

Коллективное поведение в многомерных вероятностных моделях синхронизации

А.Д. Манита*

8 января 2007 г.

Аннотация

Мы рассмотрим специальный класс многомерных случайных процессов, которые применяются при анализе стохастических алгоритмов параллельных и распределенных вычислений. Мы опишем, какие содержательные математические проблемы возникают при этом, а также обсудим возможные подходы к их решению. Первая часть работы содержит краткий обзор математических моделей и имеющихся строгих результатов. Во второй части для базовой стохастической системы N стохастических частиц с изотропной k -частичной синхронизацией изучен предел, когда число частиц N и время $t = t(N)$ растут к бесконечности. Доказано наличие трех временных зон изменения $t(N)$, где поведение системы имеет качественно различный характер.

Ключевые слова: сети параллельных и распределенных вычислений, системы взаимодействующих частиц, многомерные марковские процессы, стохастическая синхронизация, k -частичные взаимодействия, модели среднего поля, гидродинамические пределы

1 Прототип математической модели

Некоторая большая вычислительная задача выполняется на нескольких относительно автономных вычислительных устройства (процессорах). Идея состоит в том, чтобы каждый из процессоров работал по возможности независимо и лишь изредка обменивался информацией с другими вычислительными устройствами. Так как информация, передаваемая устройством, содержит данные промежуточных вычислений, которые должны быть учтены другими устройствами, важно уметь отслеживать актуальность получаемых данных. Для этого с каждым процессором i связывают некоторую неотрицательную переменную x_i , называемую *внутренним* или *локальным временем* процессора. Ее смысл состоит в том, чтобы указывать на каком этапе вычислений с точки зрения общей задачи находится данное вычислительное устройство. Абсолютным временем называют реальное физическое время t . Обмен информацией между процессорами осуществляется при помощи пересылки сообщений. Принципиальным является то, что передаваемые сообщения содержат временные метки (time-stamped messages [2, 14]). Так например, сообщение m_{kj} , отправленное в абсолютный момент

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных исследований (гранты 06-01-00662 и 05-01-22001). Почт. адрес: Россия, 119992, Москва, ГСП-2, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет. Эл. почта: manita@mech.math.msu.ru
Исправленная версия

времени s с процессора k на процессор j , кроме всего прочего, содержит в себе значение $x_k(s)$, то есть локальное время отправителя в момент отправки сообщения. В настоящей работе мы всегда считаем, что сообщения доходят до адресата мгновенно. В реальности это не так, но мы сознательно ограничим себя ситуацией, когда время доставки сообщений пренебрежимо мало по сравнению с интервалами, на которых происходят другие изменения в системе.

По объективным причинам добиться согласованной работы различных процессоров довольно сложно, так как в силу неоднородности внутри списков операций, отнесенных к выполнению различными процессорами, темп их продвижения оказывается различным. При этом оказывается, что течение локальных времен процессоров не является равномерным ни по отношению друг к другу, ни по отношению к абсолютному времени. Противоречивая ситуация может сложиться тогда, когда процессор j в момент времени s получает сообщение m_{kj} с временной меткой $x_k(s)$, причем $x_k(s) < x_j(s)$, то есть сообщение m_{kj} является устаревшим (неактуальным) по отношению к текущему состоянию процессора j . Следовательно, необходим механизм, который будет обеспечивать должную координацию локальных времен, чтобы гарантировать корректный обмен данными между различными процессорами. Существует два подхода к решению этой проблемы. Первый из них называется *синхронным* [14], он предполагает наличие *центрального* управляющего устройства, которое следит за состояниями всех процессоров и блокирует работу тех, которые еще не получили (но могли бы получить) сообщения от других устройств. То есть, каждый следующий шаг в выполнении задачи делается процессором тогда, когда есть полная уверенность в том, что в будущем он не получит сообщений от устройств с меньшим локальным временем. Этот способ сложен в реализации, особенно при большом числе вычислительных устройств в системе. Поэтому широкое распространение приобрел *асинхронный* подход [6, 14], имеющий характер саморегуляции системы. В нем согласование (синхронизация) происходит между процессорами, непосредственно задействованными в отправки или приеме сообщений. Асинхронный подход еще называют *оптимистическим*, так как в нем, при отсутствии в текущий момент сообщений, процессор всегда делает следующий шаг в выполнении алгоритма, надеясь, что и в будущем сообщения с меньшим локальным временем не поступят. То есть, каждый процессор выполняет свою работу автономно, и лишь в моменты, когда к нему поступают сообщения от других процессоров, он сравнивает свое локальное время с временной меткой поступившего сообщения. Если его локальное время меньше (или равно) временной метки поступившего сообщения, процессор продолжает выполнять свою текущую работу, а данные, содержащиеся в сообщении, будут обработаны в назначенный временной меткой момент. Если локальное время процессора больше временной метки поступившего сообщения, то производится принудительный *откат* (rollback) локального времени процессора до значения временной метки поступившего сообщения. Причина такого отката, очевидно, в том, что вычисления, произведенные процессором на интервале от временной метки до момента получения сообщения, не учитывали данные, которые были доставлены данным сообщением, а потому не являлись корректными. Теперь эти вычисления будут произведены повторно, с учетом полученных данных.

Заметим, что синхронизация двух соседних вычислительных устройств может привести к принудительному изменению состояний других устройств, стоящих далее по топологии связей системы параллельных вычислений. Действительно, предположим, что в момент s сообщение m_{kj} привело к откату $x_j(s + 0) = x_k(s)$. Как было сказано выше, вся работа, которая выполнялась процессором j в интервале времени, когда

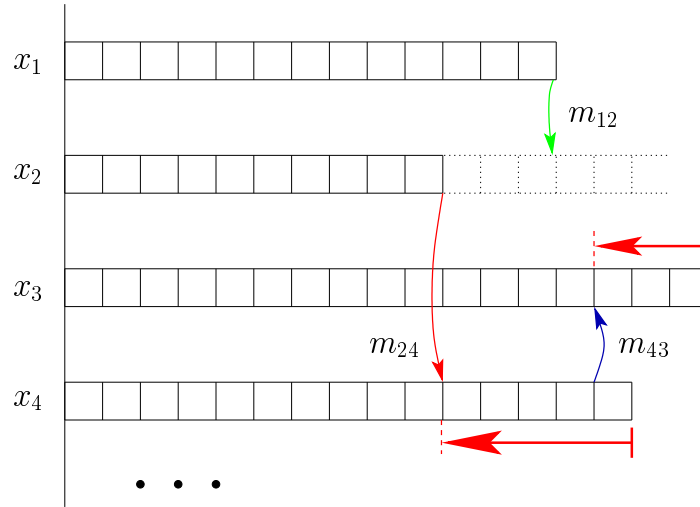


Рис. 1: Сообщение m_{12} не приводит к откатам, сообщение m_{24} вызывает откат процессора 4 и одновременно процессора 3 (каскадный откат)

его состояние принимало значения между $x_k(s)$ и $x_j(s)$, должна быть аннулирована. В частности, все сообщения, отправленные устройством j в этом интервале времени, должны быть объявлены недействительными. Пусть m_{jq} — одно из таких сообщений, и предположим, что оно было отправлено в момент времени $s' < s$. Тогда необходим откат процессора q до состояния $x_q(s+0) = x_q(s')$ и т.д. Таким образом, в момент синхронизации возможно мгновенное изменение состояний большого (не ограниченного априорной константой) числа узлов вычислительной сети, которое называют *каскадным откатом*.

2 Вероятностные модели

Особо отметим, что существует значительное число задач, где термин “синхронизация” употребляется по отношению к согласованию компонент, которое наступает в системе динамически, по истечению большого промежутка времени. Сюда можно отнести модели синхронизации осцилляторов в физике, моделирования трафика в сетях передачи данных и некоторые биологические модели. Все эти вопросы остаются за рамками настоящей статьи. У нас изучаются те системы, в которых синхронизация подразумевает очень специальное согласование отдельных компонент, происходящее многократно в случайные моменты времени. Цель состоит в том, чтобы изучить, каким образом это взаимодействие влияет на поведение системы в целом (т.н. *коллективное поведение*) на больших временах.

