Отметим, что характеристический многочлен можно определить и для в матриц (вместо операторов): $P_A(t) = \det(A - \lambda E)$, где A — матрица.

Отметим роль некоторых коэффициентов характеристического многочлена. Если его записать в виде $P_f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, то тогда $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} f$, $a_0 = \det f$.

Лемма 25. *λ является собственным значением оператора f тогда и только тогда, когда λ — корень характеристического многочлена $P_f(t)$.*

Доказательство. Если λ — собственное значение, то оператор $g = f - \lambda \cdot id$ вырожденный, следовательно $\det(f - \lambda \cdot id) = 0$, т.е. λ — корень $P_f(t)$. Обратно, если λ — корень $P_f(t)$, то $\det(f - \lambda \cdot id) = 0$, следовательно оператор $f - \lambda \cdot id$ вырожденный, значит, λ является собственным значением оператора f. □

Если $V \subset W$ — инвариантное подпространство, тогда, как мы знаем, матрица оператора $f : W \to W$ имеет вид: $A_f = \begin{pmatrix} A_{f_1} & \star \\ \mathbf{0} & A_{f'} \end{pmatrix}$, где f_1 — ограничение f на V. Тогда, т.к. $\det(A_f - \lambda E) = \det(A_{f_1} - \lambda E)\det(A_{f'} - \lambda E)$, то $P_f(t) = P_{f_1}(t) P_{f'}(t)$.

Лемма 26. *Пусть $V(\lambda)$ — инвариантное подпространство, образованное собственными векторами, отвечающими собственному значению λ. Тогда кратность корня характеристического многочлена не меньше размерности подпространства $V(\lambda)$.*

Доказательство. Если f_1 — ограничение оператора f на $V(\lambda)$, то для любого $x \in V(\lambda)$ будем иметь, что $f_1 x = \lambda x$, поэтому матрица этого оператора имеет вид $A_{f_1} = \begin{pmatrix} \lambda & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda \end{pmatrix}$, а матрица оператора f — вид: $A_f = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \star \\ \mathbf{0} & & \lambda & \\ \hline & \mathbf{0} & & A_{f'} \end{array}\right)$. Следовательно $P_f(t) = P_{f_1}(t) P_{f'}(t) = (\lambda - t)^{\dim V(\lambda)} \cdot P_{f'}(t)$, поэтому кратность корня λ не меньше размерности подпространства $V(\lambda)$ (но может быть и больше, если λ является корнем многочлена $P_{f'}(t)$). □

Теорема 27 (Гамильтона-Кэли). *Характеристический многочлен $P_f(t)$ оператора $f : W \to W$ аннулирует этот оператор, т.е. $P_f(f) = 0$.*

Доказательство. В силу взаимно однозначного соответствия между матрицами и операторами, мы докажем "матричный вариант" этой теоремы: $P_A(A) = 0$ для произвольной матрицы A.

Запишем обратную матрицу (для тех значений λ, для которых она определена) в виде $(A - \lambda E)^{-1} = \frac{1}{P_A(\lambda)} C(\lambda)$, где $C(\lambda)$ — матрица, составленная из миноров матрицы $A - \lambda E$. Отсюда

$$(A - \lambda E) C(\lambda) = P_A(\lambda) E. \tag{1}$$

Это равенство очевидно выполняется для всех λ, кроме корней характеристического многочлена. А поскольку обе части этого матричного равенства состоят из многочленов, из их непрерывности следует выполнение этого равенства для всех значений λ. Разложим матрицу $C(\lambda)$, состоящую из многочленов, по степеням λ: $C(\lambda) = C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \ldots + C_{n-1}\lambda^{n-1}$, где $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ — числовые матрицы. В таком же виде запишем характеристический многочлен $P_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n$ и распишем матричное равенство (1) по степеням λ, т.е. для каждой степени напишем равенство коэффициентов левой и

$$(A - \lambda E)C(\lambda) = (A - \lambda E)(C_0 + C_1\lambda + \ldots + C_{n-1}\lambda^{n-1}) =$$
$$= AC_0 + (AC_1 - C_0)\lambda + (AC_2 - C_1)\lambda^2 + \ldots$$
$$+ (AC_{n-1} - C_{n-2})\lambda^{n-1} - C_{n-1}\lambda^n =$$
$$= a_0 E + a_1 E \lambda + \ldots + a_n E \lambda^n$$

