формуле $(a,b) := g(a,b)$ (все аксиомы скалярного произведения легко проверяются). Следовательно, на V можно ввести структуру евклидового пространства. При этом в любом ортонормированная базисе (относительно введенного только что скалярного произведения) матрица Грама (она же — матрица функции g) будет единичной. По предыдущей теореме существует ортонормированный базис, в котором матрица функции h имеет канонический вид. $\square$

Покажем, как найти канонический вид функции h и канонический базис. Рассмотрим определитель $\det(H-\lambda G)$, где H — матрица функции h, а G — матрица функции g в некотором базисе $e_1,\ldots,e_n$. Введем скалярное произведение с помощью функции g. Пусть $e_1',\ldots,e_n'$ — ортонормированный базис (по отношению к введенному скалярному произведению). Пусть H' и G' — матрицы этих функций в базисе $e_1',\ldots,e_n'$. Пусть также C — матрица перехода от базиса $e_1',\ldots,e_n'$ к $e_1,\ldots,e_n$. Тогда $G = C^tG'C$ и $H = C^tH'C$, причем, т.к. базис $e_1',\ldots,e_n'$ ортонормирован, то $G' = E$. Получим

$$\det(H-\lambda G) = \det(C^tH'C - \lambda C^tEC) = \underbrace{\det C^t}_{\neq 0}\det(H'-\lambda E)\underbrace{\det C}_{\neq 0},$$

следовательно, многочлены $\det(H-\lambda G)$ и $\det(H'-\lambda E)$ отличаются лишь числовым множителем, значит их корни совпадают. Т.к. диагональные элемента канонического вида функции h — это корни многочлена $\det(H'-\lambda E)$, то они будут также корнями уравнения $\det(H-\lambda G)$. Последнее уравнение называется *обобщенным характеристическим уравнением.* для пары симметричных билинейных функций.

Нахождение канонического базиса. Пусть x — собственный вектор матрицы H', отвечающий собственному значению λ. Пусть X — столбец координат этого вектора в ортонормированном базисе $e_1,\ldots,e_n$, а X' — столбец координат этого же вектора в первоначальном базисе $e_1',\ldots,e_n'$. Чтобы найти X', нужно решить уравнение $(H'-\lambda E)X' = 0$. Т.к. $X' = CX$, то это уравнение равносильно уравнению $(H'-\lambda E)CX = 0$, домножим его слева на C^t и получим $C^t(H'-\lambda E)CX = 0$, т.е. $(H-\lambda G)X = 0$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Лемма 32. *Корни многочлена* $\det(H-\lambda G)$ *не зависят от выбора базиса и являются диагональными элементами канонического вида матрицы функции h, а координаты векторов канонического базиса ищутся как решение системы уравнений* $(H-\lambda G)X = 0$.

Покажем на примере, что требование положительной определенности хотя бы одной из двух функций существенно. Пусть билинейные симметричные функциии g и h заданы матрицами $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ни одна из них не является положительно определенной. Допустим, что существует базис, удовлетворяющий условию теоремы, тогда уравнение $\det(H-\lambda G) = 0$ должно иметь вещественные корни (т.к. эти корни суть диагональные элементы матрицы канонического вида функции h). Но это уравнение не имеет вещественных корней, следовательно, такого базиса не существует.

Пространства с обобщенным скалярным произведением. Группы операторов, сохраняющих обобщенное скалярное произведение

Определение 33. Вещественное пространство с заданной на нем невырожденной симметричной билинейной функцией называется *псевдоевклидовым* пространством.

Вещественное пространство с заданной на нем невырожденной кососимметричной билинейной функцией называется *симплектическим* пространством.

Первый случай является естественным обобщением евклидового пространства. Скалярное (обобщенное) произведение задается симметричной билинейной функцией g, $(x,y) =$

$g(x,y) = x^1y^1 + \ldots + x^py^p - x^{p+1}y^{p+1} - \ldots - x^ny^n$. Если в нормальном виде функции g все знаки — плюсы (т.е. если g положительно определена) то псевдоевклидово пространство является просто евклидовым. Матрица G функции g является обобщением матрицы Грама.

В псевдоевклидовом случае будем говорить, что базис $e_1, \ldots, e_n$ ортонормирован, если $g(e_i,e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pm 1 & i = j \end{cases}$. В симплектическом случае такое невозможно, т.к. $g(x,x) = 0$ для любого вектора x. Напомним, что матрица невырожденной кососимметричной функции имеет вид $\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$ (т.е. без клеток размера 1, т.к. наличие нулевых одномерных клеток противоречит невырожденности функции g). Следовательно, размерность четна. Пусть матрица функции g имеет указанный вид в базисе $e_1, \ldots, e_{2m}$.