Сразу скажем, что в этой работе мы ни в какой мере не планируем построение всеобъемлющей *математической модели* системы параллельных или распределенных вычислений. Мы обсудим здесь ряд конкретных моделей, которые передают общий дух таких задач. Тем не менее, мы начнем с некоторых общих замечаний. При построении вероятностной модели $(x_1(t), \dots, x_N(t)) \in H^N$, $t \in T$, пространством состояний отдельного процессора можно выбрать $H = \mathbb{Z}_+$ или $H = \mathbb{R}_+$, а время может быть дискретным $T = \mathbb{Z}_+$ или непрерывным $T = \mathbb{R}_+$. На первый взгляд может показаться, что с точки

зрения компьютерных приложений выбор $H = \mathbb{Z}_+$ и $T = \mathbb{Z}_+$ более подходящ. На самом деле, так как наша основная цель состоит в изучении поведения на *больших временах*, это соображение не является определяющим, и все четыре возможные комбинации являются оправданными.

Модель 1 ([3]). $N = 2$, $H = \mathbb{R}_+$, $T = \mathbb{Z}_+$. Случайность в цепь Маркова $(X(t), Y(t)) \equiv (x_1(t), x_2(t))$ вносится при помощи следующих последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\begin{aligned} \xi^0, \xi^1, \xi^2, \dots & \quad \xi^t \stackrel{d}{\sim} \xi, & \eta^0, \eta^1, \eta^2, \dots & \quad \eta^t \stackrel{d}{\sim} \eta, \\ I_{1 \rightarrow 2}^0, I_{1 \rightarrow 2}^1, I_{1 \rightarrow 2}^2, \dots & \quad I_{1 \rightarrow 2}^t \stackrel{d}{\sim} I_{1 \rightarrow 2}, & I_{2 \rightarrow 1}^0, I_{2 \rightarrow 1}^1, I_{2 \rightarrow 1}^2, \dots & \quad I_{2 \rightarrow 1}^t \stackrel{d}{\sim} I_{2 \rightarrow 1}, \end{aligned}$$

где ξ и η — неотрицательные случайные величины, а $I_{1 \rightarrow 2}$ и $I_{2 \rightarrow 1}$ — бернуллиевские с.в. с параметрами α и β соответственно. Динамика $(X(t), Y(t))$ задается так

$$\begin{aligned} X(t+1) &= X(t) \left[(1 - I_{2 \rightarrow 1}^t) + I_{2 \rightarrow 1}^t \mathbf{1}_{X(t) \leq Y(t)} \right] + Y(t) I_{2 \rightarrow 1}^t \mathbf{1}_{X(t) > Y(t)} + \xi^t, \\ Y(t+1) &= Y(t) \left[(1 - I_{1 \rightarrow 2}^t) + I_{1 \rightarrow 2}^t \mathbf{1}_{Y(t) \leq X(t)} \right] + X(t) I_{1 \rightarrow 2}^t \mathbf{1}_{Y(t) > X(t)} + \eta^t. \end{aligned}$$

Таким образом, в этой модели автономная работа $X(t)$ процессора 1 есть случайное блуждание со скачками, распределенными как ξ (для $Y(t)$ — соответственно, η), в каждый момент времени процессор 1 посылает сообщения m_{12} с вероятностью α , а процессор 2 — с вероятностью β .

Модель 2 ([21]). N — произвольное, $H = \mathbb{Z}_+$, $T = \mathbb{R}_+$. Фиксирован граф $G = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ с множеством вершин $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$ и некоторым множеством направленных ребер \mathcal{L} , который мы назовем графом сообщений. Состояние (x_1, x_2, \dots, x_N) системы может измениться только в специальные случайные моменты времени. С каждым процессором k мы свяжем пуассоновский поток $\Pi^k = \{0 = \sigma_0^k < \sigma_1^k < \dots < \sigma_n^k < \dots\}$ интенсивности λ_k , а каждому ребру $\rho = (k, l) \in \mathcal{L}$ мы припишем пуассоновский поток $\Pi^{kl} = \{0 = \sigma_0^{kl} < \sigma_1^{kl} < \dots < \sigma_n^{kl} < \dots\}$ интенсивности β_{kl} . Предположим, что все эти потоки Π^k и Π^{kl} независимы между собой. Переходы в марковском случайном процессе $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ определяются следующими правилами:

1) В моменты времени σ_n^k процессор k увеличивает свое локальное время x_k на 1: $x_k(\sigma_n^k + 0) = x_k(\sigma_n^k) + 1$.

2) В момент времени σ_i^{kl} процессор k посылает сообщение $m_{kl}^{(x_k)}$ процессору l . Сообщение $m_{kl}^{(x_k)}$, приходящее в узел l из узла k , содержит информацию о локальном времени $x_k(\sigma_i^{kl}) = x_k$ отправителя k . Если в момент σ_i^{kl} (когда сообщение $m_{kl}^{(x_k)}$ приходит в узел l) имеет место $x_l(\sigma_i^{kl}) > x_k(\sigma_i^{kl})$, то локальное время x_l откатывается до значения x_k : $x_l(\sigma_i^{kl} + 0) = x_k(\sigma_i^{kl})$. Более того, если процессор l претерпевает такой откат, то все сообщения, отправленные процессором l в течении интервала $\mathcal{I} = (\theta_l(x_k, \sigma_i^{kl}), \sigma_i^{kl})$, где $\theta_l(x, u) := \max \{s \leq u : x_l(s) = x, x_l(s+0) = x+1\}$, должны быть аннулированы, а процессоры, которые получили такие сообщения и обработали их, должны быть подвергнуты откатам. И так далее. Это может спровоцировать мгновенный каскадный откат некоторого подмножества процессоров. Подробности см. в [21].

Как видно из приведенных примеров, марковские переходы в этих моделях имеют две составляющие.

- 1) Независимые перемещения каждого x_i , соответствующие автономной работе процессоров. Они реализованы случайными блужданиями.
- 2) Синхронизация — мгновенное (скачкообразное) изменение состояния $x = (x_1, \dots, x_N) \rightarrow x' = (x'_1, \dots, x'_N)$, которое подчинено следующему общему правилу

$$\{x'_1, \dots, x'_N\} \subset \{x_1, \dots, x_N\}, \quad \{x'_1, \dots, x'_N\} \neq \{x_1, \dots, x_N\}. \quad (1)$$

3 К стохастическим системам взаимодействующих частиц

Естественным образом возникает аналогия описанных выше моделей с системами стохастических частиц на вещественной прямой. Для этого будем интерпретировать переменную x_i как координату i -ой частицы. Динамика состоит из *свободного* движения частиц (независимые случайные блуждания) и *взаимодействия*, которое имеет вид синхронизирующих скачков (1). Как будет видно из приводимых ниже примеров, это новый тип взаимодействия, который не изучался ранее (см. [4, 5, 16]) в контексте стохастических систем взаимодействующих частиц. Для систем частиц требование неотрицательности x_i не является более необходимым. Мы начнем с тех взаимодействий, для которых $\{x'_1, \dots, x'_N\}$ и $\{x_1, \dots, x_N\}$ различаются только одной точкой.

