнение машинами всего пространства. Лет 50 назад читал я фантастический рассказ, вроде Западного автора, - вся Земля в асфальте, ШУМ и ГАРЬ. Пешеходы жмутся по краешкам, а если выскочат на асфальт - ассы с удовольствием давят их, как **НЕСОВРЕМЕННЫХ** людей. Тогда я посмеялся (такое трудно было представить), но почему-то фабула запомнилась. А сейчас я вижу это на так называемой Большой Ленинградке. В Париже нет такой жадности и глупости как «Большая Ленинградка», зато есть удобные Большие АвтоТрассы вне городов.
- В транспортной математике не менее 20 **самых разных направлений**. Центральные транспортные задачи требуют их синтеза. Каждый может выбрать - множество мелких целей, шлифовка обобщений или объединенная транспортная наука ? Надо сначала **перечислить** науки о транспорте...

Фундаментальные модели - потоки и перенос масс (модели равновесия)

идущие от классической задачи Монжа

Прослеживается четкое отнесение каждой книги и статьи к одной из $4=2 \times 2$ групп

1. на дискретных графах или (как было у Монжа) на непрерывном пространстве
2. только прикладные задачи, прикладной язык или чистая математика

Прикладная математика и компьютерные модели без теорем и математических результатов Barnhart, Laporte (Eds.) Handbooks in Operations Research and Management Science. v. 14. 2007.

Potts R., Oliver R. Flows in transportation networks. 1972

Лютаев. Модель Владивостока.

Multi-Agent Systems For Traffic and Transportation Engineering. 2009. Rachev S., Ruschendorf L. Mass transportation problems, V.2, 1998

Трофимов, Рахмангулов, Корнилов. Методы развития промышленного ж/д транспорта. 2004.

Швецов. Математическое моделирование транспортных потоков. 2003.

E. Cascetta. Transportation system analysis. 2009. Springer.

Goulias (Ed.) Transportation System Planning. 2003.

Vehicular Networks. From Theory to Practice. 2009.

Handbook of Transportation (Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol.14), 2006.

Наоборот - чистая математика, много теорем Ambrosio L., Brenier Y., Buttazzo G., Villani C. Optimal Transportation and Applications. 2001
Bernot M., Caselles V., Morel J.-M. Optimal transportation networks.. Models and theory
Buttazzo Optimal urban networks via mass transportation. 1961
Ford, Fulkerson. Flows in networks. 1952
Rachev S., Ruschendorf L. Mass transportation problems, V.1, 1998.
Villani C. Optimal transport, old and new. Springer, 2008
Bellman, ... Mathematical aspects of Scheduling. 1982.
Е. Степанов. Математические модели оптимизации транспортных сетей и потоков. 2005.

Все это тесно связано с геометрией, Перед изучением всех этих книг полезно прочитать - Протасов. Максимумы и минимумы в геометрии.

Во всех этих моделях НЕТ ДИНАМИКИ. Но нет и собственно аналитической математики - скейлингов, пределов и т.д.

Скорее это стиль **макроэкономики**, например, водитель - игрок, выбирающий стратегию - но многие водители хотят просто спокойно ехать.

Модели с ДИНАМИКОЙ

Транспорт в физике, химии, биологии (скорее физический уровень чем математический)

Brenner H., Edwards D.A. Macrotransport processes. 1993

Mazo. Statistical mechanical theories of transport processes

Mueller S.C., Parisi J., Zimmermann W. (eds.) Transport and structure. Their competitive roles in biophysics and chemistry. Springer, 1999

Willardson R.K., Beer A.C. (eds.) Transport phenomena. 1975

Гидродинамические модели Пригожин, Helbing, Четверушкин, Смирнов, ...

Детерминированные и стохастические микромоделли где основной объект - отдельная машина Хейт. Математическая теория транспортных потоков. 1963.

работы по массовому обслуживанию и сетям связи (Афанасьева, Булинская, ..., ...) и много других работ

Вывод

Единой транспортной математики пока не существует.

Одна из задач - классификация моделей по шкалам пространства и времени.