2m=n

Рассмотрим базис $e_1, e_3, \ldots, e_{2m-1}, e_2, e_4, \ldots, e_{2m}$, в этом базисе матрица функции g имеет вид $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} & \mathbf{0} \end{array}\right)$. Такой базис называется *гамильтоновым*. В симплектическом пространстве значение функции g на паре векторов также называют их скалярным произведением (еще более обобщенным, чем псевдоевклидовое ~~или псевдоэрмитово~~).

$g_{ij} = g(e_i, e_j)$

Определение 34. Вектор $x \neq 0$ называется *изотропным*, если $g(x,x) = 0$.

Отметим, что в евклидовых пространствах изотропных векторов не существует. В псевдоевклидовом пространстве с обобщенным скалярным произведением с сигнатурой $(p, n-p, 0)$ вектор с координатами $(0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единицы на местах i, j, где $i \leqslant p$, $j > p$) является изотропным.

Рассмотрим в псевдоевклидовом пространстве множество всех матриц перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному.

Аналогично, в симплектическом пространстве рассмотрим множество всех матриц перехода от гамильтонова базиса к гамильтонову.

Лемма 35. *Каждое из этих двух множеств образует группу (по умножению).*

Доказательство. Так как оба базиса — одного типа (ортонормированные или гамильтоновы), матрица соответствующей билинейной функции имеет в них один и тот же вид G. Если C — матрица перехода, то $G = C^tGC$. Тогда $(C^t)^{-1}GC^{-1} = G$, поэтому матрица C^{-1} лежит в том же множестве. Если C_1 и C_2 удовлетворяют равенству $G = C^tGC$, то $(C_1C_2)^tG(C_1C_2) = C_2^t(C_1^tGC_1)C_2 = C_2^tGC_2 = G$, и C_1C_2 также удовлетворяет этому равенству. Наконец, единичная матрица, являясь матрицей перехода от некторого базиса к нему же, также удовлетворяет этому равенству.

$\square$

Эти группы имеют специальные названия и обозначения:

- *псевдоортогональная группа $O(p,q)$* — группа матриц перехода в псевдоевклидовом пространстве с сигнатурой $(p,q,0)$ (если $q = 0$, то группу $O(p,0)$ называют ортогональной и обозначают $O(p)$).

- *симплектическая группа $Sp(2m)$* — группа матриц перехода в симплектическом пространстве размерности $2m$.

Дадим описание этих групп в малых размерностях.

Группа $O(2)$ — группа матриц перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному на плоскости. Такие замены базиса могут собственными или несобственными (т.е. сохранять ориентацию плоскости или менять ее). Если ориентация сохраняется, то это просто поворот на некоторый угол φ и его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, а если ориентация меняется, то это еще и композиция с симметрией, и матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

Группа $O(1,1)$. В этом случае скалярное произведение задано формулой $g(x,y) = x^1y^1 - x^2y^2$ и вектор с координатами x, y будет иметь длину ± 1, если $x^2 - y^2 = \pm 1$, т.е. если его конец лежит на одной из гипербол, $x^2 - y^2 = 1$ или $x^2 - y^2 = -1$. В этом случае стандартный базис $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ также будет ортонормированным, но при повороте вектора e_1 против часовой стрелки, вектор e_2 будет поворачиваться по часовой стрелке и новый ортонормированный базис e_1', e_2' будет симметричен относительно прямой $y = x$. В этом случае матрица перехода должна удовлетворять условию $C^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Здесь будет уже не два, как в случае $O(2)$, а четыре различных класса матриц: $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ -\operatorname{sh}\varphi & -\operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ -\operatorname{sh}\varphi & -\operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}.$$

Поэтому иногда говорят, что псевдоортогональная группа состоит из четырех компонент.

$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Рассмотрим теперь симплектическую группу $Sp(2)$. Матрица скалярного произведения имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица перехода должна удовлетворять условию $ad - bc = 1$ $C^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, что равносильно условию $\det = 1$ (проверьте!). Таким образом, группа $Sp(2)$ совпадает с группой матриц, имеющих единичный определитель, $SL_2(\mathbb{R})$. Однако при больших размерностях пространства, симплектические группы не совпадают ни с какими, уже известными нам.

Симплектические пространства. Лагранжевы подпространства

Пусть W — симплектическое пространство с невырожденной кососимметричной билинейной функцией g.