Модель 3 ([19]). N — произвольное, $H = \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{R}_+$. По аналогии с Моделью 2 с каждой частицей k мы свяжем пуассоновский поток $\Pi^k = \{0 = \sigma_0^k < \dots < \sigma_n^k < \dots\}$ интенсивности λ , а каждой паре частиц (k, l) мы припишем пуассоновский поток $\Pi^{kl} = \{0 = \sigma_0^{kl} < \dots < \sigma_n^{kl} < \dots\}$ интенсивности $\nu/(N-1)$. В моменты σ_n^k частица k совершает независимый скачок $x_k \mapsto x_k + y$ с вероятностью a_y , где $|y| \leq d$, $\sum_{y=-d}^d a_y = 1$. В моменты σ_n^{kl} частица l может перескочить к частице k или остаться на месте: $x_l \mapsto \min(x_k, x_l)$. Этот марковский процесс может быть задан формальным генератором вида

$$\begin{aligned} Lf(x) = & \lambda \sum_{k=1}^N \sum_{y=-d}^d a_y \left(f(x + ye_k^{(N)}) - f(x) \right) + \\ & + \frac{\nu}{N-1} \sum_{k,l=1, k \neq l}^N \left(f(x - (x_l - x_k)e_l^{(N)}) - f(x) \right) \mathbf{1}_{\{x_l > x_k\}}, \end{aligned}$$

где $e_k^{(N)} = (0, \dots, 1_k, \dots, 0)$, $x = (x_1, \dots, x_N) \in H^N$. Проще говоря, каждая частица с интенсивностью γ посылает сообщения, причем адресата она выбирает *равновероятно* среди других $(N-1)$ частиц; взаимодействие между этими частицами состоит в уравнивании их координат (до меньшего значения), если сообщение послано от частицы с меньшей координатой к частице с большей координатой. Обратим внимание, что в отличие от большинства моделей математической физики это взаимодействие носит существенно *нелокальный* характер, так как результат взаимодействия двух частиц зависит лишь от значения меньшей из координат, но не зависит от расстояния между частицами. Так как при этом частицы могут перемещаться только справа налево, мы назовем такое взаимодействие *анизотропным*. Обратим внимание на то, что здесь не предполагаются каскадные откаты как в Модели 2.

Модель 4 ([20,22]). Здесь участвуют N_1 частиц первого типа и N_2 частиц второго типа, частицы движутся по прямой \mathbb{R} с постоянными скоростями v_i , где $i = 1, 2$ — номер типа. Время непрерывно: $T = \mathbb{R}_+$. Каждая частица первого типа с интенсивностью $\alpha_{12} > 0$

принимает решение перескочить к какой-либо частице второго типа, которую она выбирает равновероятно, и аналогично для частиц второго типа, но с интенсивностью $\alpha_{21} > 0$. Как и в предыдущей модели, мы имеем дело с *парным* нелокальным взаимодействием, но скачки возможны в любом направлении. Состояниями марковского процесса будут векторы $x = (x_1^{(1)}, \dots, x_{N_1}^{(1)}; x_1^{(2)}, \dots, x_{N_2}^{(2)}) \in H^{N_1+N_2}$, а формальный генератор имеет вид

$$(L_{N_1, N_2} f)(x^{(1)}; x^{(2)}) = \left[v_1 \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}} + v_2 \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial}{\partial x_j^{(2)}} \right] f(x^{(1)}; x^{(2)}) + \\ + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\alpha_{12}}{N_2} \left[f\left(\left(x^{(1)}; x^{(2)}\right)_{i \rightarrow j}\right) - f(x^{(1)}; x^{(2)}) \right] + \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\alpha_{21}}{N_1} \left[f\left(\left(x^{(1)}; x^{(2)}\right)_{i \leftarrow j}\right) - f(x^{(1)}; x^{(2)}) \right],$$

где $(x^{(1)}; x^{(2)}) = (x_1^{(1)}, \dots, x_{N_1}^{(1)}; x_1^{(2)}, \dots, x_{N_2}^{(2)})$,

$$\begin{aligned} \left(x^{(1)}; x^{(2)}\right)_{i \rightarrow j} &= \left(x_1^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(1)}, x_j^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_{N_1}^{(1)}; x_1^{(2)}, \dots, x_{N_2}^{(2)}\right), \\ \left(x^{(1)}; x^{(2)}\right)_{i \leftarrow j} &= \left(x_1^{(1)}, \dots, x_{N_1}^{(1)}; x_1^{(2)}, \dots, x_{j-1}^{(2)}, x_i^{(1)}, x_{j+1}^{(2)}, \dots, x_{N_2}^{(2)}\right). \end{aligned}$$

Эта модель интересна с чисто математической точки зрения и оправдана с точки зрения приложений в психологии и биологии.

Модель 5. N — произвольное, $H = \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{R}_+$. Система однотипных частиц с *парным изотропным* взаимодействием. Определяется аналогично системе Модели 3, но генератор имеет вид

$$\begin{aligned} Lf(x) &= \lambda \sum_{k=1}^N \sum_{y=-d}^d a_y \left(f(x + ye_k^{(N)}) - f(x) \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{N(N-1)} \sum_{k,l=1, k \neq l}^N \left(f(x - (x_l - x_k)e_l^{(N)}) - f(x) \right), \quad \lambda > 0, \quad \gamma > 0. \end{aligned}$$

Эта модель существенно обобщается далее в этой статье (см. § 5).

В следующей модели $\{x'_1, \dots, x'_N\}$ и $\{x_1, \dots, x_N\}$ различаются более чем одной точкой.

Модель 6 ([23]). N — произвольное, $H = \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{Z}_+$. При переходе от $x(t)$ к $x(t+1)$ независимо разыгрывается бернуллиевская с.в. с параметром $0 < \alpha < 1$ и

а) в случае выпадения 0 каждая частица k независимо совершает скачок случайного блуждания $x_k \mapsto x_k + y$ с вероятностью a_y , причем распределение $(a_y, |y| \leq d)$ одинаково для всех частиц (*свободная динамика*);

б) в случае выпадения 1 производится *синхронизация*: выбираются *наугачу* три частицы i_1, i_2 и i_3 среди N возможных, их координаты x_{i_1}, x_{i_2} и x_{i_3} выстраиваются в порядке возрастания $(x_{(i_1)} \leq x_{(i_2)} \leq x_{(i_3)})$, после чего все три частицы i_1, i_2 и i_3 перемещаются в точку с координатой $x_{(i_2)}$.

Так как при взаимодействии имеется ограничение на направление перемещения частиц, Модель 6 близка Модели 3. Взаимодействие Модели 6 легко обобщается с трех-

частичного до K -частичного, где $K > 3$ — произвольное, не зависящее от N (см. [23]).

Заметим, что в Моделях 3–6 все частицы одного типа идентичны, а при взаимодействии пары (тройки) выбираются равновероятно. Наличие такой богатой симметрии в этих системах частиц сближает их с *моделями среднего поля*. Идеология среднего поля пришла из физики, но сейчас она активно входит в огромное число работ по сетям массового обслуживания и вероятностным моделям статистической физики.

4 Задачи

Здесь мы обсудим некоторые важные постановки задач, соответствующие специфике обсуждаемых моделей. Мы увидим, что они, как правило, сводятся к рассмотрению различных пределов, связанных с ростом времени и/или числа частиц.

4.1 Поведение на больших временах

Будем считать N фиксированным, а t стремящимся к бесконечности. Чтобы разобраться с поведением многомерного марковского процесса $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$, полезно ввести вспомогательный процесс, связанный с "подвижным наблюдателем"

$$y(t) = (x_1(t) - x_{\text{observer}}(t), x_2(t) - x_{\text{observer}}(t), \dots, x_N(t) - x_{\text{observer}}(t)) \in H^N.$$

В зависимости от модели удобным может оказаться один из следующих выборов наблюдателя:

$$x_{\text{observer}}(t) = \min_i x_i(t), \quad x_{\text{observer}}(t) = x_1(t) \quad \text{или} \quad x_{\text{observer}}(t) = \frac{x_1(t) + \dots + x_N(t)}{N}.$$

Задача о поведении на больших временах состоит в решении следующих двух подзадач:

- 1) доказать, что распределение $y(t)$ имеет предел при $t \rightarrow \infty$;
- 2) доказать, что существует детерминированный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} x_{\text{observer}}(t) \rightarrow v^*, \quad v^* \in \mathbb{R},$$

в каком-либо вероятностном смысле.

