1) $\iff$ 5). Если $\det f \neq 0$ и A_f — матрица оператора f, то $\det A_f \neq 0$, следовательно существует обратная матрица A_f^{-1}, ей соответствует некоторый оператор g. Т.к. $A_f A_f^{-1} = A_f^{-1} A_f = E$, то $f \circ g = g \circ f = id$. Обратно, если существует обратный оператор, то его матрица будет обратной к матрице оператора f, следовательно $\det f = \det A_f \neq 0$.

Замечание. Обратный оператор (если он существует) единственен.

Оператор, для которого ни одно из этих свойств не выполняется называется *вырожденным*.

Собственные значения и собственные векторы

Определение 14. Пусть f — линейный оператор в линейном пространстве V. Если для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{K}$ и для некоторого ненулевого вектора $v \in V$ выполняется равенство $f(v) = \lambda v$, то λ называется *собственным значением* оператора f, а v — *собственным вектором* оператора f, отвечающим собственному значению λ.

Лемма 15. *λ является собственным значением оператора f тогда и только тогда, когда оператор $f - \lambda \cdot id$ вырожден.*

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Если $f(v) = \lambda v$, то $(f - \lambda \cdot id)(v) = 0$, значит, ядро оператора $(f - \lambda \cdot id)$ содержит ненулевой вектор v, откуда следует вырожденность этого оператора.
$\Longleftarrow$: Вырожденность $(f - \lambda \cdot id)$ означает наличие нетривиального ядра у этого оператора. Возьмем в качестве v любой ненулевой вектор из ядра $\mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot id)$, тогда $f(v) = \lambda v$. □

Рассмотрим пространство $V(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot id)$ — подпространство, состоящее из всех собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению λ, и из нулевого вектора. λ – с.зн. $\iff \dim V(\lambda) > 0$

Лемма 16. *Пространство $V(\lambda)$ инвариантно относительно оператора f.* $V(\lambda) \subset V$

Доказательство. Если $x \in V(\lambda)$, т.е. $(f - \lambda \cdot id)(x) = 0$, тогда $f(x) = \lambda x \in V(\lambda)$. □

$\lambda \cdot x \in V(\lambda)$

Лемма 17. *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле (т.е. любой многочлен $f \in \mathbb{K}_n[x]$, $\deg f > 0$, имеет корень), например, поле комплексных чисел. Тогда у любого оператора $f : W \to W$, где $\dim W > 1$, существует нетривиальное инвариантное подпространство (отличное от нуля и от всего пространства).*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\det(f - \lambda \cdot id) = 0$. В силу алгебраической замкнутости поля, это уравнение имеет корень λ_0, тогда λ_0 будет собственным значением f и тогда $\dim V(\lambda_0) > 0$ и $V(\lambda_0)$ инвариантно. Если $V(\lambda_0) \neq W$, то оно нетривиально. Если же случайно получилось, что $V(\lambda_0) = W$, то f имеет вид $f = \lambda_0 \cdot id$, т.е. является просто оператором умножения на число, и тогда любое подпространство будет инвариантным. □

$\Downarrow$

$f(x) = \lambda_0 x \quad \forall x \in W = V(\lambda_0)$

Проекторы

Если $W = V_1 \oplus V_2$, то для любого вектора w имеет место единственное разложение вида $w = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Рассмотрим линейный оператор $f : W \to W$, определенный формулой $f(w) = v_1$. Т.к. $v_1 = v_1 + 0$, то $f(V_1) \subset V_1$, т.е. V_1 инвариантно относительно f, более того на подпространстве имеем $f|_{V_1} = id_{V_1}$. Т.к. все вектора из V_2 переходят в 0, то $V_2 \subset \mathrm{Ker}\, f$. На самом деле $V_2 = \mathrm{Ker}\, f$, т.к. если $f(w) = 0$, то в разложении $w = v_1 + v_2$ имеем $v_1 = 0$, т.е. $w \in V_2$.

$f(v_1) = v_1$ $\quad$ $v_2 = 0 + v_2$

$f(v_2) = 0$

Определение 18. Операторы указанного вида называются операторами проектирования или просто *проекторами* вдоль V_2 на V_1.

