Учебник: И.М.Гельфанд. Лекции по линейной алгебре.
Задачник: Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре под ред. Ю.М.Смирнова.

Линейные пространства.

векторы

складывать, умн. на число, скалярн. пр.
в пр-ве — векторн. пр.

многочлены $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

скл., умн. на число, умножать друг на друга
вычислять корни.

матрицы фиксир. размера, квадр.
сложение, умн. на число, умн. матриц друг на друга, …

функции на [0,1]. слож. и умн. на число
умн., дифф., …

сложение и умножение на число

числа: поле $+, \cdot$ $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ — поля
$\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ не поля.

формально мы будем работать с произвольным полем $\mathbb{K}$, но фактически основными полями будут $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Числа (или элементы поля $\mathbb{K}$) будем называть скалярами.

Линейное (векторное) пространство

Определение 1. Множество V называется *линейным (векторным) пространством* над некоторым полем $\mathbb{K}$, если заданы операция $+$ сложения двух элементов множества V и операция умножения $\cdot$ элементов множества V на элементы поля $\mathbb{K}$, которые удовлетворяют следующим условиям (аксиомам):

абел. группы

(i) $a + b = b + a \ \forall a, b \in V$,

(ii) $(a + b) + c = a + (b + c) \ \forall a, b, c \in V$, — можно без скобок

(iii) $\exists 0 \in V : a + 0 = a \ \forall a \in V$,

(iv) $\forall a \in V \ \exists(-a) : a + (-a) = 0$, обратный элемент

(v) $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b \ \forall a, b \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

(vi) $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a \ \forall a \in V, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, дистриб.

(vii) $\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda\mu) \cdot a \ \forall a \in V, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, ассоц. λ и μ

(viii) $\mathbf{1} \cdot a = a \ \forall a \in V$. в любом поле $\mathbb{K}$ существует 1

Первые 4 свойства определяют на V структуру абелевой группы, а последние 4 свойства — структуру алгебры над полем $\mathbb{K}$.

Элементы множества V обычно называются векторами, а элементы поля $\mathbb{K}$ — скалярами или числами. Обычно мы будем опускать знак умножения $\cdot$.

Свойства линейного пространства:

(i) нулевой элемент в множестве V определен однозначно,

(ii) для любого элемента обратный элемент определен однозначно,

(iii) $\mathbf{0} \cdot a = 0 \ \forall a \in V$, 0 здесь – это ноль поля $\mathbb{K}$.

(iv) $\lambda \cdot 0 = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, 0 здесь – это ноль в V

(v) $(-a) = (-\mathbf{1}) \cdot a \ \forall a \in V$,

(vi) если $\lambda \cdot a = 0$, то либо $\lambda = \mathbf{0}$, либо $a = 0$.

$\in \mathbb{K}$ $\quad$ $\in V$.

Доказательство.

(i) если $0'$ — другой нулевой элемент, то $0 = 0 + 0' = 0'$.

(ii) если $b + a = 0$, то $(-a) = (-a) + 0 = (-a) + b + a = (-a) + a + b = 0 + b = b$.

(iii) $0 = a + (-a) = \mathbf{1}a + (-a) = (\mathbf{1} + \mathbf{0})a + (-a) = \mathbf{1}a + \mathbf{0}a + (-a) = a + \mathbf{0}a + (-a) = a + (-a) + \mathbf{0}a = 0 + \mathbf{0}a = \mathbf{0}a$.

(iv) если $\lambda = \mathbf{0}$, то равенство $\mathbf{0} \cdot 0 = 0$ доказано в предыдущем пункте; если $\lambda \neq \mathbf{0}$, то $a + \lambda a = \lambda\lambda^{-1}a + \lambda 0 = \lambda(\lambda^{-1}a + 0) = \lambda(\lambda^{-1}a) = a$, и $\lambda 0 = 0$ следует из единственности нулевого элемента.

$a = 1 \cdot a$, $\lambda^{-1} \cdot \lambda$

(v) $a + (-\mathbf{1})a = \mathbf{1}a + (-\mathbf{1})a = (\mathbf{1} + (-\mathbf{1}))a = \mathbf{0}a = 0$, поэтому $(-\mathbf{1})a = (-a)$ в силу единственности обратного элемента.

(vi) пусть $\lambda \cdot a = 0$; если $\lambda \neq 0$, то $a = \lambda^{-1}\lambda a = \lambda^{-1}0 = 0$.

$\square$

$\mathbb{R}^n$ — столбцы из n чисел

столбцы $\mathbb{K}^n$

Примеры линейных пространств:

(i) множество, состоящее из одного элемента $\{0\}$ является линейным пространством над любым полем,

(ii) множество векторов на прямой, на плоскости, в пространстве,

(iii) наборы из n чисел, $V = \{a_1, \ldots, a_n\colon a_i \in \mathbb{K}\}$, где сложение и умножение на скаляры определяется покомпонетно,

$\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$

$(a_1, \ldots a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$

$\mathbb{K}_n$ строчки

(iv) множество $\mathbb{K}_n[t]$ — множество многочленов степени не выше n с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ от переменной t,

произв. степени

(v) множество функций $F(x)$, определенных на некотором произвольном множестве X, со значениям в множестве $\mathbb{K}$,

слож. и умн. на числа — поточечно.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x),\ x \in X$

(vi) множество решений однородной системы линейных уравнений,

(vii) $\mathbb{R}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{Q}$,

(viii) $\mathbb{C}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.