Утверждение 1) означает, что независимо от начальной конфигурации $x(0)$ с течением времени локальные времена (или частицы) собираются в одну "синхронизованную" группу. В случае, когда $y(t)$ есть марковский процесс, используя специфику систем с синхронизацией, часто удается показать выполнение *условия Деблина* [1], которое влечет существование стационарного распределения и сходимость к нему. Это верно, в частности, для моделей 1, 3, 4 (см. [3, 19, 22]). При наличии каскадных отказов может потребоваться более тонкая техника, основанная на использовании *метода пробных функций*, как, например, в варианте модели 2 с субординацией между узлами (см. [21]). При этом трудность задачи возрастает с увеличением размерности N .

Заметим, что в [21] изучен случай, когда компоненты процесса разбиваются на несколько синхронизованных групп (кластеров), которые движутся с асимптотически разными скоростями. Этот эффект обусловлен специальной топологией графа посылки сообщений G .

Утверждение 2) имеет не только математический интерес, но и тесно связано с задачей *оценки производительности* вычислительной системы [3, 7, 8, 12, 13, 15, 17, 18]. Действительно, основным показателем, который характеризует производительность сети параллельных вычислений, является объем работы, выполненной к заданному моменту времени, или средний объем работы, выполняемый за единицу времени. При наличии взаимодействия по причине возникающих откатов скорость роста локальных времен вычислительных узлов будет меньше, чем собственная скорость тех же узлов в независимом случае. Основная задача — найти скорость v^* для взаимодействующего случая и выяснить, насколько она отличается от потенциальной скорости невзаимодействующей системы, оценивая тем самым эффективность предлагаемой параллельной архитектуры. Как правило, доказать существование предельного значения v^* проще, чем вычислить его. Как следует из работ [3, 19, 22], для нахождения v^* необходим хороший контроль над стационарным распределением процесса $y(t)$, а оно может быть найдено в явном виде только в весьма редких ситуациях.

4.2 Предел среднего поля

Теперь нас интересует случай, когда число компонент в системе N растет к бесконечности. Математическая трудность такого асимптотического анализа, очевидно, связана с тем, что пространство H^N , в котором принимает значения случайный процесс $x(t)$, зависит от N . Мы будем интересоваться, главным образом, среднеполевыми моделями в том смысле, в котором это обсуждалось в конце § 2: компоненты x_1, \dots, x_N идентичны по отношению к свободной динамике, и синхронизация имеет симметричную форму как в Моделях 3-6. Вместо того, чтобы иметь дело с последовательностью пространств состояний растущей размерности, мы свяжем с конфигурацией x_1, \dots, x_N ее эмпирическое распределение

$$\mu_{N,t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}, \quad \text{где} \quad \delta_z(A) := \begin{cases} 1, & z \in A \\ 0, & z \notin A \end{cases}, \quad (2)$$

а A — борелевское множество из \mathbb{R} . С этого момента нас будут интересовать свойства последовательности $\{\mu_{N,t}\}$. Заметим, что при фиксированной конфигурации $x(t)$ объект $\mu_{N,t}$ представляет собой вероятностную меру на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Предельная ситуация $t = \text{Const}$, $N \rightarrow \infty$ называется *пределом среднего поля*.

Под утверждением о существовании предела среднего поля мы будем подразумевать результат, который условно можно сформулировать следующим образом (для удобства будем считать, что $H = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}_+$). *Предположим*, что при $t = 0$ все $(x_i(0))$, $i = \overline{1, N}$ независимы и одинаково распределены с плотностью $\rho_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда для каждого фиксированного t при $N \rightarrow \infty$ случайная последовательность $\{\mu_{N,t}\}$ слабо сходится к детерминированному пределу, имеющему плотность $\rho(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Предельная плотность является решением некоторого эволюционного уравнения с начальным условием $\rho(0, x) = \rho_0(x)$.

Точные формулировки и детальное доказательство можно найти в [22]. См. также [10].

4.3 Гидродинамика

Гидродинамическое описание связано со *скейлингом* (перемасштабированием) пространства, а именно, с выбором новой (*макро*)переменной $w \in \mathbb{R}$, которая связана с прежней

(микро)переменной x соотношением $w = x/N$. Другими словами, следует перейти к перемасштабированным эмпирическим функциям

$$\mu'_{N,t}(B) := \mu_{N,t}(NB), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Основное *предположение* состоит в том, что в начальный момент времени последовательность $\{\mu'_{N,0}\}$ имеет слабый предел при $N \rightarrow \infty$, описываемый некоторой гладкой плотностью $u_0(w)$. Этого можно, например, добиться, считая $x_i(0)$ независимыми и имеющими одинаковую плотность распределения $u_0(x/N)$. То есть, при больших N плотности компонент $x_i(0)$ есть медленно изменяющиеся функции от микропеременной x . Такое предположение принято называть гидродинамическим начальным профилем.

Кроме пространственного скейлинга, делают также переход к *макровремени* $s = t/N^m$ одним из двух способов: а) $s = t/N$ — эйлеров скейлинг; б) $s = t/N^2$ — диффузионный скейлинг. Выбор скейлинга макровремени однозначно определяется параметрами стохастической системы — свойствами свободной динамики и синхронизации.

Утверждение о существовании гидродинамического предела состоит в том, что если последовательность $\{\mu'_{N,0}\}$ имеет гидродинамический профиль с функцией $u_0(w)$, то и при любом $s \in \mathbb{R}_+$ последовательность $\{\mu'_{N,sN^m}\}$ будет сходиться при $N \rightarrow \infty$ к детерминированному распределению с плотностью $u(s, w)$, причем $u(s, w)$ удовлетворяет некоторому УрЧП m -го порядка с начальным условием $u(0, w) = u_0(w)$.

Гидродинамическое описание снабжает нас очень тонкой аппроксимацией стохастической системы с большим числом компонент, особенно, когда удается исследовать решения предельных гидродинамических уравнений. Вывод гидродинамики и соответствующий анализ для систем Моделей 3 и 6 проведен в работах [19, 23], в первой из них, в частности, в пределе получено знаменитое уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова.

Для иллюстрации подхода сформулируем следующий результат.

Теорема 1 *Рассмотрим систему частиц Модели 5 (§ 3) и предположим, что последовательность начальных распределений $\{\mu'_{N,0}\}$ имеет гидродинамический начальный профиль с гладкой плотностью $u_0(w)$, $w \in \mathbb{R}$. Тогда система допускает следующее гидродинамическое описание.*

1) Если $a = \sum y a_y \neq 0$, то существует гидродинамический предел, соответствующий эйлеровскому скейлингу $t = sN$, и предельная плотность $u(s, w)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\lambda a \frac{\partial u}{\partial w}, \quad u(0, w) = u_0(w).$$

2) Если $a = \sum y a_y = 0$, то существует гидродинамический предел, соответствующий диффузионному скейлингу $t = sN^2$, а предельная плотность $u(s, w)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial w^2}, \quad u(0, w) = u_0(w),$$

где $D = \lambda \sum y^2 a_y > 0$.

Доказательство может быть дано с привлечением методов, использованных в статье [19], поэтому в настоящей статье мы его не приводим. Много результатов для систем частиц без синхронизации можно найти в книгах [5, 16].

