Симметрические билинейные функции на евклидовом пространстве

Приступим к рассмотрению билинейных функций на евклидовом пространстве. Пусть нам задано такое пространство V со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

Рассмотрим симметричную билинейную функцию g и соответствующую ей квадратичную функцию $Q(x) = g(x,x)$.

Пусть $t \in \mathbb{R}$. Вектор-функция $a(t)$ называется *дифференцируемой*, если все координаты $a^1(t),\dots,a^n(t)$ векторнозначной функции $a(t)$ дифференцируемы. Легко проверить, что это определение не зависит от выбора базиса, в котором эти координаты записаны (хотя сами координаты от базиса зависят). Производную вектор-функции a обозначим a' или $\frac{da}{dt}$. Рассмотрим числовую функцию $Q(a(t)) = g(a(t),a(t))$.

Лемма 25. $\frac{dQ(a(t))}{dt} = 2g(a(t), \frac{da(t)}{dt})$.

$, g(e_i, e_j)$

Доказательство. Выберем базис; пусть g_{ij} — коэффициенты матрицы симметричной билинейной функции (= матрицы квадратичной функции), $a^i(t)$ — координаты вектор-функции в этом базисе. Тогда

$g(a,b)=\sum_{i,j} g_{ij}a^ib^j$

$$\begin{aligned}
\frac{dQ(a(t))}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}a^i(t)a^j(t) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(g_{ij}\frac{da^i(t)}{dt}a^j(t) + g_{ij}a^i(t)\frac{da^j(t)}{dt}\right) = \\
&= g\left(a(t), \frac{da(t)}{dt}\right) + g\left(\frac{da(t)}{dt}, a(t)\right) = \\
&= 2g\left(a(t), \frac{da(t)}{dt}\right).
\end{aligned}$$

☐

Нам понадобится следующее утверждение из курса математического анализа.

Теорема 26. *Непрерывная функция f, заданная на замкнутом ограниченном множестве $S \subset \mathbb{R}^n$ достигает своего максимального значения в некоторой точке $x \in S$.*

Применим это утверждение к функции $f(x) = Q(x)$ на множестве векторов x единичной длины, т.е. $S = \{x \in V : |x| = 1\}$. Итак, существует вектор $a \in S$, на котором функция $Q(x)$ достигает своего максимума на множестве S.

Возьмем вектор $b \in V$, и рассмотрим вектор-функцию $x(t) = \cos ta + \sin tb$.

лин. комб. a и b

$x'(t)=-\sin t\cdot a+\cos t\, b$

Лемма 27. *Если $(a,b) = 0$, то $g(a,b) = 0$.*

Доказательство. Так как функция $Q(x)$ достигает максимума при $x = a$, функция $h(t) = Q(x(t))$ достигает максимума при $t = 0$ (т.к. $x(0) = a$). Эта функция дифференцируемая, поэтому $\frac{d}{dt}h(t)|_{t=0} = 0$. По Лемме 25, $0 = g(x(0), \frac{dx}{dt}|_{t=0}) = g(a,b)$ (т.к. $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = b$). ☐

$a=e_1,\ b=e_i,\ i>1$

Теорема 28. *Пусть Q — квадратичная функция на евклидовом пространстве V. Тогда существует ортонормированный базис $e_1,\dots,e_n$, в котором матрица G функции Q имеет диагональный вид.*

Доказательство. Доказываем по индукции по размерности. Если $n = \dim V = 1$, то утверждение очевидно — одномерная матрица есть число. Докажем индукционный переход. Пусть a — вектор единичной длины,на котором функция $Q(x)$ достигает максимума на S. Возьмем его в качестве первого базисного вектора, $e_1 = a$, и дополним его до ортонормированного базиса всего V векторами $e_2, \ldots, e_n$. Поскольку в этом базисе коэффициенты квадратичной функции равны $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, по Лемме 27 получаем, что $g_{1i} = 0 = g_{i,1}$ для $i = 2, \ldots, n$. Обозначим $g_{11} = \lambda_1$. Тогда матрица квадратичной функции Q в указанном базисе имеет вид $G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Матрица G' — матрица квадратичной функции на подпространстве $L = \langle e_2, \ldots, e_n \rangle$, $\dim L = n - 1$. По предположению индукции, в L существует ортонормированный базис, в котором матрица этой функции имеет диагональный вид, $\widetilde{G}' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n$ $\quad \widetilde{G}'$

☐

Лемма 29. *Указанный в теореме диагональный вид единственен с точностью до перестановки диагональных элементов.*