Определение 36. Подпространство $V \subset W$ называется *изотропным*, если $V \subset V^{\perp_g}$.

Лемма 37. *V изотропно тогда и только тогда, когда $g(x,y) = 0$ для всех $x, y \in V$.*

Доказательство. Напомним, что $V^{\perp_g} = \{x \in W : g(x,y) = 0\ \forall y \in V\}$. Если $g(x,y) = 0$ для всех $x, y \in V$ и если $x \in V$, то $x \in V^{\perp_g}$, т.е. $V \subset V^{\perp_g}$. Обратно, если $V \subset V^{\perp_g}$, то для любого $x \in V$ имеем $x \in V^{\perp_g}$, т.е. $g(x,y) = 0$ для любого $y \in V$ (и, значит, $g(x,y) = 0$ для любых $x, y \in V$). □

Лемма 38. *Если подпространство $V \subset W$ изотропно, то $\dim V \leqslant \frac{1}{2}\dim W$, причем изотропное подпространство максимальной размерности $\frac{\dim W}{2}$ существует.*

Доказательство. Так как функция g невырождена, то $\dim V^{\perp_g} = \dim W - \dim V$, причем, поскольку $V \subset V^{\perp_g}$, то $\dim V^{\perp_g} \geqslant \dim V$. Следовательно, $\dim W = \dim V + \dim V^{\perp_g} \geqslant 2\dim V$, откуда $\dim V \leqslant \frac{\dim W}{2}$.

Возьмем гамильтонов базис $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m}$, где $m = \frac{\dim W}{2}$, и пусть $V = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle$. Т.к. этот базис гамильтонов, то в этом базисе матрица g имеет вид $\left(\begin{array}{c|c} 0 & E \\ \hline -E & 0 \end{array}\right)$, а матрица ограничения $g|_V$ функции g на V является просто нулевой. Следовательно, $g(x,y) = 0$ для любых $x, y \in V$, значит, V изотропно и имеет размерность $\dim V = \frac{\dim W}{2}$. $\square$

Определение 39. Изотропное подпространство максимальной размерности называется *лагранжевым.*

Следующее утверждение показывает, что любое изотропное подпространство можно вложить в лагранжево.

Лемма 40. *Для любого изотропного подпространства $V \subset W$ симплектического пространства существует такое лагранжево подпространство $\widetilde{V}$, что $V \subset \widetilde{V}$.*

Отметим, что подпространство $\widetilde{V}$, указанное в лемме, не единственно.

Доказательство. Пусть $\dim V = r \leqslant m = \frac{\dim W}{2}$, тогда, в силу невырожденности функции g на W, $\dim V^{\perp_g} = 2m - r$ и $V \subset V^{\perp_g}$. Обозначим через g' ограничение функции g на $V^{\perp_g}$. Очевидно, функция g' вырождена. Действительно, т.к. g невырождена, то $(V^{\perp_g})^{\perp_g} = V$ и $\operatorname{Ker} g' = V^{\perp_g} \cap (V^{\perp_g})^{\perp_g} = V$. Приведем g' к нормальному виду и получим, что в некотором базисе $\underbrace{e_1, \ldots, e_{m-r}}_{m-r}, \underbrace{e_{m-r+1}, \ldots, e_{2m-2r}}_{m-r}, \underbrace{e_{2m-2r+1}, \ldots, e_{2m-r}}_{r}$ ее матрица будет иметь вид $\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & E & 0 \\ \hline -E & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Т.к. $V = \operatorname{Ker} g$, то ему отвечает последняя группа векторов, т.е. $V = \langle e_{2m-2r+1}, \ldots, e_{2m-r} \rangle$. Добавив к V векторы $e_{m-r+1}, \ldots, e_{2m-2r}$, получим лагранжево подпространство $\widetilde{V} = \langle e_{m-r+1}, \ldots, e_{2m-2r}, e_{2m-2r+1}, \ldots, e_{2m-r} \rangle$. Оно, очевидно, содержит V и действительно является лагранжевым, т.к. функция g тождественно равна нулю на $\widetilde{V}$ (в матрице ограничению g на $\widetilde{V}$ отвечает правый нижний квадрат, состоящий из нулей) и $\dim \widetilde{V} = r + (m - r) = m$. $\square$

Аффинная классификация квадрик

Пусть в векторном пространстве V размерности n заданы квадратичная функция Q, линейная функция f и число a. Квадрикой называется уравнение $Q(x) + 2f(x) + a = 0$. Обозначим через r ранг квадратичной функции Q.

