Линейные отображения

Определение 1. Пусть V, W — два векторных пространства над одним полем $\mathbb{K}$. Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если $\forall x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ выполняются равенства $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Пример: множество V' — это множество линейных отображений при $W = \mathbb{K}$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, а $e'_1, \ldots, e'_m$ — базис в W. Если $x = x^i e_i \in V$, то $f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i)$, т.е., для вычисления значения функции в любой точке, достаточно знать ее значения на базисных векторах, т.е. $f(e_i) = a_i^k e'_k$ (a_i^k — коэффициенты разложения вектора $f(e_i)$ по базису e'), тогда $f(x) = x^i a_i^k e'_k = y^k e'_k$ — разложение значения по базису $e'_1, \ldots, e'_k$. Координаты x^i вектора x в базисе пространства V и координаты y^k значения отображения $f(x)$ в базисе пространства W связаны следующим соотношением:

$y^k = x^i a_i^k$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

или, в матричной форме, $Y = AX$, где Y и X — столбцы координат векторов $f(x)$ и x соответственно, а матрица $A_f = A = (a_i^k)$ является матрицей, определяемой линейным отображением f (и определяющей его).

Мы видим, что задание базисов в V и W позволяет сопоставить каждому линейному отображению f его матрицу A_f, причем это сопоставление взаимо однозначно. Поэтому существует биективное отображение между множеством линейных отображений $L(V, W)$ из V в W и множеством матриц $M_{m,n}(\mathbb{K})$ с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ размера $m \times n$.

Лемма 2. $L(V, W) \cong M_{m,n}(\mathbb{K})$.

$f \longmapsto A_f$; $A \longmapsto f$

Доказательство. Достаточно проверить, что построенное выше биективное отображение $L(V, W) \to M_{m,n}(\mathbb{K})$ будет линейным. Но это следует из того, что все отображения из $L(V, W)$ линейны. $\square$

$f(e_i) = 0 \ \forall i$

Примеры:

1) Рассмотрим отображение $f(x) \equiv 0$, ему будет соответствовать нулевая матрица $A_f = 0$;

2) Если $W = V$, а отображение тождественно, $f = id : V \to V$, т.е. $f(x) = x \ \forall x \in V$, то ему соответствует единичная матрица $A_f = E$;

3) Отображению $f(x) = \lambda x$ соответствует матрица $A_f = \lambda E$.

Еще раз отметим, что соответствие $f \mapsto A_f$ зависит от выбора базисов в пространствах V и W.

$\tilde{A} = C^{-1}AC$

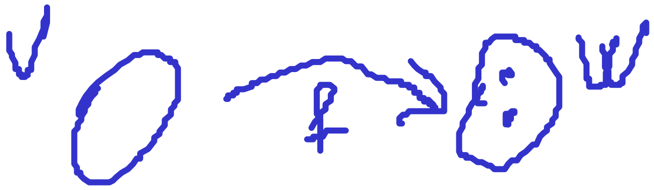
Изменим базисы в V (матрица перехода C_1) и в W (матрица перехода C_2), тогда, естественно, изменится и матрица данного линейного отображения. Если в первоначальных базисах координаты были связаны матричным соотношением $Y = A_f X$, то в новых базисах ($X = C_1 \widetilde{X}$, $Y = C_2 \widetilde{Y}$) имеем $C_2 \widetilde{Y} = A_f C_1 \widetilde{X}$, т.е. $\widetilde{Y} = C_2^{-1} A_f C_1 \widetilde{X} = \widetilde{A}_f \widetilde{X}$. Окончательно получаем формулу для матрицы оператора в новых базисах $\widetilde{A}_f = C_2^{-1} A_f C_1$.

$W = V$, $e'_i = e_i$

Определение 3. *Ядром* $\operatorname{Ker} f$ линейного отображения $f : V \to W$ называется множество всех векторов, переходящих в ноль, $\operatorname{Ker} f = \{x \in V : f(x) = 0\}$.