Начальная задача, которая могла бы объединить многие области транспортной науки - каково допустимое число машин в Москве? Для этого нужно собирать информацию. Что выводит на

Путь 2 - контакты с учеными-транспортниками на уровне сбора информации, статистических исследований), on-line видеонаблюдений и создания алгоритмов, программ

Как бы допустимое число машин не считать, абсолютно необходимо одно из двух

1. матрица маршрутизации $P = (p_{ij})$, то есть статистика КОЛЛЕКТИВНОГО движения на перекрестках

2. информация об ИНДИВИДУАЛЬНЫХ маршрутах и их распределение во времени (т.н. корреспонденции)

По России сложнее - нужна еще умная и быстрая база данных о СУЩЕСТВУЮЩИХ дорогах.

Сбор данных - корреспонденции

информация о существующих индивидуальных маршрутах - везде есть комбинаторные оптимизационные задачи для математика

1. прямой опрос населения
2. сведения с Интернет-сайтов
3. однодневная акция - карточки на бесплатный проезд на один день, которые надо отметить при входе и выходе
4. по сканированию мобильных телефонов - сколько человек времени проводит в разных районах Москвы
5. по пересадочным пунктам - известно сколько с какого узла на какой, неизвестна с какого из двух направлений и на какое из двух направлений

Составление баз данных

ГИБД_ТСР - глобальной интеллектуальной базы данных транспортной сети России. Интеллектуальность означает, что база должна быть снабжена набором программ для оперативного извлечения всевозможной информации, разного рода расчетов и оптимизации. Кроме того, эта база должна быть многомасштабной, пополняемой, развиваемой и функциональной. Эти термины разъясняются ниже.

Структура ГИБД Глобальный масштаб начинается с масштабируемой карты России. Минимальный масштаб - поселок, единичный участок дороги. В каждом масштабе к данной точке привязываются имеющиеся данные о локальной сети или дороге, а также 3D-картинки от лазерного сканирования с вертолета.

База должна быть пополняемой, то есть предусмотрена возможность пополнения данных и их изменения. Общая структура базы также должна допускать постоянное развитие. Функциональность означает доступность одновременно многим пользователям разного ранга, то есть с разными уровнями допуска к базе.

Помимо чисто фактологической структуры должны быть различные алгоритмы обработки данных, как например, вычислений, оптимизации и т.д.

Преимущества Общий тезис состоит в том, что любая серьезная НИР по глобальной транспортной системе без ГИБД **невозможна**. ГИБД должна быть, конечно, удовлетворять следующим требованиям:

- Она должна стать единым хранилищем данных, куда будут стекаться все сведения (включая видео, фото, графические и текстовые данные, а также предложения организаций и частных лиц о функционировании транспортной системы) о ТС и немедленно размещаться в структурированной и легко доступной форме
- Одним движением мышки чиновник, управленец, бизнесмен, ученый смогут получить любую информацию о состоянии транспортной сети в любом месте в любой момент времени
- Общее мнение состоит в том, что создание полной сети асфальтовых дорог невозможно в разумные сроки. Поэтому сведения о состоянии всех дорог, полученные лазерным сканированием с вертолета (я не знаю помогут ли здесь съемки со спутника), позволит разработать оптимальную концепцию развития дорожной системы - где то достаточно малого ремонта, а где то необходимо строительство новой трассы
- при открытии производства оптимизировать расходы на транспорт
- оптимизация индивидуальных маршрутов и другого трафика, В частности, взаимосвязь между авто, ж/д, водным и аэро транспортом
- быстрый расчет вариантов кратко и далеко срочных планов по развитию сети. В частности, позволит осуществлять постоянный мониторинг с целью предотвращения неэффективных работ и дублирования,
- быстрый перебор вариантов для инвестиций
- возможность быстрого интерактивного взаимодействия этой базы данных с другими базами данных, например, с экономическими базами

Немаловажно - информация о вреде машины как о вреде сигарет

1. вредные выбросы
2. Общественный транспорт спокойнее и быстрее
3. ДТП
4. заставленность дворов
5. Наконец, более важное - вредность самого вождения для здоровья - скованное сидячее положение, постоянно напряженное внимание, психологическое заикливание на узком (но СВОЕМ !?) внутреннем пространстве машины, Безмятежное вождение приводит к смертям на дороге
6. любая автоматизированная система управления, в применении к Москве, рискованна и только увеличит вероятность погружения Москва в полный хаос - угроза безопасности страны

Если информация уже есть - что дальше

Входим на

Путь 3 - контакт с чиновниками - потоки машин вытекают из потоков денег

Что значит допустимое число машин в городе ? Что такое комфортность в городе ?