(iii') наборы из $n \cdot m$ чисел, т. е. матрицы $n \times m$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

умн. на $\lambda \in \mathbb{K}$ — аналогично

к пункту (iv): контрпример: мн-во многочленов степени ровно n: не линейное пр-во.

$\underline{AX = 0}$ $\quad$ X_1 и X_2 — реш., то $X_1 + X_2$ — реш.

$\lambda \cdot X_1$ — реш. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

если неоднор. $\quad AX = B \neq 0$ $\quad$ сумма двух реш. неодн. не будет реш.

Пример.. числовые послед. $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ $\quad$ $+$ и $\cdot$ опред. поэлементно

сходящиеся; сходящиеся к 0.

сход. к 1 — не образ. лин. пр

Определение 2. Пусть дано линейное пространство V. Линейной функцией (линейным функционалом) называют отображение $f : V \to \mathbb{K}$, обладающее свойствами: $f(a+b) = f(a) + f(b)$ и $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ $\forall a, b \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

обозначение двойств. пр. V' f лин., g – лин. $f+g$ – лин.

(ix) множество линейных функционалов является линейным пространством (оно называется двойственным пространством к V). $V \to \mathbb{K}$ линейное.

Пример. $V = \mathbb{K} = \mathbb{R}$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = kx + b$ линейна только при $b = 0$ $f(x) = kx$

$f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) + b \neq$ $f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$\neq kx_1 + b + kx_2 + b = f(x_1) + f(x_2)$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $f : V \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = kx + ly$, $k, l \in \mathbb{R}$.

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Определение 3. Пусть дано линейное пространство W, его непустое подмножество $V \subset W$ называется линейным *подпространством*, если оно замкнуто относительно операций, определенных в пространстве W, т.е., если выполнены следующие свойства:

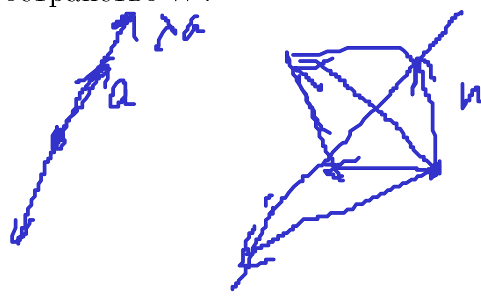
1) $a + b \in V \ \forall a, b \in V$,
2) $\lambda a \in V \ \forall a \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

Лемма 4. *Подпространство V линейного пространства W само является линейным пространством над тем же полем и с теми же операциями, что и W.*

Доказательство. Все условия определения линейного пространства выполнены, т.к. все элементы V являются элементами W, а для элементов W они выполнены по определению. □

Примеры подпространств. Пусть пространство W — это множество векторов на плоскости, тогда следующие множества будут подпространствами:

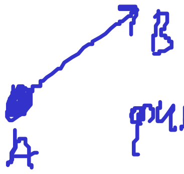
1) $\{0\}$,
2) множество всех векторов, коллинеарных некоторому заданному вектору,
3) само пространство W.



не лин. подпр.

W – мн-во всех числ. посл.

V – посл. сход. к 0



фикс. A, получим вз.-однозн. соотв. между точками и вект.

Аффинное пространство

Определение 5. Аффинным пространством называется тройка $(\mathcal{A}, V, +)$, состоящая из множества $\mathcal{A}$, векторного пространства V и операции сложения $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, (т.е. складывать можно элемент множества $\mathcal{A}$ с элементом векторного пространства, при этом в результате получается элемент множества $\mathcal{A}$), которая удовлетворяет следующим свойствам:

1) для любых $A, B \in \mathcal{A}$ существует единственный вектор $v \in V$, такой что $B = A + v$;
2) $A + 0 = A$ для любого $A \in \mathcal{A}$, где 0 — нулевой вектор;
3) $(A + v) + w = A + (v + w)$ для любых $A \in \mathcal{A}, v, w \in V$.

$\mathcal{A} = \{a + v : v \in V\}$

В обозначении аффинного пространства часто опускают знак плюс и пишут просто $(\mathcal{A}, V)$. Также, если из контекста понятно, какое пространство V имеется в виду, то и его не указывают и говорят об аффинном пространстве $\mathcal{A}$. Элементы аффинного пространства (или множества $\mathcal{A}$) называют точками. Любая пара точек $A, B \in \mathcal{A}$ однозначно определяет вектор v равенством $B = A + v$ (свойство 1) и такой вектор обозначается AB.