Образом $\operatorname{Im} f$ линейного ~~оператора~~ отобр. $f : V \to W$ называется множество векторов $y \in W$, для которых существует прообраз, $\operatorname{Im} f = \{y \in W : \exists x \in V, f(x) = y\}$.

Лемма 4. *Ядро любого линейного оператора является линейным подпространством в V; образ любого линейного оператора является линейным подпространством в W.*



$\operatorname{Ker} f \subset V$

$\operatorname{Im} f \subset W$.

Доказательство. Доказательство очевидно, надо просто проверить, что эти множества замкнуты относительно операций сложения и умножения на скаляры. Например, в случае ядра, если $x, y \in \operatorname{Ker} f$, $\lambda \in \mathbb{K}$, то $f(x) = f(y) = 0$, поэтому $f(x+y) = 0$, $f(\lambda x) = 0$ и $x + y, \lambda x \in \operatorname{Ker} f$. Проверка для образа оператора аналогична. □

Лемма 5. $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{}^{r} + \dim \operatorname{Im} f = \overbrace{\dim V}^{n}$.

$f(e_i) \in \operatorname{Im} f \ \forall i$

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_r$ — базис в $\operatorname{Ker} f$, дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n$ всего пространства V. Докажем, что $\dim \operatorname{Im} f = n - r$. Для этого рассмотрим набор векторов $f(e_{r+1}), \ldots, f(e_n)$ и докажем, что он является базисом в $\operatorname{Im} f$.

1) линейная независимость. Пусть $\lambda_{r+1} f(e_{r+1}) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = f(\lambda_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n) = 0$, следовательно $\lambda_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker} f$, но тогда $\lambda_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_r e_r$ для некоторых $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Т.к. векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то все $\lambda_i = 0$ (и μ_j тоже), следовательно векторы $f(e_{r+1}), \ldots, f(e_n)$ линейно независимы.

2) максимальность. Возьмем произвольный $y \in \operatorname{Im} f$, следовательно существует такой $x \in V$, что $f(x) = y$. Если $x = x^i e_i$ (суммирование по индексу i, пробегающему от 1 до n), то $y = f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i)$, что является линейной комбинацией векторов $f(e_{r+1}), \ldots, f(e_n)$, т.к. при $i = 1, \ldots, r$ $e_i \in \operatorname{Ker} f$ и $f(e_i) = 0$.

Следовательно $f(e_{r+1}), \ldots, f(e_n)$ — базис в $\operatorname{Im} f$, отсюда уже вытекает утверждение леммы. □

Если $W = V$, то мы получим отображение пространства в себя. Такие отображения называются *линейными операторами*. Матрица линейного оператора всегда квадратная, при этом в обоих экземплярах пространства V берется один и тот же базис. Тогда при переходе к другому базису матрица линейного оператора изменяется следующим образом: $\widetilde{A}_f = C^{-1} A_f C$, где C — матрица перехода, а A_f — матрица оператора в старом базисе.

Определение 6. Определим $\det f$ равенством $\det f = \det A_f$.

Чтобы определение было корректным, надо, чтобы эта величина не зависела от выбора базиса в пространстве, т.е. возьмем два разным базиса с матрицей перехода C, тогда

$$\det \widetilde{A}_f = \det(C^{-1} A_f C) = \det C^{-1} \det A_f \det C = \det A_f.$$

Определение 7. Определим след $\operatorname{tr} f$ линейного оператора равенством $\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A_f$ (сумма диагональных элементов матрицы A_f).

$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Аналогично проверяем, что определение корректно:

$$\operatorname{tr} \widetilde{A}_f = \operatorname{tr}(C^{-1} A_f C) = \operatorname{tr}(A_f C C^{-1}) = \operatorname{tr} A_f.$$

$\operatorname{tr}[C^{-1}(AC)] =$
$= \operatorname{tr}[AC \cdot C^{-1}]$

Определение 8. Определим ранг $\operatorname{rk} f$ линейного оператора равенством $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} A_f$.

$\operatorname{rk}(C^{-1}AC) = \operatorname{rk} A$

Он тоже, очевидно, не будет зависеть от выбора базиса.