Лемма 41. *Любая квадрика в подходящем базисе имеет один из следующих видов:*

I $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 1$, *где* $0 \leqslant k \leqslant r$;

II $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 0$, *где* $k \geqslant \frac{r}{2}$;

III $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 2x_{r+1}$, *где* $k \geqslant \frac{r}{2}$.

Доказательство. Квадратичная функция приводится заменой базиса к виду $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$. Если после этого линейная функция содержит координату с номером больше r, то всю линейную часть можно заменой базиса привести к виду $2x_{r+1}$ и получить тип III. Если такой координаты нет, то группируя полные квадраты, можно от линейной части избавиться, и в зависимости от оставшейся константы получаем тип I или II. $\square$

пол. опр. евкл. $x_1^2+\dots+x_n^2$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

невыр. псевдоевкл.

$$C^t \cdot E \cdot C = C^t C$$

$$x_1^2+\dots+x_k^2-x_{k+1}^2-\dots-x_r^2$$

$$r \le n$$

$$r = \mathrm{rk}\, G.$$

невыр. $\Leftrightarrow r = n$

$$G = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}\right\} k & \\ & \left.\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}\right\} n-k \end{pmatrix}$$

$e_i = (0, \ldots 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$

$$\begin{cases} g(e_i, e_j) = 0 & i \neq j \\ \underline{g(e_i, e_i)} = \begin{cases} 1, & i \leq p \\ -1, & i > p \end{cases} \end{cases}$$

$$g(x, y) = x^1 y^1 + \ldots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \ldots - x^n y^n$$

$g(x, y) = -g(y, x) \qquad g(x, x) = -g(x, x) \Rightarrow 0.$

если g положит. опр., то $g(x,x) \geq 0$ $\forall x$, и если

$g(x,x)=0$, то $x=0$.

$i \leq p$, $j > p$

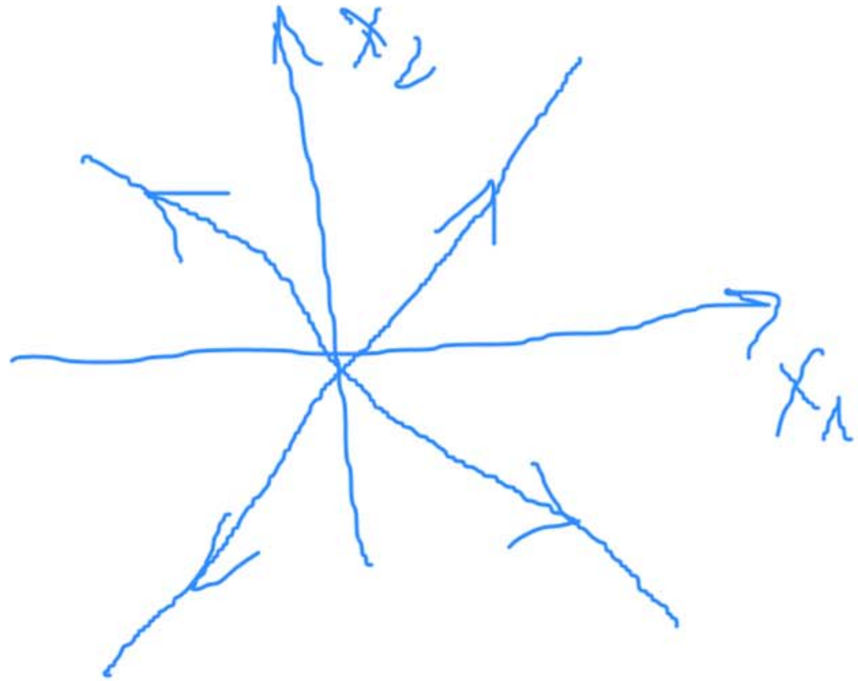
$$0 \neq x = (0, \dots \underset{i}{1}, \dots, \underset{j}{1}, \dots 0)$$