4.4 Последовательные стадии качественного поведения

Здесь мы обсудим качественное поведение стохастических систем среднего поля со взаимодействием типа синхронизации в предельном переходе

$$t = t(N) \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty,$$

при различных скоростях стремления $t(N)$ к бесконечности. В отличие от гидродинамического подхода, где обсуждались временные шкалы $t(N) = cN$ и $t(N) = cN^2$, мы не будем рассматривать гидродинамические начальные профили и пытаться получить точные эволюционные уравнения. Вместо этого мы рассмотрим пока только начальные конфигурации с "конечным носителем" $x_i(0) \in [-Q, Q] \quad \forall i = \overline{1, N}$, где $Q > 0$ не зависит от N . Постараемся ответить на вопрос: на каких шкалах $t = t(N)$ наступает синхронизация в системе. Особенностью стохастических многокомпонентных систем со взаимодействием типа синхронизации является присутствие в динамике двух составляющих, "работающих" в противоположных направлениях: это независимые эволюции компонент и синхронизирующие скачки. Первая составляющая способствует росту пространственных размеров группы x_1, \dots, x_N , тогда как вторая составляющая приводит к сближению координат. Стремясь к максимальной универсальности подхода, мы ограничимся достаточно грубой характеристикой эмпирического распределения $\mu_{N,t}$, а именно, дисперсией координаты, вычисленной по $\mu_{N,t}$

$$V_N(x(t)) := \int z^2 \mu_{N,t}(dz) - \left(\int z \mu_{N,t}(dz) \right)^2.$$

Хорошо известно, что эта функция совпадает с выборочной дисперсией, поэтому может служить оценкой "разброса" конфигурации частиц. Значения $V_N(x(t))$ случайны, так как зависят от конфигурации $x(t)$.

Основная гипотеза состоит в том, что можно выделить по крайней мере две различные стадии в поведении.

В) *Стадия начальной десинхронизации.* На малых временах свободное движение доминирует над взаимодействием, и это может приводить к десинхронизации системы. Формально это должно выражаться в существовании функции $\psi_b(N) \uparrow \infty$, такой, что при $t(N)/\psi_b(N) \rightarrow 0$ справедливо

$$EV_N(x(t(N))) \sim ct(N).$$

Заметим, что именно такая асимптотика имела бы место, если бы в системе была лишь свободная динамика, а синхронизации не было.

Г) *Стадия финальной стабилизации.* Влияние синхронизирующих скачков усиливается, со временем компоненты x_i собираются в одну группу, и этот коллектив перемещаются как одно целое, при этом внутри группы по-прежнему наблюдаются случайные индивидуальные движения компонент. Формально ожидается, что существуют функции $\psi_f(N) \uparrow \infty$ и $\phi(N) \uparrow \infty$ такие, что для любой функции $t(N)$, удовлетворяющей $t(N)/\psi_f(N) \rightarrow \infty$, имеет место

$$EV_N(x(t(N))) \sim \phi(N).$$

Первой работой, где для системы частиц с синхронизацией доказано наличие стадий различного поведения, является статья [20] для Модели 4. Некоторые шаги по решению

этой проблемы для Модели 6 предприняты в [24].

В настоящей статье мы докажем аналогичный результат для общего k -частичного симметризованного взаимодействия. Теорема 3 в § 5 свидетельствует в пользу предположения о том, что полученный в работе [20] результат о наличии нескольких стадий коллективного поведения, по-видимому, верен для широкого круга больших систем частиц с синхронизацией, а не обусловлен спецификой модели [20].

5 k -частичное симметризованное взаимодействие

Как было отмечено в § 3, в работах [3, 19, 20, 22] для стохастических систем частиц было рассмотрено в *парное* взаимодействие, а в работе [23] изучено *трехчастичное* взаимодействие. В данном параграфе мы построим *общую* модель среднего поля с k -частичным симметризованным взаимодействием типа синхронизации, где $k \geq 2$ — произвольное. Речь идет о специальном классе скачкообразных марковских процессов $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ с непрерывным временем и значениями в \mathbb{R}^N , динамика которого символически задается генератором вида $L = L_0 + L_s$. Как и прежде, *свободная динамика* L_0 соответствует независимым перемещениям отдельных частиц, а L_s отвечает за *синхронизирующие скачки* $x = (x_1, \dots, x_N) \rightarrow x' = (x'_1, \dots, x'_N)$, которые удовлетворяют условию (1). Теорема 3 устанавливает основной результат о наличии трех стадий различного поведения системы в зависимости от скорости роста $t(N) \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$. Кроме этого, обсуждается случай, когда диапазон начального расположения частиц растет с увеличением N . Для построения взаимодействия мы введем понятие *синхронизирующего отображения*.

5.1 Синхронизирующие отображения и определение модели

Занумеруем частицы и будем обозначать их координаты x_1, \dots, x_N . Фиксируем число k и целые числа $k_1 \geq 2, \dots, k_l \geq 2$ такие, что $k_1 + \dots + k_l = k$. Набор (k_1, \dots, k_l) назовем *сигнатурой* и будем считать его неизменным на протяжении всей статьи. Пусть \mathcal{I} — множество упорядоченных наборов (i_1, \dots, i_k) , состоящих из k различных элементов множества индексов $\mathcal{N}_N := \{1, \dots, N\}$. На множестве \mathcal{I} определим отображение $\pi_{k_1, \dots, k_l} : (i_1, \dots, i_k) \mapsto (\Gamma_1, \dots, \Gamma_l)$, где $\Gamma_j = (g_j, \Gamma_j^\circ)$,

$$\begin{aligned} g_1 &= i_1, & \Gamma_1^\circ &= (i_2, \dots, i_{k_1}), \\ g_2 &= i_{k_1+1}, & \Gamma_2^\circ &= (i_{k_1+2}, \dots, i_{k_1+k_2}), \\ & & \dots & \\ g_l &= i_{k_1+\dots+k_{l-1}+1}, & \Gamma_l^\circ &= (i_{k_1+\dots+k_{l-1}+1}, \dots, i_{k_1+\dots+k_l}). \end{aligned}$$

Рассмотрим *синхронизирующее* отображение $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} : x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto y = (y_1, \dots, y_N)$, определяемое следующим образом:

$$y_m = \begin{cases} x_m, & \text{если } m \notin (i_1, \dots, i_k), \\ x_{g_j}, & \text{если } m \in (i_1, \dots, i_k), m \in \Gamma_j. \end{cases} \quad (3)$$

Назовем это отображение синхронизацией поднабора частиц x_{i_1}, \dots, x_{i_k} , соответствующей сигнатуре (k_1, \dots, k_l) . Очевидно, что конфигурация $y = J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} x$ имеет в точке с координатой x_{g_1} (по меньшей мере) k_1 частиц, \dots , в точке с координатой x_{g_l} (по

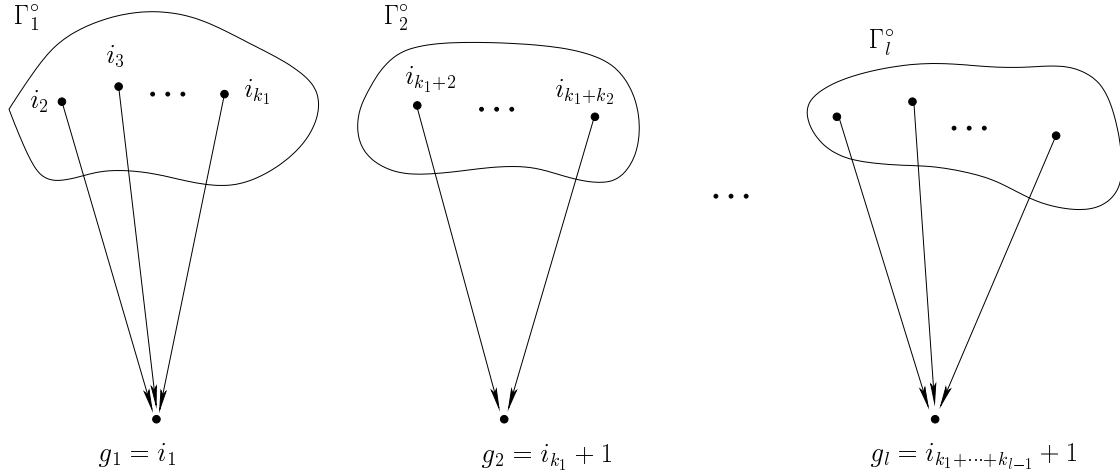


Рис. 2: Соответствие между отображениями π_{k_1, \dots, k_l} и ориентированными графами

меньшей мере) k_l частиц.