Проекторы обладают замечательным свойством: если f — проектор, то $f^2 = f$. Докажем обратное утверждение.

Теорема 19. *Если $f^2 = f$, то оператор $f : W \to W$ является оператором проектирования для некоторых V_1 и V_2.*

Доказательство. Возьмем $V_1 = \operatorname{Im} f$ и $V_2 = \operatorname{Ker} f$ и докажем, что f — проектор вдоль V_2 на V_1.

Сначала докажем, что $W = V_1 \oplus V_2$, т.е., что $W = V_1 + V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Допустим, что существует ненулевой вектор $a \in V_1 \cap V_2$, тогда $a \in \operatorname{Ker} f$, т.е. $f(a) = 0$ и $a \in \operatorname{Im} f$, т.е. существует такой вектор $b \in W$, что $f(b) = a$. Тогда

$f^2(b) = f(f(b)) = f(a)$

$$a = f(b) = f^2(b) = f(a) = 0,$$

следовательно, $a = 0$. Мы получили, что V_1 и V_2 действительно образуют прямую сумму и $V_1 \oplus V_2 \subset W$. Но, т.к.

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W,$$

то $V_1 \oplus V_2 = W$.

Возьмем теперь произвольный вектор $w \in W$, тогда $w = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, следовательно, $f(w) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1) + 0 = f(v_1)$, т.к. $v_2 \in \operatorname{Ker} f$. Нам осталось доказать, что, если $v_1 \in \operatorname{Im} f$, то $f(v_1) = v_1$. Пусть $b \in W$ — прообраз v_1, т.е. $f(b) = v_1$, тогда $v_1 = f(b) = f^2(b) = f(v_1)$, следовательно оператор f действительно является оператором проектирования вдоль V_2 на V_1. $f(w) = f(v_1) = v_1$. □

Матрица оператора проектирования в базисе, составленном из базисов подпространств V_1 и V_2 имеет следующий вид: $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, где количество единиц равно размерности подпространства V_1.

Многочлены от операторов

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Тогда каждому многочлену $p(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ можно поставить в соответствие оператор по следующему правилу:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \mapsto a_0 id + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n.$$

Этот многочлен от оператора, также являющийся оператором, мы будем обозначать через $p(f)$.

Аналогично, можно определить многочлен от матрицы. Для матрицы A определим $p(A)$ формулой $p(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$, где E — единичная матрица. Поскольку при фиксированном базисе имеется взаимно однозначное соотвествие между операторами и матрицами, все утверждения о многочленах от операторов допускают переформулировку для многочленов от матриц.

Может так получиться, что $p(f)$ — нулевой оператор, тогда многочлен $p(t)$ называется *аннулирующим многочленом* для оператора f.

Пример: Если $f = id$, то $p(t) = t - 1$ будет аннулирующим многочленом, т.к. $p(f) = f - id = 0$.

Лемма 20. *У любого оператора f существует аннулирующий многочлен.*

n^2+1

Доказательство. Пусть $\dim V = n$, рассмотрим операторы $\underbrace{f^0 = id, f^1 = f, f^2, \ldots, f^{n^2}}_{n^2+1}$.
Размерность векторного пространства линейных операторов равна n^2, следовательно эти операторы (поскольку их количество больше размерности) линейно зависимы, тогда существуют такие числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}$, не все равные нулю, что $a_0 id + a_1 f + \ldots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$, но тогда получаем, что многочлен $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n^2} t^{n^2}$ аннулирует оператор f. □

Минимальный многочлен

Определение 21. Многочлен $p(t)$ называется *минимальным многочленом* для оператора f, если он аннулирует этот оператор, имеет наименьшую степень среди всех аннулирующих многочленов и его старший коэффициент равен 1.

Аналогично можно определить минимальный многочлен для матриц вместо операторов.