правой части матричного равенства:

$$\begin{array}{rcll} AC_0 & = & a_0E & \backslash E \\ AC_1 - C_0 & = & a_1E & \backslash A \\ AC_2 - C_1 & = & a_2E & \backslash A^2 \\ \dots & & \dots & \\ AC_{n-1} - C_{n-2} & = & a_{n-1}E & \backslash A^n \\ -C_{n-1} & = & a_nE. & \end{array}$$

Умножим первое равенство на E, второе — на A, третье — на A^2, и т.д., и сложим. Тогда в правой части получится $a_0E + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n = P_A(A)$, а в левой — все слагаемые взаимно уничтожатся. Т.е. получится, что $P_A(A) = 0$. $\square$

Диагонализируемые операторы

Определение 28. Оператор f называется *диагонализируемым*, если существует такой базис, что матрица этого оператора в этом базисе диагональна.

$\begin{pmatrix} 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Примеры:

1) операторы проектирования диагонализируемы,

2) нильпотентные операторы не диагонализируемы (если они не нулевые), так как любая диагональная нильпотентная матрица равна нулю.

Лемма 29. *Пусть характеристический многочлен $P_f(t)$ имеет $n = \dim W$ различных корней, тогда оператор f диагонализируемый.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни $P_f(t)$, т.е. собственные значения оператора f, а $a_1, \ldots, a_n$ — отвечающие им собственные векторы, т.е. $fa_i = \lambda_i a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Если бы мы знали, что $a_1, \ldots, a_n$ — базис, то матрица оператора в этом базисе имела бы вид:
$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $a_1, \ldots, a_n$ является базисом. Для этого нам достаточно доказать линейную независимость этих векторов (так как их количество совпадает с размерностью пространства). Применим индукцию по количеству линейно независимых векторов.

1) База индукции. Вектор a_1 отличен от нуля, поэтому система, состоящая из него одного линейно независима.

2) Индуктивный переход. Пусть первые $k-1$ векторов линейно независимы. Докажем, что тогда и первые k векторов тоже линейно независимы. Предположим обратное, т.е. что т.е. существуют скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, т.ч. $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$. Поскольку первые $k-1$ векторов по предположению линейно независимы, последний вектор есть линейная комбинация остальных, $a_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}a_1 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}a_{k-1}$. Применив оператор f к обеим частям этого равенства, получим, что $fa_k = f(-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}a_1 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}a_{k-1})$, т.е. $\lambda_k a_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\lambda_1 a_1 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\lambda_{k-1}a_{k-1}$, но, с другой стороны, $\lambda_k a_k = \lambda_k(-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}a_1 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}a_{k-1})$. Приравняв выражения в правых частях равенств, получим, что $(\lambda_k - \lambda_1)\frac{\alpha_1}{\alpha_k}a_1 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}a_{k-1} = 0$. Т.к. все λ_i различны, то из линейной независимости векторов $a_1, \ldots, a_{k-1}$ следует, что все коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ равны нулю. Но тогда $\alpha_k = 0$, откуда следует линейная независимость системы из k векторов. $\square$

$a_k = 0$

Лемма 30. *Над алгебраически замкнутым полем матрицу любого оператора можно привести к верхнетреугольному виду* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ *заменой базиса.*

Доказательство. Индукция по размерности пространства.

1) Если $\dim W = 1$, то утверждение очевидно, т.к. любая матрица размера 1 является верхнетреугольной.

2) Пусть утверждение верно для $\dim W < n$, докажем его для $\dim W = n$. Т.к. поле алгебраически замкнуто, характеристический многочлен имеет корень λ, он будет собственным значением. Ему соответствует собственный вектор, который порождает одномерное инвариантное подпространство V, тогда матрица оператора f имеет вид $A_f = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ \mathbf{0} & A_{f'} \end{pmatrix}$. По предположению индукции матрицу $A_{f'}$ можно привести к верхнетреугольному виду $A_{f'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$, тогда матрица $A_f = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & & \star & \\ \hline & \lambda_1 & & \star \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \lambda_{n-1} \end{array}\right)$ также будет верхнетреугольной. ☐

Лемма 31. *Если матрица оператора верхнетреугольная, то на главной диагонали стоят собственные значения этого оператора.*

Доказательство. Пусть $A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$, тогда $A_{f-t\cdot id} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & & \star \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n - t \end{pmatrix}$, и $\det(f - t\cdot id) = (\lambda_1 - t)\cdot \ldots \cdot(\lambda_n - t)$, т.е. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — это корни характеристического многочлена, а значит собственные значения. ☐