Определим *однородный марковский процесс* $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$, $t \geq 0$, на пространстве $H^N \equiv \mathbb{R}^N$ при помощи формального генератора $L = L_0 + L_s$ следующего вида. Свободная динамика L_0 соответствует независимым блужданиям

$$(L_0 f)(x) = \alpha \sum_{i=1}^N \int (f(x + ze_i) - f(x)) \rho(dz), \quad z \in \mathbb{R}, \quad e_i = (0, \dots, 1_i, \dots, 0),$$

с независимыми скачками вида $x_i \rightarrow x_i + z$, где z распределено по закону $\rho(dz)$, общему для всех частиц. Будем предполагать, что распределение ρ имеет конечный носитель и нетривиально в следующем смысле: $b_2 := \int x^2 \rho(dx) > 0$. Обозначим также $a := \int x \rho(dx)$.

Синхронизирующее взаимодействие L_s имеет вид

$$L_s f = \frac{\delta}{N^{[k]}} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}} L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f, \quad (4)$$

где $N^{[k]} := N(N-1) \cdots (N-k+1)$, а

$$(L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f)(x) = f(J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} x) - f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_N), \quad (5)$$

для ограниченных непрерывных функций f . То есть, независимо от свободной динамики, через независимые промежутки времени, распределенные экспоненциально с параметром $\delta > 0$, с равной вероятностью выбирается один из наборов $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}$, и конфигурация частиц x_1, \dots, x_N синхронизируется согласно отображению $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}$. Таким образом, взаимодействие, соответствующее конкретному выбору (i_1, \dots, i_k) , заключается в мгновенном и одновременном перемещении частиц каждой из групп $x_{k_1+\dots+k_{j-1}+1}, \dots, x_{k_1+\dots+k_j}$ в точку с координатой $x_{g_j} = x_{k_1+\dots+k_{j-1}+1}$, $j = \overline{1, l}$.

Поскольку все слагаемые входят в сумму (4) с одинаковыми весами, настоящий процесс относится к классу моделей среднего поля. То, что сумма берется по всем упорядоченным наборам $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}$, поясняет термин "симметризованное взаимодействие", так как фактически речь идет об усреднении относительно действия группы

перестановок.

Очевидно, что, с точки зрения определенного здесь класса систем стохастических частиц, Модель 5 из § 3 является его простейшим представителем с $k = 2$ и $l = 1$.

5.2 Вспомогательные леммы

Рассмотрим функцию $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$, $V(x) := \frac{1}{N(N-1)} \sum_{m < n} (x_m - x_n)^2$. Можно показать, что она совпадает с выборочной дисперсией S^2 , где

$$S^2 := \frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^N (x_m - M(x))^2, \quad M(x) := \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N x_m.$$

Лемма 1 $(LM)(x) = \alpha a$ для всех $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Доказательство леммы 1. Прямая проверка показывает, что $(L_0 M)(x) \equiv \alpha a$, поэтому содержательной является лишь демонстрация того, что $(L_s M)(x) \equiv 0$. Покажем, что этот факт есть следствие симметричности синхронизирующего взаимодействия. При заданной сигнатуре взаимодействия (k_1, \dots, k_l) зафиксируем некоторые подмножества

$$B_j \in \mathcal{N}_N, \quad |B_j| = k_j, \quad (j = \overline{1, l}), \quad B_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset \quad (j_1 \neq j_2)$$

и определим $\mathcal{I}_{k_1, \dots, k_l}^{B_1, \dots, B_l} := \{(i_1, \dots, i_k) : \{g_j\} \cup \Gamma_j^\circ = B_j \quad \forall j = \overline{1, l}\}$, где g_j и Γ_j° определяются отображением π_{k_1, \dots, k_l} , примененным к (i_1, \dots, i_k) . Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_{k_1, \dots, k_l}^{B_1, \dots, B_l}} \left(M \circ J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} - M \right) = 0, \quad (6)$$

поскольку $\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}} = \sum_{B_1, \dots, B_l} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_{k_1, \dots, k_l}^{B_1, \dots, B_l}}$. Легко видеть, что

$$M \left(J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} x \right) - M(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^l \sum_{h \in \Gamma_j^\circ} (x_{g_j} - x_h). \quad (7)$$

Легко видеть, что слагаемым $(x_{g_j} - x_h)$ можно сопоставить направленные ребра соответствующего графа (см. Рис. 2). Подставляя правую часть (7) в сумму (6), мы видим, что, так как в (6) g_j пробегает все множество B_j , то для любых двух индексов $u, v \in B_j$ ровно один раз появится разность $(x_u - x_v)$, когда $g_j = u$, и ровно один раз появится разность $(x_v - x_u)$, когда $g_j = v$. Следовательно, сумма (6) равна нулю. \square

Лемма 2 При $N \rightarrow \infty$ имеем $LV = \alpha b_2 - \frac{\delta \varkappa}{N(N-1)} V$, где $\varkappa = \sum_{j=1}^l k_j^2 - k > 0$.

Доказательство леммы 2. Определим функцию $f_{m,n} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $f_{m,n}(x) = \frac{1}{N(N-1)} (x_n - x_m)^2$. В этих обозначениях $V(x) = \sum_{m < n} f_{m,n}(x)$. Покажем, что $L_0 f_{m,n}(x) =$

$(N(N-1))^{-1} 2\alpha b_2$, и, следовательно, $(L_0 V)(x) \equiv \alpha b_2$. Действительно,

$$\begin{aligned} (N(N-1))L_0 f_{m,n}(x) &= \alpha \int ((x_n + z - x_m)^2 - (x_n - x_m)^2) \rho(dz) + \\ &\quad + \alpha \int ((x_n - x_m - z)^2 - (x_n - x_m)^2) \rho(dz) = \\ &= 2\alpha \int z^2 \rho(dz) = 2\alpha b_2. \end{aligned}$$

Обратимся теперь к взаимодействию. Запишем

$$L_s V = \delta \sum_{m' < n'} \frac{1}{N^{[k]}} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}} L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f_{m', n'} \quad (8)$$

Рассмотрим одно слагаемое $L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f_{m', n'}$. В силу (3) под действием отображения $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}$ частица с номером m' перейдет в точку с координатой x_m , где

$$m = \begin{cases} m', & \text{если } m' \notin (i_1, \dots, i_k), \\ g_j, & \text{если } m' \in (i_1, \dots, i_k), m' \in \Gamma_j \end{cases} \quad (9)$$

Следовательно, $L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f_{m', n'} = f_{m, n} - f_{m', n'}$ с некоторыми m и n , необязательно отличными от m' и n' . Таким образом, найдутся такие $a_{mn}(N) \in \mathbb{R}$, что

$$(L_s V)(x) = \delta \sum_{m < n} a_{mn}(N) f_{m, n}(x). \quad (10)$$

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что числа $a_{mn}(N)$ не зависят от m и n , и что

$$a_{mn}(N) = -\frac{\varkappa}{N(N-1)} \quad (11)$$

для некоторой константы $\varkappa > 0$. Зафиксируем некоторую пару $\{m, n\}$ и вычислим $a_{mn}(N)$. Выбирая набор (i_1, \dots, i_k) , в котором происходит взаимодействие, мы тем самым выбираем g_1, \dots, g_l и $\Gamma_1^\circ, \dots, \Gamma_l^\circ$. Обозначим $G = \{g_1, \dots, g_l\}$. При фиксированной паре $\{m, n\}$ множество \mathcal{I} может быть разбито на непересекающиеся части следующим образом:

$$\mathcal{I} = \bigcup_{w=0}^3 \mathcal{I}_w^{m, n}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0^{m, n} &:= \{(i_1, \dots, i_k) : \{m, n\} \cap (\cup_j \Gamma_j) = \emptyset\} \\ \mathcal{I}_1^{m, n} &:= \{(i_1, \dots, i_k) : \{m, n\} \cap (\cup_j \Gamma_j^\circ) \neq \emptyset\} \\ \mathcal{I}_2^{m, n} &:= \{(i_1, \dots, i_k) : \{m, n\} \subset G\} \\ \mathcal{I}_3^{m, n} &:= \{(i_1, \dots, i_k) : |\{m, n\} \cap G| = 1\} \setminus \mathcal{I}_1^{m, n} \end{aligned}$$

В каждой из сумм $\sum^{(w)} := \frac{1}{N^{[k]}} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_w^{m, n}} \sum_{m' < n'} (f_{m', n'} \circ J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} - f_{m', n'})$ мы выделим лишь те слагаемые, в которых участвует функция $f_{m, n}$, и коэффициент при ней обозначим $a_{mn}^{(w)}(N)$. В силу представлений (8) и (10) можно записать $a_{mn}(N) = \sum_{w=0}^3 a_{mn}^{(w)}(N)$.