Лемма 22. *Для любого оператора f существует, и притом единственный, минимальный многочлен.*

Доказательство. 1) Существование. Мы уже показали, что для любого оператора существует аннулирующий многочлен. Поэтому мы можем выбрать из всех аннулирующих многочленов многочлены с наименьшей степенью и поделить их на старший коэффициент. То, что получится, по определению будет минимальным многочленом.
2) Единственность. Допустим, что $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — два минимальных многочлена для одногои того же оператора f, тогда $\deg p_1 = \deg p_2$ и их старшие коэффициенты равны 1, поэтому многочлен $p_1(t) - p_2(t)$ будет аннулирующим многочленом меньшей степени, что противоречит предположению. □

Лемма 23. *Число λ будет собственным значением оператора f тогда и только тогда, когда λ — корень минимального многочлена для f.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора f, тогда существует такой ненулевой вектор x, что $fx = \lambda x$. Пусть $p(t)$ — минимальный многочлен, т.е. $p(f) \equiv 0$, тогда $p(f)x = 0$, следовательно

$f^2 x = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x) =$

$$p(\lambda)x = a_0 x + a_1 \lambda x + \ldots + a_n \lambda^n x = a_0 x + a_1 f x + \ldots + a_n f^n x = p(f)x = 0,$$

$= \lambda^2 x$

$f^k(x) = \lambda^k x$

поэтому $p(\lambda) = 0$ (так как $x \neq 0$).
Обратно, пусть λ — корень минимального многочлена, тогда $p(t) = (t - \lambda)q(t)$, $\deg q < \deg p$, поэтому $q(t)$ не аннулирует f, следовательно, существует такой ненулевой вектор x, что $q(f)x = y \neq 0$. Тогда

$p(f) = (f - \lambda \cdot id) \cdot q(f)$

$$(f - \lambda \cdot id)y = (f - \lambda \cdot id)q(f)x = p(f)x = 0,$$

следовательно, y — это собственный вектор оператора f, а λ — его собственное значение. □

Характеристический многочлен

Определение 24. Многочлен $P_f(t) = \det(f - \lambda \cdot id)$ называется *характеристическим многочленом* оператора f.

Отметим, что характеристический многочлен можно определить и для в матриц (вместо операторов): $P_A(t) = \det(A - \lambda E)$, где A — матрица.
Отметим роль некоторых коэффициентов характеристического многочлена. Если его записать в виде $P_f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, то тогда $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} f$, $a_0 = \det f$.

Лемма 25. *λ является собственным значением оператора f тогда и только тогда, когда λ — корень характеристического многочлена $P_f(t)$.*

Доказательство. Если λ — собственное значение, то оператор $g = f - \lambda \cdot id$ вырожденный, следовательно $\det(f - \lambda \cdot id) = 0$, т.е. λ — корень $P_f(t)$. Обратно, если λ — корень $P_f(t)$, то $\det(f - \lambda \cdot id) = 0$, следовательно оператор $f - \lambda \cdot id$ вырожденный, значит, λ является собственным значением оператора f. $\square$

Если $V \subset W$ — инвариантное подпространство, тогда, как мы знаем, матрица оператора $f : W \to W$ имеет вид: $A_f = \begin{pmatrix} A_{f_1} & \star \\ \mathbf{0} & A_{f'} \end{pmatrix}$, где f_1 — ограничение f на V, ~~а f' — фактор-оператор~~. Тогда, т.к. $\det f = \det f_1 \det f'$, то $P_f(t) = P_{f_1}(t) P_{f'}(t)$.

$\det A_f = \det A_{f_1} \cdot \det A_{f'}$

Лемма 26. *Пусть $V(\lambda)$ — инвариантное подпространство, образованное собственными векторами, отвечающими собственному значению λ. Тогда кратность корня характеристического многочлена не меньше размерности подпространства $V(\lambda)$.*

Доказательство. Если f_1 — ограничение оператора f на $V(\lambda)$, то для любого $x \in V(\lambda)$ будем иметь, что $f_1 x = \lambda x$, поэтому матрица этого оператора имеет вид $A_{f_1} = \begin{pmatrix} \lambda & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda \end{pmatrix}$, а матрица оператора f — вид: $A_f = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \star \\ \mathbf{0} & & \lambda & \\ \hline & \mathbf{0} & & A_{f'} \end{array}\right)$. Следовательно $P_f(t) = P_{f_1}(t) P_{f'}(t) = (\lambda - t)^{\dim V(\lambda)} \cdot P_{f'}(t)$, поэтому кратность корня λ не меньше размерности подпространства $V(\lambda)$ (но может быть и больше, если λ является корнем многочлена $P_{f'}(t)$). $\square$

Теорема 27 (Гамильтона-Кэли). *Характеристический многочлен $P_f(t)$ оператора $f : W \to W$ аннулирует этот оператор, т.е. $P_f(f) = 0$.*

Доказательство. В силу взаимно однозначного соответствия между матрицами и операторами, мы докажем "матричный вариант" этой теоремы: $P_A(A) = 0$ для произвольной матрицы A.