Определение 9. *Композицией* двух линейных операторов $f, g : V \to V$ называются линейные операторы $f \circ g, g \circ f : V \to V$, где $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ и $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Можно легко показать, что в фиксированном базисе $A_{f \circ g} = A_f \cdot A_g$, также легко проверить, что для множества операторов выполнены все аксиомы кольца (если умножение — композиция), т.е. множество линейных операторов имеет структуру кольца с единицей, роль которой играет тождественный оператор.

Инвариантное подпространство

Определение 10. Пусть дан линейный оператор $f : W \to W$ и $V \subset W$ — подпространство в W. Оно называется *инвариантным* подпространством относительно f, если его образ лежит в нем самом, т.е. $f(V) \subset V$.

Примеры:
1) $V = \operatorname{Ker} f$ будет инвариантным подпространством, т.к. $\forall x \in V \quad f(x) = 0 \in V$,
2) $V = \operatorname{Im} f$ будет инвариантным подпространством, т.к. по определению $\operatorname{Im} f$ образ любого элемента ему принадлежит.

Рассмотрим подробнее матрицы операторов. Пусть V — инвариантное относительно f подпространство в W. Пусть $e_1, \ldots, e_r$ — базис в V, дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_n$ в W. Пусть A_f — матрица оператора в этом базисе, тогда она имеет следующий вид: $A_f = \left(\begin{array}{c|c} \star & \star \\ \hline 0 & \star \end{array}\right)$, т.е. ее можно разбить по ширине и высоте на две части, отвечающие векторам $e_1, \ldots, e_r$ и $e_{r+1}, \ldots, e_n$, причем в нижнем левом углу будут стоять одни EV нули. Действительно, т.к. V инвариантно, то $f(e_i) \in V$ при $1 \leqslant i \leqslant r$, следовательно, $f(e_i) = \alpha_i^1 e_1 + \ldots + \alpha_i^r e_r$. Коэффициенты в этом разложении по базису — это i-й столбец матрицы A_f, а здесь на $r+1, \ldots, n$-ых местах стоят нули.

Если $W = V_1 \oplus V_2$, где V_1, V_2 — инвариантные подпространства, то и правый верхний угол матрицы A_f будет нулевой, и эта матрица будет иметь следующий вид: $A_f = \left(\begin{array}{c|c} \star & 0 \\ \hline 0 & \star \end{array}\right)$.

Доказательство этого аналогично предыдущему.

Определение 11. Пусть V — инвариантное относительно f подпространство, тогда оператор $f_1 : V \to V$, определенный равенством $f_1(v) = f(v)$, $v \in V$, называется *ограничением* оператора f на подпространство V и часто обозначается $f|_V$.

Матрицей оператора $f|_V$ будет левый верхний угол матрицы оператора f, т.е. $A_f = \left(\begin{array}{c|c} A_{f_1} & \star \\ \hline 0 & \star \end{array}\right)$.

Невырожденные операторы. Собственные значения и собственные векторы

Определение 12. Линейный оператор $f : V \to V$ называется *невырожденным*, если выполнено одно из следующих условий:
1) $\det f \neq 0$;
2) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$;
3) $\operatorname{Im} f = V$;
4) $\operatorname{rk} f = \dim V$;
5) $\exists g : V \to V$, такой что $g \circ f = f \circ g = id$, т.е. существует обратный оператор.

Лемма 13. *Все эти пять свойств эквивалентны.*

Доказательство. 2) $\Longleftrightarrow$ 3), т.к. $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.
1) $\Longleftrightarrow$ 2): Пусть существует ненулевой вектор $x \in \operatorname{Ker} f$. Выберем такой базис в V, чтобы x был первым вектором базиса, тогда в матрице оператора A_f первый столбец будет нулевым, тогда $\det f = 0$. Обратно, если $\det f = 0$, то у системы уравнений $A_f X = 0$ существует ненулевое решение, т.е. под действием оператора f некоторый ненулевой вектор переходит в 0. Но тогда $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.
1) $\Longleftrightarrow$ 4) — это мы знаем из курса высшей алгебры.