Лемма 32. *Пусть оператор f такой, что в алгебраически замкнутом поле характеристический многочлен $P_f(t)$ имеет единственный корень λ, тогда некоторая степень оператора $g = f - \lambda \cdot id$ равна нулю.*

Доказательство. Т.к. у оператора f только одно собственное значение λ, то в некотором базисе его матрица будет иметь вид $A_f = \begin{pmatrix} \lambda & & \star \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda \end{pmatrix}$. Матрица оператора g в этом базисе имеет вид $A_g = \begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$. Характеристический многочлен оператора g имеет вид $P_g(t) = (-1)^n t^n$, и, поскольку он является аннулирующим, то $P_g(g) = (-1)^n g^n = 0$, значит, $g^n = 0$. ☐

Гам.-Кэли

Жордановы клетки

Рассмотрим оператор f, заданный в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрицей

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

если $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$f(e_1) = 0,\ f(e_2) = e_1,\ f(e_3) = e_2, \ldots, f(e_n) = e_{n-1}$

f оператор $\qquad p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$

$$t \longmapsto f$$

$$p(f) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1 \cdot f + \ldots + a_n f^n$$

$A \qquad p(A) = a_0 E + a_1 \cdot A + \ldots + a_n A^n$

Характ. мн. явл. аннулирующим.

алг. замкн. поле $\qquad (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}$

степень для характ. мн. $\geqslant r_i$.

A — матрица

$$\begin{vmatrix} a^1_1 - t & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 - t & \dots & a^2_n \\ \dots & \dots & & \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_n - t \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + \underset{\det A}{\underset{\shortparallel}{a_0}}.$$

$$(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ & \ddots & \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{алг. дополн.}$$

$$(A-\lambda E)^{-1} = \frac{1}{\det(A-\lambda E)}\left(\text{алг. доп.}\right)$$

$\dfrac{C_{ij}(\lambda)}{}$ многочлен степени $\leq n-1$ по λ

$P_A(\lambda)$ – характ. мн.

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} C_{11}(\lambda) & \dots & C_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}(\lambda) & \dots & C_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \qquad C_{ij}(\lambda) = C_{ij0} + C_{ij1}\lambda + \dots + C_{ijn-1}\lambda^{n-1}$$

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} C_{110} & \dots & C_{1n0} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n10} & \dots & C_{nn0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{111} & \dots & C_{1n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n11} & \dots & C_{nn1} \end{pmatrix}\lambda + \dots$$

$$+ \dots + \begin{pmatrix} C_{11n-1} & \dots & C_{1nn-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1n-1} & & C_{nnn-1} \end{pmatrix}\lambda^{n-1} = C_0 + C_1\lambda + \dots + C_{n-1}\lambda^{n-1}$$

матрицы

$$a(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11,0} + a_{11,1}\lambda + \dots + a_{11,n}\lambda^n & \dots & a_{1n,0} + a_{1n,1}\lambda + \dots + a_{1n,n}\lambda^n \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$b(\lambda) = \begin{pmatrix} b_{11,0} + b_{11,1}\lambda + \dots + b_{11,n}\lambda^n & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$a(\lambda) - b(\lambda) = 0$ для всех λ кроме конечного числа.

f в каждом базисе — своя матрица

$$\widetilde{A}_f = C^{-1} A_f C.$$

$C^t A C$ — для квадр.

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{12} & \ldots & \ldots \\ \ldots & & \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

пусть $\exists$ базис, в котором его матрица диаг.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

α_1, α_2 - корни характ. многочл.

$$\det(\tilde{A} - \lambda E) = \det(C^{-1}(A - \lambda E)C) = \det(A - \lambda E)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = C^{-1} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{A}} C$$

$$g = f - \lambda \cdot id$$

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & \cdots & * \\ & 0 & * & * & \cdots & * \\ & & 0 & * & \cdots & * \\ & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & * \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_g^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ & & \ddots & \ddots & & * \\ & & & & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad A_g^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ & & & & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_g^{r} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots \ A_g^{n} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Опр. Оператор, у которого некоторая степень равна 0, наз. нильпотентным.

нулевой — нильп.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ — нильп.}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ жорд. клетка разм. 2 с собств. зн. 0,

$f(e_2) = e_1, \quad f(e_1) = 0.$ $\quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} f = \{x : f(x) = 0\} = \langle e_1 \rangle$

$\operatorname{Im} f = \langle e_1 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$f(e_n) = e_{n-1}, \ldots, f(e_2) = e_1, f(e_1) = 0.$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\ker f = \langle e_1 \rangle$

$\operatorname{Im} f = \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

k