Запишем обратную матрицу (для тех значений λ, для которых она определена) в виде $(A - \lambda E)^{-1} = \frac{1}{P_A(\lambda)} C(\lambda)$, где $C(\lambda)$ — матрица, составленная из миноров матрицы $A - \lambda E$. Отсюда

$$(A - \lambda E) C(\lambda) = P_A(\lambda) E \tag{1}$$

Это равенство очевидно выполняется для всех λ, кроме корней характеристического многочлена. А поскольку обе части этого матричного равенства состоят из многочленов, из их непрерывности следует выполнение этого равенства для всех значений λ. Разложим матрицу $C(\lambda)$, состоящую из многочленов, по степеням λ: $C(\lambda) = C_0 + C_1 \lambda + C_2 \lambda^2 + \ldots + C_{n-1} \lambda^{n-1}$, где $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ — числовые матрицы. В таком же виде запишем характеристический многочлен $P_A(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \ldots + a_n \lambda^n$ и распишем матричное равенство (1) по степеням λ, т.е. для каждой степени напишем равенство коэффициентов левой и правой части матричного равенства:

$$\begin{aligned} AC_0 &= a_0 E \\ AC_1 - C_0 &= a_1 E \\ AC_2 - C_1 &= a_2 E \\ \ldots \quad & \quad \ldots \\ AC_{n-1} - C_{n-2} &= a_{n-1} E \\ -C_{n-1} &= a_n E. \end{aligned}$$

поле $\mathbb{K}$ алг. замкн., если любой многочлен имеет корень в этом поле

$\mathbb{R}$ не алг. замкн. x^2+1 не имеет корней

$\mathbb{C}$ алг. замкн.

$$\det(f-\lambda\cdot \mathrm{id}) = \det(A_f - \lambda\cdot E)$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1^1-\lambda & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2-\lambda & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n-\lambda \end{pmatrix}$$ – многочлен степени n от λ

пример операторов — операторы проектирования

$a = \underbrace{a_1 + a_2}$, $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$.

$L_1 \cap L_2 = 0$.

такое разлож. единств.

a_1 — проекция a на L_1 параллельно L_2; a_2 — наоборот.

$V = L_1 \oplus L_2$ $\quad$ $\forall a \in V$ $\exists$ единств. представление в виде

$a = \underline{a_1} + \underline{a_2}$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$.

операторы проект. на L_1 паралл. L_2 и наоборот

$f_1(a) = a_1$

$f_2(a) = a_2$

$a = a' + a''$

$a' = a_1' + a_2'$

$a'' = a_1'' + a_2''$

$f_1(a) = a_1' + a_1'' = f_1(a') + f_1(a'')$

$v = v_1 + v_2 \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$

$f(v) = v_1 \qquad v_1 = \underset{\in V_1}{v_1} + \underset{\in V_2}{0}$

$f^2(v) = f(f(v)) = f(v_1) = v_1 = f(v)$

$\overset{\parallel}{(f \circ f)(v)}$

$f^2(v) = f(v) \quad \forall v \in V.$

$\boxed{f^2 = f}$

далеко не всегда Ker f и Im f образуют прямую сумму.
Это верно для операторов проекторов, и для некоторых других, но не для всех.

$V_1 \oplus V_2 = W$

$e_1, \dots, e_k$ — базис в V_1

$e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в V_2

$e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в W

$$f(e_i) = \begin{cases} e_i, & i \le k \\ 0, & i > k \end{cases}$$

В этом базисе матрица оператора проект. на V_1 вдоль V_2

$$\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{k} \qquad\qquad \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

f – проектор, $p(t) = t^2 - t$

$p(f) = f^2 - f = 0$

$t^2 - t$ аннулирует f.