0) Так как при $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_0^{m, n}$ отображение $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}$ оставляет частицы с номерами m и n неподвижными, то $a_{mn}^{(0)}(N) = 0$.

I) Если $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_1^{m,n}$, то слагаемое $f_{m,n}$ может входить в сумму $\sum^{(1)}$ только со знаком "минус" и только, если $(m', n') = (m, n)$. Количество наборов (i_1, \dots, i_k) , которые составляют множество $\mathcal{I}_1^{m,n}$ равно $|\mathcal{I}_1^{m,n}| = N^{[k]} - (N-2)^{[k-l]}(N-(k-l))^{[l]}$. Таким образом,

$$a_{mn}^{(1)}(N) = (-1) \frac{N^{[k]} - (N-2)^{[k-l]}(N-(k-l))^{[l]}}{N^{[k]}}$$

II) Для определенности рассмотрим в $\sum^{(2)}$ подсумму по такому подмножеству множества $\mathcal{I}_2^{m,n}$, в котором $m = g_i, n = g_j$. В результате действия $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}$ каждая из функций f_{uv} , где $u \in \Gamma_i, v \in \Gamma_j$, перейдет в функцию f_{mn} . Поэтому в указанной подсумме мы обнаружим $k_i k_j$ слагаемых f_{mn} со знаком "плюс" и одно слагаемое (соответствующее случаю $(m', n') = (m, n)$) со знаком "минус". Следовательно,

$$a_{mn}^{(2)}(N) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^l (k_i k_j - 1) \frac{(N-2)^{[k-2]}}{N^{[k]}}.$$

III) Зафиксируем $i \in \{1, \dots, l\}$ и рассмотрим в $\sum^{(3)}$ подсумму по тем (i_1, \dots, i_k) , для которых $m = g_i \in G, n \notin G$. Число наборов (i_1, \dots, i_k) , удовлетворяющих этому предположению, равно $(N-2)^{[k-1]}$. При этом каждая из k_i функций f_{un} , где $u \in \Gamma_i$, перейдет в функцию f_{mn} . Меняя местами роли m и n , заключаем, что

$$a_{mn}^{(3)}(N) = 2 \sum_{i=1}^l (k_i - 1) \frac{(N-2)^{[k-1]}}{N^{[k]}}.$$

Во-первых, заметим, что величины $a_{mn}^{(1)}(N)$, $a_{mn}^{(2)}(N)$ и $a_{mn}^{(3)}(N)$ не зависят m, n . Далее, после некоторых вычислений приходим к следующим точным формулам

$$\begin{aligned} a_{mn}^{(1)}(N) &= -\frac{2(k-l)(N-k) + (k-l)(k+l-1)}{N(N-1)}, \\ a_{mn}^{(2)}(N) &= \frac{k^2 - l^2 + l - \sum_j k_j^2}{N(N-1)}, \\ a_{mn}^{(3)}(N) &= \frac{2(k-l)(N-k)}{N(N-1)}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что $a_{mn}^{(1)}(N) < 0$, тогда как $a_{mn}^{(2)}(N) > 0$ и $a_{mn}^{(3)}(N) > 0$. Суммируя эти величины, получим

$$a_{nm}^{(1)}(N) + a_{nm}^{(2)}(N) + a_{nm}^{(3)}(N) = -\frac{\sum_j k_j^2 - k}{N(N-1)},$$

и утверждение (11) установлено с $\varkappa = \sum_j k_j^2 - k > 0$. □

5.3 Основные теоремы

Заметим, что теорема 1 из §4 может быть обобщена и на весь класс k -частичных симметризованных взаимодействий. Но здесь мы намерены заняться другой задачей.

Нас будут интересовать средние: $\mu_N(t) := EM(x(t))$ и $R_N(t) := EV(x(t))$. В нижеследующих утверждениях предполагается, что $N \rightarrow \infty$.

Теорема 2 Для любого $t > 0$ $\lim_N \frac{\mu_N(t) - \mu_N(0)}{t} = \alpha a$. Более того, для любой функции $t(N) \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $\frac{\mu_N(t(N)) - \mu_N(0)}{t(N)} \rightarrow \alpha a$.

Теорема 3 Предположим, что $\sup_N |R_N(0)| < \infty$. Существуют три временных шкалы $t = t(N)$, на которых $R_N(t(N))$ ведет себя качественно различным образом.

- Если $\frac{t(N)}{N^2} \rightarrow 0$, то $R_N(t(N)) \sim \alpha b_2 t(N)$.
- Если $t(N) = cN^2$, то $R_N(t(N)) \sim \alpha b_2 (\delta \varkappa)^{-1} (1 - \exp(-\delta \varkappa c)) N^2$.
- Если $\frac{t(N)}{N^2} \rightarrow \infty$, то $R_N(t(N)) \sim \alpha b_2 (\delta \varkappa)^{-1} N^2$.

В [20] аналогичные последовательные шкалы были названы соответственно фазами начальной десинхронизации, критического затухания десинхронизации и финальной стабилизации.

Теорема 4 Пусть $R_N(0) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Если в каждом из трех случаев теоремы 3 потребовать выполнения добавочного условия $R_N(0)/t(N) \rightarrow 0$, то асимптотика $R_N(t(N))$ останется такой же, как в соответствующем пункте теоремы 3.

Доказательство теорем 2 и 3. Метод доказательства аналогичен применявшемуся в работе [20] и основан на использовании вложенной цепи Маркова $\zeta_N(n, \omega) := x(\tau_n, \omega)$, $n = 0, 1, \dots$. По определению цепь $\zeta_N(n)$ задана на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, развивается в дискретном времени и принимает значения в множестве \mathbb{R}^N , а последовательность $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) \leq \dots$ состоит из моментов времени, в которые могут происходить скачки частиц, $\tau_0(\omega) \equiv 0$. Очевидно, что $\{\tau_{n+1} - \tau_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность независимых экспоненциальных случайных величин с математическим ожиданием $\gamma_N = (\alpha N + \delta)^{-1}$. В дискретной цепи $\zeta_N(n)$ переходы за единицу времени устроены следующим образом: с вероятностью $\alpha \gamma_N$ частица с номером i совершает скачок $x_i \rightarrow x_i + z$, где z распределено по закону $\rho(dz)$, $i = \overline{1, N}$, или с вероятностью $\delta \gamma_N$ происходит синхронизация — наудачу выбирается набор индексов (i_1, \dots, i_k) и затем конфигурация частиц x мгновенно превращается в конфигурацию $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} x$. По закону больших чисел $\tau_n \sim \gamma_N n$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, асимптотическое поведение системы частиц $x(t)$, $t \geq 0$, может быть сведено к асимптотическим свойствам вложенной цепи $\zeta_N(n)$. Нас будут интересовать следующие последовательности: $s(n) := \mathbb{E}M(x(\tau_n))$ и $d(n) := \mathbb{E}V(x(\tau_n))$. Непосредственные вычисления с использованием лемм 1 и 2 показывают, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M(\zeta_N(n+1)) | x(t), t \leq \tau_n) &= M(\zeta_N(n)) + \gamma_N \alpha a, \\ \mathbb{E}(V(\zeta_N(n+1)) | x(t), t \leq \tau_n) &= V(\zeta_N(n)) + \gamma_N \left(\alpha b_2 - \delta \frac{\varkappa}{N(N-1)} V(\zeta_N(n)) \right). \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям математическое ожидание, получим рекуррентные уравнения

$$s(n+1) = s(n) + \gamma_N \alpha a, \quad (12)$$

$$d(n+1) = d(n) \left(1 - \gamma_N \delta \frac{\varkappa}{N(N-1)} \right) + \gamma_N \alpha b_2 \quad (13)$$