$a + V$
$a + V'$

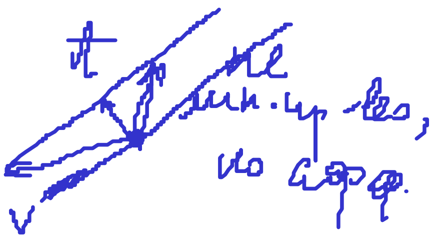
Примеры:

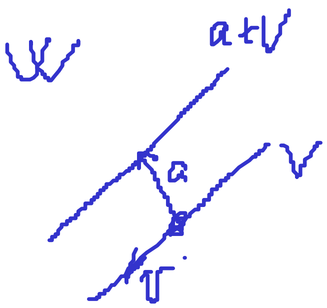
1) $\mathcal{A}$ — это обычная плоскость, V — двумерное векторное пространство векторов плоскости, $+$ — приложение вектора к точке.

2) Рассмотрим систему линейных уравнений $AX = B$, где A — матрица, X, B — столбцы. Пусть $\mathcal{A}$ — множество решений этой системы, V — множество решений соответсвующей однородной системы $AX = 0$, $+$ — суммирование столбцов. Если $X_B \in \mathcal{A}$ и $X_0 \in V$, то $X_B + X_0 \in \mathcal{A}$.

3) Возьмем какое-нибудь векторное пространство V, в качестве $\mathcal{A}$ возьмем его же, $+$ — операция сложения в этом векторном пространстве. $V \to (V, V, +)$ $(\mathcal{A}, V, +) \to V$

Последний пример показывает, что имеется естественное соответствие между векторными и аффинными пространствами, и теория аффинных пространств полностью параллельна теории векторных пространств, поэтому в дальнейшем мы ограничимся только случаем векторных пространств, постоянно помня, что все результаты могут быть сформулированы в терминах точек и векторов аффинного пространства. Отождествляя $\mathcal{A}$ и V, мы будем иногда называть элементы векторного пространства точками.





~~Факторпространство~~

Определение 6. Пусть дано линейное пространство W, его элемент $a \in W$ и его подпространство $V \subset W$. *Линейным подмногообразием* называется множество всех векторов вида $a + v$, где $v \in V$. всегда аффинные пр-ва.

Для линейных подмногообразий удобно пользоваться обозначением $a + V$.

Лемма 7. *Линейное подмногообразие $a + V$ является линейным подпространством пространства W тогда и только тогда, когда $a \in V$.*

аффинное

Доказательство.
1) если $a \in V$, то $a + V = 0 + V = V$ (совпадают как множества).
2) пусть $a+V$ является подпространством. Т.к. $a \in a+V$, то $2a \in a+V$, что равносильно существованию некоторого $b \in V$, такого что $2a = a + b$, но тогда получаем, что $a = b$, т.е. $a \in V$. $\square$

Лемма 8. $a_1 + V = a_2 + V \iff a_1 - a_2 \in V$.

Доказательство.
$\Rightarrow$: пусть $a_1 + V = a_2 + V$, тогда $a_1 \in a_1 + V = a_2 + V$, значит, найдется такой вектор $b \in V$, что $a_1 = a_2 + b$, т.е. $a_1 - a_2 \in V$.
$\Leftarrow$: пусть $a_1 - a_2 \in V$, т.е. $a_1 - a_2 = v \in V$. Возьмем произвольный элемент $b \in a_1 + V$. Тогда $b = a_1 + b'$ для какого-то вектора $b' \in V$. Покажем, что $b \in a_2 + V$. Действительно, $b = a_1 + b' = a_2 + (v + b')$, причем $v + b' \in V$. $\square$

Определение 9. *Фактор-пространством* W/V линейного пространства W по, подпространству V называется множество $\{a + V : a \in W\}$ — множество всех линейных подмногообразий пространства W, заданных подпространством V, с определенными на нем операциями сложения, $(a + V) + (b + V) := (a + b) + V$, и умножения на скаляры, $\lambda(a + V) := \lambda a + V$.

Лемма 10. *Факторпространство линейного пространства само является линейным пространством.*

Доказательство.
1) Сначала докажем, что введенные нами в факторпространстве операции корректны, т.е. какие бы мы ни брали элементы подмногообразий в качестве a и b, мы получим одно и то же подмногообразие. Докажем это для сложения (для умножения доказывается аналогично): если

$$a_1 + V = a_2 + V, \quad b_1 + V = b_2 + V,$$

то

$$a_1 - a_2 = v \in V, \quad b_1 - b_2 = w \in V,$$

поэтому

$$(a_1 + b_1) + V = (a_2 + b_2 + v + w) + V = (a_2 + b_2) + (v + w) + V = (a_2 + b_2) + V,$$

т.е. сложение определено корректно.
2) Проверим свойства линейного пространства. Ввиду простоты ограничимся проверкой одного из восьми свойств, например 5).

$$\begin{aligned}
\lambda((a + V) + (b + V)) &= \lambda((a + b) + V) = \lambda(a + b) + V = \\
&= (\lambda a + \lambda b) + V = (\lambda a + V) + (\lambda b + V) = \\
&= \lambda(a + V) + \lambda(b + V).
\end{aligned}$$

$\square$