1) $\Longleftrightarrow$ 5). Если $\det f \neq 0$ и A_f — матрица оператора f, то $\det A_f \neq 0$, следовательно существует обратная матрица A_f^{-1}, ей соответствует некоторый оператор g. Т.к. $A_f A_f^{-1} = A_f^{-1} A_f = E$, то $f \circ g = g \circ f = id$. Обратно, если существует обратный оператор, то его матрица будет обратной к матрице оператора f, следовательно $\det f = \det A_f \neq 0$.

Замечание. Обратный оператор (если он существует) единственен.

Оператор, для которого ни одно из этих свойств не выполняется называется *вырожденным.*

Собственные значения и собственные векторы

Определение 14. Пусть f — линейный оператор в линейном пространстве V. Если для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{K}$ и для некоторого ненулевого вектора $v \in V$ выполняется равенство $f(v) = \lambda v$, то λ называется *собственным значением* оператора f, а v — *собственным вектором* оператора f, отвечающим собственному значению λ.

Лемма 15. *λ является собственным значением оператора f тогда и только тогда, когда оператор $f - \lambda \cdot id$ вырожден.*

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Если $f(v) = \lambda v$, то $(f - \lambda \cdot id)(v) = 0$, значит, ядро оператора $(f - \lambda \cdot id)$ содержит ненулевой вектор v, откуда следует вырожденность этого оператора.

$\Longleftarrow$: Вырожденность $(f - \lambda \cdot id)$ означает наличие нетривиального ядра у этого оператора. Возьмем в качестве v любой ненулевой вектор из ядра $\operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot id)$, тогда $f(v) = \lambda v$. $\square$

Рассмотрим пространство $V(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot id)$ — подпространство, состоящее из всех собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению λ, и из нулевого вектора.

Лемма 16. *Пространство $V(\lambda)$ инвариантно относительно оператора f.*

Доказательство. Если $x \in V(\lambda)$, т.е. $(f - \lambda \cdot id)(x) = 0$, тогда $f(x) = \lambda x \in V(\lambda)$. $\square$

Лемма 17. *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле (т.е. любой многочлен $f \in \mathbb{K}_n[x]$, $\deg f > 0$, имеет корень), например, поле комплексных чисел. Тогда у любого оператора $f : W \to W$, где $\dim W > 1$, существует нетривиальное инвариантное подпространство (отличное от нуля и от всего пространства).*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\det(f - \lambda \cdot id) = 0$. В силу алгебраической замкнутости поля, это уравнение имеет корень λ_0, тогда λ_0 будет собственным значением f и тогда $\dim V(\lambda_0) > 0$ и $V(\lambda_0)$ инвариантно. Если $V(\lambda_0) \neq W$, то оно нетривиально. Если же случайно получилось, что $V(\lambda_0) = W$, то f имеет вид $f = \lambda_0 \cdot id$, т.е. является просто оператором умножения на число, и тогда любое подпространство будет инвариантным. $\square$

Проекторы

Если $W = V_1 \oplus V_2$, то для любого вектора w имеет место единственное разложение вида $w = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Рассмотрим линейный оператор $f : W \to W$, определенный формулой $f(w) = v_1$. Т.к. $v_1 = v_1 + 0$, то $f(V_1) \subset V_1$, т.е. V_1 инвариантно относительно f, более того на подпространстве имеем $f|_{V_1} = id_{V_1}$. Т.к. все вектора из V_2 переходят в 0, то $V_2 \in \operatorname{Ker} f$. На самом деле $V_2 = \operatorname{Ker} f$, т.к. если $f(w) = 0$, то в разложении $w = v_1 + v_2$ имеем $v_2 = 0$, т.е. $w \in V_2$.

Определение 18. Операторы указанного вида называются операторами проектирования или просто *проекторами* вдоль V_2 на V_1.

примеры.

изоморфизмы — линейные отобр. с дополнит. требов. биективности.

нулевое отобр.

$f: V \longrightarrow W \qquad \underline{0} \in W$

$f(x) = 0 \quad \forall x \in V.$

$f(x+y) = 0 = f(x) + f(y) \qquad f(\lambda x) = 0 = \lambda \cdot f(x)$

если $W=V$, f - тождеств. отобр.