Доказательство. Пусть G — матрица квадратичной функции Q в некотором ортонормированном базисе, а $\widetilde{G}$ — ее же матрица в другом ортонормированном базисе. Тогда $\widetilde{G} = C^t G C$, где C — ортогональная матрица перехода, и

$C^t \cdot C = E$ – орт.

$$\det(\widetilde{G} - \lambda E) = \det(C^t G C - \lambda E) = \det(C^t(G - \lambda E)C) = \det(G - \lambda E),$$

поэтому корни многочлена $\det(G - \lambda E)$ не зависят от выбора ортонормрованного базиса. Но если $\widetilde{G} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то эти корни равны $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

$\underbrace{\det C^t}\cdot \det(G - \lambda E) \cdot \underbrace{\det C}$

☐

Определение 30. Этот диагональный вид называется *каноническим видом* билинейной функции. Векторы соответствующего базиса (он тоже называется каноническим базисом) называются главными осями функции Q, и иногда приведение к каноническому виду называют приведением к главным осям.

Например, в трехмерном пространстве уравнение $Q(x) = 1$ задает поверхность второго порядка, а ее уравнение в главных осях имеет вид $\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2 = 1$.

Пара симметричных билинейных функций

Теорема 31. *Пусть на векторном пространстве V заданы две билинейные симметричные функции g и h, и пусть g положительно определена, т.е. $g(x, x) > 0$ $\forall x \neq 0$. Тогда существует базис в V, в котором одновременно матрица функции g имеет нормальный вид, а матрица функции h — канонический (т.е. матрица функции g единична, а матрица функции h — диагональна).*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, что, поскольку функция g положительно определена, то на V с ее помощью можно определить скалярное произведение по

$g_{ij} = g(e_i, e_j)$ — единичн. матр.

формуле $(a, b) := g(a, b)$ (все аксиомы скалярного произведения легко проверяются). Следовательно, на V можно ввести структуру евклидового пространства. При этом в любом ортонормированная базисе (относительно введенного только что скалярного произведения) матрица Грама (она же — матрица функции g) будет единичной. По предыдущей теореме существует ортонормированный базис, в котором матрица функции h имеет канонический вид. ☐

Покажем, как найти канонический вид функции h и канонический базис. Рассмотрим определитель $\det(H - \lambda G)$, где H — матрица функции h, а G — матрица функции g в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$. Введем скалярное произведение с помощью функции g. Пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ — ортонормированный базис (по отношению к введенному скалярному произведению). Пусть H' и G' — матрицы этих функций в базисе $e'_1, \ldots, e'_n$. Пусть также C — матрица перехода от базиса $e'_1, \ldots, e'_n$ к $e_1, \ldots, e_n$. Тогда $G = C^t G' C$ и $H = C^t H' C$, причем, т.к. базис $e'_1, \ldots, e'_n$ ортонормирован, то $G' = E$. Получим

$G = E$ — обычн

$$\det(H - \lambda G) = \det(C^t H' C - \lambda C^t E C) = \underbrace{\det C^t}_{\neq 0} \det(H' - \lambda E) \underbrace{\det C}_{\neq 0},$$

обобщ. характ. мн.

следовательно, многочлены $\det(H - \lambda G)$ и $\det(H' - \lambda E)$ отличаются лишь числовым множителем, значит их корни совпадают. Т.к. диагональные элемента канонического вида функции h — это корни многочлена $\det(H' - \lambda E)$, то они будут также корнями уравнения $\det(H - \lambda G)$. Последнее уравнение называется *обобщенным характеристическим уравнением.* для пары симметричных билинейных функций.

Нахождение канонического базиса. Пусть x — собственный вектор матрицы H', отвечающий собственному значению λ. Пусть X — столбец координат этого вектора в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$, а X' — столбец координат этого же вектора в первоначальном базисе $e'_1, \ldots, e'_n$. Чтобы найти X', нужно решить уравнение $(H' - \lambda E)X' = 0$. Т.к. $X' = CX$, то это уравнение равносильно уравнению $(H' - \lambda E)CX = 0$, домножим его слева на C^t и получим $C^t(H' - \lambda E)CX = 0$, т.е. $(H - \lambda G)X = 0$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

$(H - \lambda E) X = 0$

Лемма 32. *Корни многочлена* $\det(H - \lambda G)$ *не зависят от выбора базиса и являются диагональными элементами канонического вида матрицы функции* h*, а координаты векторов канонического базиса ищутся как решение системы уравнений* $(H - \lambda G)X = 0$.