Так как науки о контактах с чиновниками пока нет, то и стиль далее совсем другой.

Примеры предложений по пробкам в Москве

1. различные ИТС (то есть обслуживать растущее число машин) То есть ИТС хочет размышлять как в небоскребе сделать личные лифты или как в квартиру уместить много слонов. В то же время известен человек, который завел себе личный лифт в небоскребе
2. наоборот - уменьшить число машин - водитель платит за каждый километр пути. В первый раз я услышал такие мысли по ТВ от К. Собчак. Мадам очень печалилась, что заслуженные люди вынуждены покупать мигалки или нанимать скорую помощь, чтобы преодолевать пробки. Правда не было сказано как эту идею реализовать и куда деньги пойдут.
3. также уменьшить число машин на улицах, но не налогами, а уменьшением числа парковок. Это одновременно сделает дворы годными для жизни. Построить гаражи вдоль Окружной ж/д, которая, как я надеюсь, будет интенсивно развиваться (вместе со всем общественным транспортом). Нетрудно доехать до гаража на общественном транспорте и взять машину, если надо ехать за город.

Быстрый и дешевый вариант ликвидации пробок - упорядочить парковки

ПОСТУЛАТ - по слишком густо заселенным местам, как например многие части Москвы, не надо ездить на личном транспорте. Москва должна быть городом, где приятно жить. Мечта дать каждому москвичу парковку около дома и около работы. утопична. Надо это **ЧЕСТНО** признать.

Необходимы неотложные меры против поездок из одного пункта Москвы в другой на личном транспорте Проблема пробок - это прежде всего проблема парковок - на улицах, во дворах, проблема личного стоячного места. Не будет парковок - это сделает бессмысленными (или очень дорогими) поездки по Москве .

Установить знаки - нет парковки - в умно выбранных местах Москвы. Например, в центре, около станций метро, около супермаркетов в городе, и т.д. Здесь нужна будет статистика потоков, парковок и индивидуальных поездок. А также конечно работа математиков по выбору этих мест - сложные комбинаторные задачи. В выбранных местах армия контролеров-обходчиков (это еще и рабочие места), раздающих большие штрафы, как например в Париже.

Для этого **не надо знать корреспонденции**, а только распределение по площади людей без парковок, что гораздо проще. Также надо знать свободные места для строительства и придумать алгоритм соответствия людей и парковок.

С другой стороны эти меры не должны влиять на поездки москвичей за город и обратно к своему дому Во дворах машин быть не должно, а выезды за город - перехватывающие парковки вокруг окружной железной дороги.

Есть еще проблема умного рассредоточения предприятий и бизнес центров, которые желательно вывести за МКАД, а освободившиеся небоскребы пустить под квартиры или доходные дома.

Наука о распределении взятых налогов

Можно брать налоги с водителей. Даже с собственников машины. Но какие и как их вычислить - тоже нужна наука, которая находится в зачаточном состоянии. Если есть вообще - математики точно нет.

А то получится, что расходы по контролю намного превысят сами налоги на километраж. Можно брать и другие налоги (или штрафы - кому как нравится)

- за проезд из А в Б - как встарь братья-разбойники
- за простой машины - чтобы люди больше бензина покупали
- больше платишь за машину БЕЗ вмонтированного налогового устройства
- платишь за подъезд к важному месту - как за въезд в центр Лондона
- не за километр а за зачищенную машиной площадь, чтобы можно было по своему дачному участку ездить бесплатно
- за каждый обгон, чтобы люди ехали спокойнее
- за слишком дешевые машины
- за выбор плохого маршрута и за остановки без цели
- за хождение пешком по автомобильным местам и т.д.

Наука должна начинаться с того, что налоги есть разных типов - по степени жизненных ограничений. Без выбора - платишь иначе будет плохо. С потерей части жизни - не знаешь что такое машина или даже не ходишь пешком. С потерей некоторых удовольствий - как например платные дороги. Должны быть дублиеры платных дорог - должен быть выбор. С парковками другое дело - ты можешь иметь дешевую парковку, но не рядом с московской квартирой. Так же как и сама дача должна быть на достаточном удалении от Москвы - иначе будешь плохим воздухом дышать - тоже ВЫБОР.