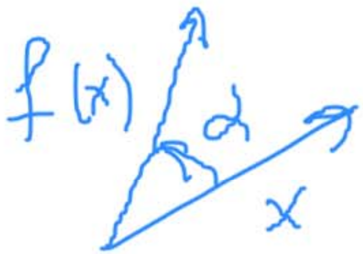
$$f(x)=x$$

$$f(x)=\alpha x \qquad \alpha\in K$$

$\alpha=0$ - нулевое отобр

$\alpha=1$ - тождеств.

поворот на плоск.



f – поворот на α.

e_i — базис в V

e_i' — базис в W

$f: V \to W$

$\Bigg\} \to A_f$ — матрица лин. отобр. f в данных базисах

$f(e_1) \in W$ — раскл. по базису e_i' $\to$ 1-й столбец A_f.

$f(e_2), \dots, f(e_n)$

$L(V, W)$ – лин. пр-во

$f_1, f_2 \in L(V, W)$

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

$f_1, f_2 : V \longrightarrow W$

$f_1(e_1) + f_2(e_1)$ – 1-й столбец $A_{f_1+f_2}$

– сумма 1-х столбцов A_{f_1} и A_{f_2}.

$f = id$ $\quad f(e_1) = e_1$

$\dots$

$f(e_n) = e_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

e_i и $\tilde{e}_i$ – базисы в V, матрица пер. C_1.

e'_i и $\tilde{e}'_i$ – базисы в W, матрица пер. C_2.

билин. ф-ции $\quad \widetilde{G} = C^t G C$

лин. отобр. $\quad \widetilde{A} = C_2^{-1} A C_1$

$y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\, f$ $\quad\quad \exists\, x_1, x_2 \in V$ т. что

$f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2.$

$f(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$, т.е. $\exists\; x_1 + x_2$: который f переводит в $y_1 + y_2$.

$\Rightarrow y_1 + y_2 \in \mathrm{Im}\, f.$

$f \circ g$ —

AB.

f опер.

g опер.

A матр.

B матр.

комп. — опер.

$g \circ f$

— матр. $B \cdot A$

$Y = AX$

$Z = BY$

коорд. $f(x)$

коорд. x

коорд. $g(y)$

коорд. y

$Z = (BA)X$

тожд. оператор

$id \circ f = f$

$f \circ id = f$

всё пр-во и $\{0\}$ инварианты

$id \longleftrightarrow E$.

поворот на плоскости на угол $\alpha \neq 0, \pi$

$f(v) \nparallel v$

нет одномерных инвар. подпр. в.

$f: W \to W$

W инвар.

$\{0\}$ инвар.

$f(0)=0$

$f(V) \subset V.$

если V не инвар. то $f_1: V \longrightarrow W$ – лин. отобр.;

но не оператор.

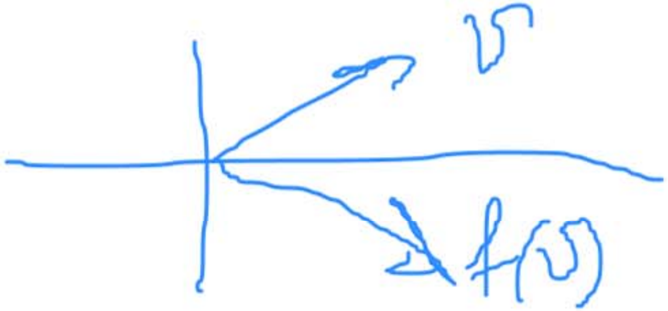
$f(V) \subset V$ – оператор $f_1: V \to V.$

если в каком-то базисе матрица оператора диагон., $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то

невырожд. $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_n \neq 0$.

примеры:
на плоск.

поворот на $\alpha \neq 0, \pi$.



$f(v) = \lambda v$

$v \neq 0$.

симметрия относит. прямой

$f(v) = -v$

$\lambda = -1$.

$f(v) = v$. $\lambda = 1$.