Покажем на примере, что требование положительной определенности хотя бы одной из двух функций существенно. Пусть билинейные симметричные функциии g и h заданы матрицами $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ни одна из них не является положительно определенной. Допустим, что существует базис, удовлетворяющий условию теоремы, тогда уравнение $\det(H - \lambda G) = 0$ должно иметь вещественные корни (т.к. эти корни суть диагональные элементы матрицы канонического вида функции h). Но это уравнение не имеет вещественных корней, следовательно, такого базиса не существует.

Пространства с обобщенным скалярным произведением. Группы операторов, сохраняющих обобщенное скалярное произведение

Определение 33. Вещественное пространство с заданной на нем невырожденной симметричной билинейной функцией называется *псевдоевклидовым* пространством.

Вещественное пространство с заданной на нем невырожденной кососимметричной билинейной функцией называется *симплектическим* пространством.

Первый случай является естественным обобщением евклидового пространства. Скалярное (обобщенное) произведение задается симметричной билинейной функцией g, $(x, y) =$

$a(t)$ $\quad e_1, \dots, e_n$ — базис

$a^1(t), \dots, a^n(t)$

$$a(t) = a^1(t)e_1 + \dots + a^n(t)e_n.$$

$\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ $\quad a(t) = \tilde{a}^1(t)\tilde{e}_1 + \dots + \tilde{a}^n(t)\tilde{e}_n$

$$\begin{pmatrix} a^1(t) \\ \vdots \\ a^n(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{a}^1(t) \\ \vdots \\ \tilde{a}_n(t) \end{pmatrix}$$

$a^i(t) = \underbrace{c^i_j \tilde{a}^j(t)}$ – сумма по j.

$f : \underline{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $\quad f(x) = x$

$\breve{S}$ $\quad (0, 1)$ $\quad \frac{1}{x}$

$$\underline{\lambda_1} x_1^2 + \dots + \underline{\lambda_n} x_n^2$$

$$\Vert$$

$$\tilde{x}_1^2 + \dots$$

$$x_1 \leftrightarrow x_2$$

$$\lambda_1 > 0$$

$$\underline{\sqrt{\lambda_1}\, x_1 = \tilde{x}_1}$$

норм. вид $x_1^2+\dots+x_k^2-x_{k+1}^2-\dots-x_{k+l}^2$

(базис без доп. огр.)

канонич вид $\lambda_1 x_1^2+\dots+\lambda_n x_n^2$

(базис ортонорм.)

$x^2+y^2=1$ в подх. аф. с.к.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в ортог. с.к симм. билин $\longleftrightarrow$ квадр.

$g(x,y) \longmapsto Q(x)=g(x,x)$

$\longmapsfrom \; Q(x)$

$$g(x,y)=\frac{1}{2}\left(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right)$$

матрица Q по опр. это матрица g $\quad g_{ij}=g(e_i,e_j$

ск. пр. на лин-пр-ве V

$(\cdot,\cdot)$

1) билин.

2.) симм.

3.) полож. опр.

$$\underline{(a,b) = g(a,b)}$$

g симм-билин., пол. опр.

$\Rightarrow$ задает скал. пр.

$g, \underline{\underline{G}}$ они задают скал. пр.

ортонорм. базис G становится единичной

h — симм. билин. ф-я в евклид. пр-ве

приводится к канонич. виду.

$$h(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

и приводим к канонич- виду.

что при этом происх. с матрицей

ф-ии g ?

$\boxed{E}$.

привед. к канон.
виду — ортог.
матр. перехода

$$C^t \underline{E} C = \underline{E}.$$

$G = \begin{pmatrix} \enclose{circle}{0} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $a=(1,0)$ $g(a,a)=0$

$a \neq 0.$ не пол. опр.

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$ $b-(0,1)$

$h(b,b) = -1$

e_1, e_2 - базис, в котором $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ диаг.

$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\tilde{H} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \\ & \mu_2 \end{pmatrix}.$

$\boxed{\det(H-\lambda G)}$ имеет те же корни, что

$\boxed{\det(\bar{H}-\lambda \bar{G})}$

$$\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mu_1-\lambda\lambda_1 & 0\\ 0 & \mu_2-\lambda\lambda_2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(\mu_1-\lambda\lambda_1)(\mu_2-\lambda\lambda_2) = 0$$

если $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, то

$\lambda = \frac{\mu_1}{\lambda_1}$, $\lambda = \frac{\mu_2}{\lambda_2}$. Если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$

если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ нет корней, или $\forall_{ex}$ $\lambda = \frac{\mu_2}{\lambda_2}$)

$$\det(H-\lambda G)=\det\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}1&-\lambda\\-\lambda&-1\end{vmatrix}=-1-\lambda^2=0$$

чисто мнимые корни.