$p(t)$ аннул. мн. для f $\quad f \circ p(f) = 0$

$t \cdot p(t)$ тоже аннул.

$p(t)$ аннул. $\qquad q(t)\cdot p(t)$ тоже аннул.

характ. мн. явл. аннулир.

$$P_f(t) = \det(f - t\cdot id) \stackrel{?}{=} a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

$A \qquad \det(A - tE) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_n A^n = 0$

$$0 = a_0\, id + a_1 f + \dots + a_n f^n$$

поле $\mathbb{K}$ алг. замкн., если любой многочлен имеет корень в этом поле

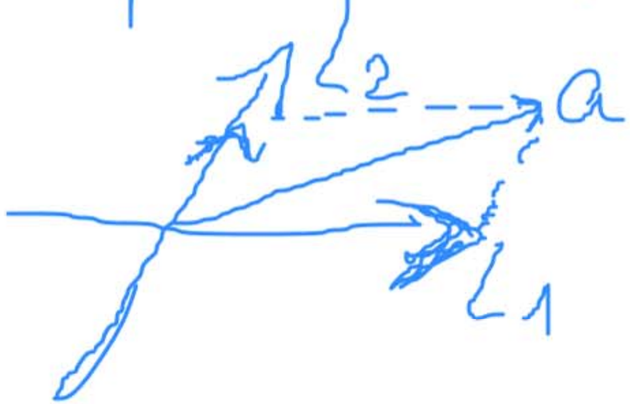
$\mathbb{R}$ не алг. замкн. $\quad x^2+1$ не имеет корней

$\mathbb{C}$ алг. замкн.

$$\det(f-\lambda\cdot\mathrm{id})=\det(A_f-\lambda\cdot E)$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1^1-\lambda & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2-\lambda & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n-\lambda \end{pmatrix}$$ — многочлен степени n от λ

пример операторов — операторы проектирования



$a = \underline{a_1 + a_2}$, $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$.

$L_1 \cap L_2 = 0$.

такое разлож. единств.

a_1 — проекция a на L_1 параллельно L_2 ; a_2 — наоборот.

$V = L_1 \oplus L_2$

$\forall a \in V$ $\exists$ единств. представление в виде

$a = \underline{a_1} + \underline{a_2}$, где $a_1 \in L_1$

$a_2 \in L_2$.

оператор проект. на L_1 паралл. L_2

$f_1(a) = a_1$

$f_2(a) = a_2$

и наоборот

$a = a' + a''$

$a' = a_1' + a_2'$

$a'' = a_1'' + a_2''$

$f_1(a) = a_1' + a_1'' =$

$= f_1(a') + f_1(a'')$

$v = v_1 + v_2 \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$

$f(v) = v_1 \qquad v_1 = \underset{\in V_1}{v_1} + \underset{\in V_2}{0}$

$f^2(v) = f(f(v)) = f(v_1) = v_1 = f(v)$

$\overset{\shortparallel}{(f \circ f)(v)}$

$f^2(v) = f(v) \quad \forall v \in V.$

$\boxed{f^2 = f}$

далеко не всегда Ker f и Im f
образуют прямую сумму.
Это верно для операторов проекторов,
и для некоторых других, но не
для всех.

$V_1 \oplus V_2 = W$

$e_1, \dots, e_k$ — базис в V_1

$e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в V_2

$e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в W

$$f(e_i) = \begin{cases} e_i, & i \le k \\ 0, & i > k \end{cases}$$

В этом базисе матрица оператора проект. на V_1 вдоль V_2

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1\ 0\ \cdots\ 0}}^{k} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

f – проектор, $\quad p(t) = t^2 - t$

$$p(f) = f^2 - f = 0$$

$t^2 - t$ аннулирует f.

$p(t)$ аннул. мн. для f $\quad f \cdot p(f) = 0$

$t \cdot p(t)$ тоже аннул.

$p(t)$ аннул. $q(t) \cdot p(t)$ тоже аннул.

характ. мн. явл. аннулир.

$$P_f(t) = \det(f - t \cdot id) \overset{?}{=} a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

A $\det(A - tE) = a_0 E + a_1 A + \ldots + a_n A^n = 0$

$$0 = a_0 \, id + a_1 f + \ldots + a_n f^n$$