$$g(x,x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 = 1 - 1 = 0$$

$n=2$

$g(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$

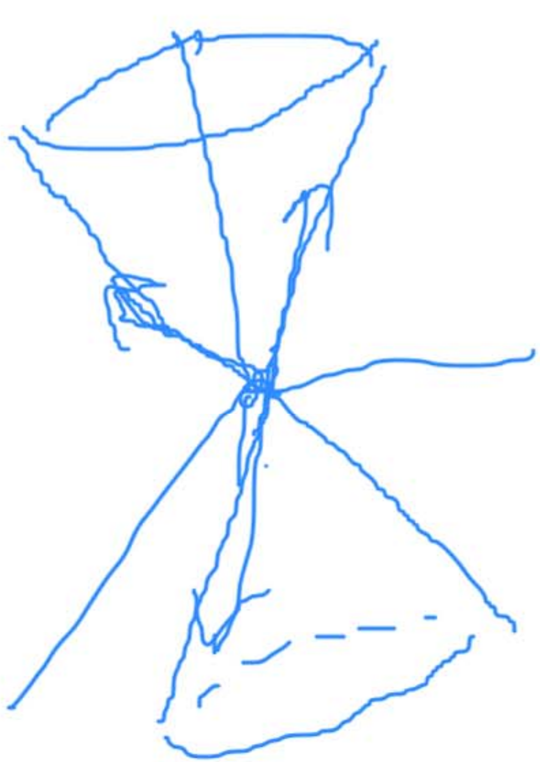
$0 = g(x,x) = x_1^2 - x_2^2$



$n=3$

$g(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$

изотр. $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$

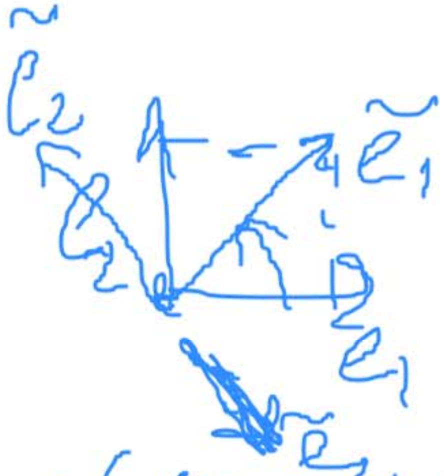


$e_1, \dots, e_n$ $\qquad$ $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$

$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 \\ 1 & \dots \\ -1 \end{cases}$ $\qquad$ $g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \begin{cases} 0 \\ 1 & \dots \\ -1 \end{cases}$

$g(e_i, e_j) = g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$ $\qquad$ $(\tilde{g}_{ij}) = \tilde{G}$

$\tilde{G} = G$ $\qquad$ $(g_{ij}) = G$

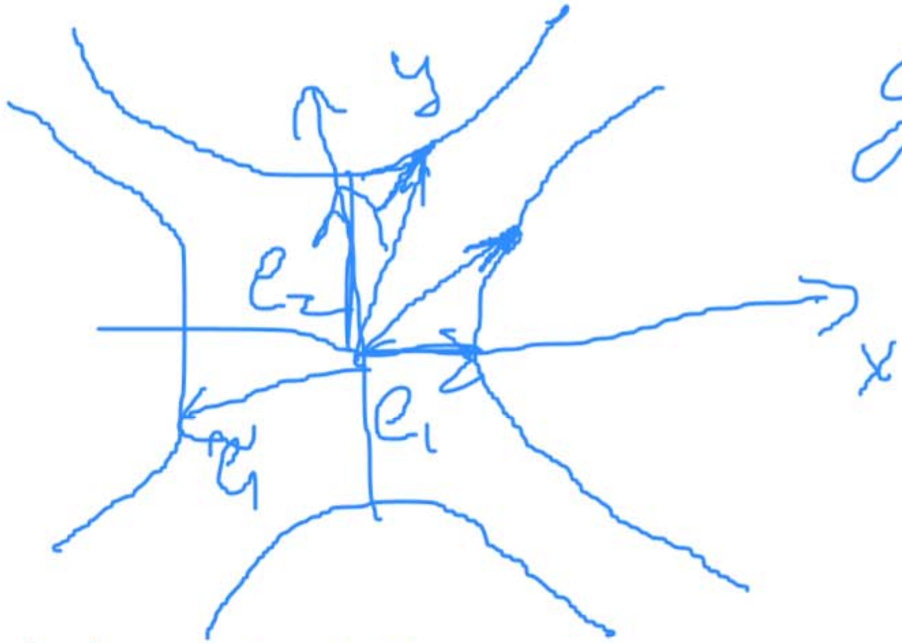


$$\tilde{e}_1 = \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2$$

$$\tilde{e}_2 = -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2$$

$$\sin\varphi\, e_1 - \cos\varphi\, e_2.$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \pm\sin\varphi \\ \sin\varphi & \mp\cos\varphi \end{pmatrix}$$



$$g(e_1, e_2) = 0$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x = \operatorname{ch} t$$

$$y = \operatorname{sh} t$$

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \pm \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \mp \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 2f(x) + a = 0$$

если $f(x)$ есть

$x_j,\ j > r$

$$2f(x) + a = 2x_{r+1}$$

если в $f(x)$ есть только

$x_i,\ i \leq r$

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 + a = 0$$