

Список вопросов к коллоквиуму по линейной алгебре и геометрии (2021/22 учебный год, III поток)

- (1) Линейное пространство. Определение, примеры. Линейная оболочка. Понятие об аффинном пространстве.
- (2) Линейная (не)зависимость системы векторов. Размерность.
- (3) Базис. Координаты. Зависимость координат от базиса.
- (4) Подпространство. Размерность подпространства. Дополнение базиса подпространства до базиса пространства. Фактор-пространство.
- (5) Пересечение и сумма подпространств. Теорема об их размерностях. Прямая сумма. Внешняя прямая сумма.
- (6) Линейные функции на линейном пространстве. Их координаты, их зависимость от базиса. Двойственное пространство. Двойственный базис.
- (7) Изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности. Канонический изоморфизм линейного пространства и его второго двойственного.
- (8) Евклидовы и эрмитовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника.
- (9) Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
- (10)  $QR$ -разложение обратимых матриц.
- (11) Ортогональное дополнение, его свойства. Проекция и ортогональная составляющая.
- (12) Расстояние от вектора до подпространства, угол между вектором и подпространством. Метод наименьших квадратов. Псевдорешение.
- (13) Матрица Грама. Ее изменение при заменах базиса. Объем  $n$ -мерного параллелепипеда. Связь невырожденности матрицы Грама и линейной независимости векторов. Неотрицательность определителя.
- (14) Билинейные функции. Линейное пространство  $B(V)$ . Правое и левое ядро, их размерности. Невырожденность.
- (15) Матрица билинейной функции, ее изменение при заменах базиса. (Косо)симметричные функции. Квадратичные функции.
- (16) Нормальный вид симметричных билинейных функций над полями  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{C}$ .
- (17) Единственность нормального вида (косо)симметричных билинейных функций. Теорема инерции.
- (18) Теорема Якоби об угловых минорах. Критерий Сильвестра.
- (19) Ортогональное дополнение относительно (косо)симметричной билинейной функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение.
- (20) Нормальный вид кососимметричных билинейных функций.
- (21) Приведение симметрической билинейной функции к каноническому виду в евклидовом пространстве.
- (22) Обобщенный характеристический многочлен. Пример пары квадратичных форм, которую нельзя одновременно привести к диагональному виду.
- (23) Теорема об одновременном приведении одной квадратичной функции к каноническому виду, а другой (положительно определенной) – к нормальному виду.
- (24) Псевдоевклидовы и симплектические пространства. Изотропные вектора. Псевдоортогональная и симплектическая группы. Описание групп  $O(2)$ ,  $O(1, 1)$ ,  $Sp(2)$ .
- (25) Изотропные подпространства в симплектическом пространстве. Лагранжевы подпространства. Существование для любого изотропного подпространства соержащего его лагранжева подпространства.
- (26) Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Зависимость ее от базиса. Пространство линейных отображений, его размерность.
- (27) Ядро и образ линейного отображения. Теорема об их размерностях.
- (28) Линейные операторы. Обратимость оператора. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора на инвариантное подпространство. Вид матрицы оператора, обладающего инвариантным подпространством.
- (29) Собственные значения и собственные векторы. Существование нетривиальных инвариантных подпространств в случае алгебраически замкнутого поля. Приведение матрицы оператора к верхнетреугольному виду.
- (30) Операторы проектирования. Их алгебраическая и геометрическая характеристика.
- (31) Диагонализуемые операторы, их характеристика.
- (32) Многочлены от операторов. Аннулирующий многочлен, его существование. Минимальный многочлен. Характеристический многочлен. Корни минимального и характеристического многочлена.
- (33) Теорема Гамильтона–Кэли.
- (34) Корневые подпространства. Стабилизация.
- (35) Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств (для случая алгебраически замкнутого поля).
- (36) Теорема Жордана о приведении к нормальной форме. Формулировка, сведение доказательства к случаю операторов с единственным собственным значением, доказательство единственности.
- (37) Операторы с единственным собственным значением. Теорема Жордана о приведении к нормальной форме для таких операторов.
- (38) Овеществление и комплексификация линейных пространств и операторов. Комплексная структура.
- (39) Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств у операторов над  $\mathbf{R}$ .
- (40) Сопряженный оператор. Инвариантность (для сопряженного оператора) ортогонального дополнения к инвариантному подпространству.
- (41) Самосопряженные операторы, их канонический вид.
- (42) Кососимметрические операторы, их канонический вид.
- (43) Изометрические операторы как операторы, сохраняющие скалярное произведение. Инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству.
- (44) Канонический вид унитарного оператора.
- (45) Канонический вид ортогонального оператора.
- (46) Неотрицательные операторы. Существование и единственность неотрицательного квадратного корня из неотрицательного оператора.
- (47) Полярное разложение оператора (доказательство для обратимых операторов).
- (48) Нормальные операторы, их канонический вид (для эрмитовых пространств).
- (49) Теорема об одновременном приведении к каноническому виду пары нормальных операторов.
- (50) Тензоры как полилинейные функции. Их координаты. Координатное определение тензоров.
- (51) Тензорное произведение тензоров. Базис в пространстве тензоров.
- (52) Пример тензора типа  $(0, 2)$ . Свертка тензоров. Поднятие и опускание индексов в случае евклидова пространства.
- (53) Симметричные и кососимметричные тензоры. Альтернирование. Внешнее умножение, его свойства. Базис в пространстве кососимметричных тензоров.