Из (12) легко получается утверждение теоремы 2. Итерируя уравнение (13), получим

$$d(n) = d(0) \left(1 - \gamma_N \delta \frac{\varkappa}{N(N-1)}\right)^n + (\gamma_N \alpha b_2) \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \gamma_N \delta \frac{\varkappa}{N(N-1)}\right)^j. \quad (14)$$

Подставляя в это выражение $n = \gamma_N^{-1} t(N)$ и устремляя N к бесконечности, приходим к утверждению теоремы 3. \square

Доказательство Теоремы 4. Воспользуемся представлением (14) и рассмотрим

$$r_N := d_N(0) \left(1 - \gamma_N \delta \frac{\varkappa}{N(N-1)}\right)^{\gamma_N^{-1} t(N)}$$

Так как $r_N \leq d_N(0)$ при больших N , то в силу предположения $R_N(0)/t(N) \rightarrow 0$ имеем $r_N = o(t(N))$. Этого достаточно для завершения доказательства в случаях первой и второй временных зон. Предположим теперь, что $t(N)/N^2 \rightarrow \infty$ и покажем, что $r_N = o(N^2)$. Для этого запишем

$$r_N = \frac{d_N(0)}{t(N)} \left[\frac{t(N)}{N^2} \left(1 - \frac{\delta \varkappa}{\gamma_N^{-1} N(N-1)}\right)^{(\gamma_N^{-1} N^2) \cdot (t(N)/N^2)} \right] N^2$$

и заметим, что при сделанных предположениях выражение в квадратных скобках стремится к нулю. \square

Рассмотренная в § 5 стохастическая система частиц является базовым звеном для изучения в перспективе проблемы об общих закономерностях асимптотического поведения стохастических многокомпонентных моделей с синхронизацией. Как видно из настоящей работы, ключевыми моментами в доказательстве подобных результатов должны стать аналоги леммы 2. Трудности, которые возникают на этом пути, связаны с рассмотрением анизотропных синхронизаций, интересных для ряда приложений. Заметим, что в работах [19, 23], где представлены примеры анизотропных взаимодействий, изучено поведение систем лишь на гидродинамической шкале, тогда как в настоящей работе рассмотрены все возможные временные шкалы $t(N)$.

Список литературы

- [1] Дж.Л. Дуб, Вероятностные процессы, — Москва, 1956.
- [2] D. Jefferson, A. Witkowski, An approach to performance analysis of timestamp-driven synchronization mechanisms. Proceedings of the third annual ACM symposium on Principles of distributed computing (Vancouver, Canada). ACM Press, New York (1984), P.243–253.
- [3] D. Mitra, I. Mitrani, Analysis and Optimum performance of two message-passing parallel processors synchronized by rollback. Performance Evaluation 7 (1987), 111-124
- [4] Т. Лиггетт, Марковские процессы с локальным взаимодействием. — М.: Мир, 1989.
- [5] A. De Masi and E. Presutti, Mathematical Methods for Hydrodynamic Limits. Lecture Notes in Mathematics, 1501 (1991)
- [6] V.K. Madisetti, J.C. Walrand and D.G. Messerschmitt, Asynchronous Algorithms for the ParaSimulation of Event-Driven Dynamical Systems, ACM Transactions on Modelling and Computer Simulation, Vol. 1, No 3, July 1991, Pages 244-274

- [7] A. Gupta, I.F. Akyildiz, Fujimoto, Performance Analysis of Time Warp With Multiple Homogeneous Processors. IEEE Transactions On Software Engineering, Vol. 17, No. 10, October 1991, 1013.
- [8] I.F. Akyildiz, L. Chen, S.R. Dast, R.M. Fujimoto, R.F. Serfozo, Performance Analysis of Time Warp with Limited Memory. Performance Evaluation Review, Vol. 20, No. 1, June 1992
- [9] A. Kumar and R. Shorey, Stability of Event Synchronisation in Distributed Discrete Event Simulation. Proc. of the eighth workshop on parallel and distributed simulation. Edinburgh, Scotland, United Kingdom. 65–72 (1994).
- [10] S.Yu. Popov, A.G. Greenberg, V.A. Malyshev, Stochastic models of massively parallel computation. Markov Processes and Related Fields, V.1, N4 (1995), 473-490.
- [11] A.G. Greenberg, S. Shenker, A.L. Stolyar, Asynchronous Updates in Large Parallel Systems. SIGMETRICS 96 5/96 PA, USA
- [12] M. Gupta, A. Kumar, R. Shorey, Queueing Models and Stability of Message Flows in Distributed Simulators of Open Queueing Networks. Proc. of the tenth workshop on parallel and distributed simulation. Philadelphia, Pennsylvania, United States. 162–169 (1996).
- [13] R. Shorey, A. Kumar, and K.M. Rege, Instability and Performance Limits of Distributed Simulators of Feedforward Queueing Networks. ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, Vol. 7, No. 2, April 1997, Pages 210–238.
- [14] D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis, Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. Athena Scientific, Belmont, Mass. 1997.
- [15] M. Gupta and A. Kumar, A Nonblocking Algorithm for the Distributed Simulation of FCFS Queueing Networks with Irreducible Markovian Routing. Proc. of the twelfth workshop on parallel and distributed simulation. Banff, Alberta, Canada. 20–27 (1998).
- [16] C. Kipnis and C. Landim, Scaling Limits of Interacting Particle Systems. Springer, Berlin (1999).
- [17] Вознесенская Т.В. Анализ алгоритмов синхронизации времени для распределенного имитационного моделирования //Искусственный интеллект (Донецк), 2000, No 2, с.24-30
- [18] Вознесенская Т.В. Математическая модель алгоритмов синхронизации времени для распределенного имитационного моделирования // "Программные системы и инструменты": Тематический сборник факультета ВМиК МГУ им. Ломоносова N1 / Под ред. Л.Н.Королева -М.: МАКС Пресс, 2000, с.56-66
- [19] A. Manita, V. Shcherbakov, Asymptotic analysis of a particle system with mean-field interaction, Markov Processes Relat. Fields, 11, N. 3, 489-518 (2005)
- [20] Малышев В.А., Манита А.Д. Фазовые переходы в модели синхронизации времени. // Теор. вероятн. и ее прим. — 2005. — т. 50, вып. 1. — с. 150–158.
- [21] A. Manita, F. Simonot, Clustering in Stochastic Asynchronous Algorithms for Distributed Simulations, In Lecture Notes in Computer Science, Volume 3777, Nov 2005, Pages 26-37
- [22] V. Malyshev, A. Manita, Asymptotic Behavior of the Time Synchronization Model, In Representation Theory, Dynamical Systems, and Asymptotic Combinatorics. AMS, American Mathematical Society Translations — Series 2 Advances in the Mathematical Sciences (2006), Volume 217, Pages 101-115
- [23] А.Г. Малышкин, Предельная динамика для вероятностных моделей обмена информацией в сетях параллельных вычислений. Проблемы передачи информации, Т. 42 (2006), вып. 3, с. 78-96 .
- [24] А.Г. Малышкин, Стохастическая многочастичная синхронизация на малых временах. Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва, МГУ, 2006. С.114-118.