

Такая матрица называется *жордановой клеткой* порядка n , с собственным значением λ . Действие такого оператора на базисных векторах устроено так: $f(e_1) = \lambda e_1$, $f(e_2) = \lambda e_2 + e_1$, $f(e_3) = \lambda e_3 + e_2, \dots, f(e_n) = \lambda e_n + e_{n-1}$.

Нормальной или жордановой формой называется блочно-диагональная матрица, все блоки которой являются жордановыми клетками.

Присоединенные векторы и корневое подпространство

Обозначим через $V_\lambda^{(1)}$ подпространство собственных векторов оператора f , отвечающих собственному значению λ (вместе с нулевым вектором). Иначе это можно записать как $V_\lambda^{(1)} = \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id})$.

Аналогично определим $V_\lambda^{(2)} = \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id})^2$, $V_\lambda^{(3)} = \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id})^3$ и т.д.

Получается цепочка вложенных друг в друга подпространств $\{0\} \subset V_\lambda^{(1)} \subset V_\lambda^{(2)} \subset \dots \subset V$.

Вектор v называется *присоединенным вектором* 1-го порядка оператора f , отвечающих собственному значению λ , если $v \in V_\lambda^{(2)}$, $v \notin V_\lambda^{(1)}$. Аналогично, присоединенным вектором порядка k , если $v \in V_\lambda^{(k+1)}$, $v \notin V_\lambda^{(k)}$.

Покажем, что рост подпространств $V_\lambda^{(k)}$ стабилизируется с ростом k .

Поскольку пространство, в котором действует наш оператор, конечномерно, то неубывающая числовая последовательность размерностей $\dim V_\lambda^{(1)} \leq \dim V_\lambda^{(2)} \leq \dim V_\lambda^{(3)} \leq \dots$ не может неограниченно возрастать, значит, найдется какой-то номер k , для которого соседние члены этой последовательности совпадут.

Утверждение 33. Если на каком-то шаге этой цепочки $V_\lambda^{(k-1)}$ и $V_\lambda^{(k)}$ совпали, то они будут совпадать и дальше, т.е. $V_\lambda^{(i)} = V_\lambda^{(i+1)}$ при $i > k$.

Доказательство. Обозначим $f - \lambda \cdot \text{id}$ через g . По условию мы имеем $g^k x = 0 \iff x \in \text{Ker } g^k \iff x \in \text{Ker } g^{k-1} \iff g^{k-1} x = 0$. Докажем, что $g^{k+1} x = 0 \iff g^k x = 0$, т.е. что $\text{Ker } g^{k+1} = \text{Ker } g^k$.

Если $g^k x = 0$, то, очевидно, $g^{k+1} x = g(g^k x) = 0$. Обратно, если $g^{k+1} x = 0$, то $g^k(gx) = 0 \iff g^{k-1}(gx) = 0$ (по условию), следовательно, $g^k x = 0$. Мы доказали, что $\text{Ker } g^{k+1} = \text{Ker } g^k$. Прделаав эту операцию нужное число раз, получим что $\text{Ker } g^{k+2} = \text{Ker } g^{k+1}$ и т.д. $\square$

Обозначим через p тот номер, с которого происходит стабилизация цепочки подпространств $V_\lambda^{(k)}$. Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_\lambda^{(k)} = V_\lambda^{(p)}$. Обозначим это пространство через V_λ и назовем его *корневым подпространством* оператора f , отвечающим собственному значению λ .

Утверждение 34. Подпространство $V_\lambda \subset W$ инвариантно относительно оператора f .

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $x \in V_\lambda$, т.е. $(f - \lambda \cdot \text{id})^p(x) = 0$, тогда $(f - \lambda \cdot \text{id})^p f(x) = f(f - \lambda \cdot \text{id})^p(x) = f(0) = 0$, значит, $f(x) \in V_\lambda$. $\square$

Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств

Лемма 35. Пусть $f : V \rightarrow V$, λ — его собственное значение. Тогда имеет место разложение V в прямую сумму, $V = V_\lambda \oplus W$, где W — инвариантное подпространство, причем ограничение оператора f на W обратимо.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda = 0$. Для этого достаточно перейти от оператора f к оператору $f - \lambda \cdot id$.

Положим $W = \text{Im } f^p$ и докажем, что $V = V_\lambda \oplus W = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p$. Инвариантность $\text{Im } f^p$ очевидна: если $y \in \text{Im } f^p$, то существует такой x , что $y = f^p(x)$; тогда $f(y) = f^{p+1}(x) \in \text{Im } f^{p+1}$. Но $\text{Im } f^{p+1} \subset \text{Im } f^p$, а размерности этих образов совпадают, т.к. совпадают размерности соответствующих ядер, поэтому $\text{Im } f^{p+1} = \text{Im } f^p$.

Покажем, что сумма V_0 и W — прямая. Для этого достаточно доказать, что их пересечение равно нулю. Так как сумма размерностей ядра и образа равна размерности всего пространства, из того, что пересечение — нулевое, будет следовать, что $\dim V = \dim V_0 + \dim W$, т.е. $V = V_0 \oplus W$.

Пусть $v \in V_0 \cap W$, $v \neq 0$. Т.к. $v \in V_0$, то $f^p(v) = 0$, а т.к. $v \in W$, то $v = f^p(w)$ для некоторого вектора $w \in V$. Тогда $f^p(w) = v \neq 0$, $f^{2p}(w) = f^p(v) = 0$. Из того, что $f^p(w) \neq 0$, следует, что $w \notin V_0$, а из того, что $f^{2p}(w) = 0$, следует, что $w \in V_0^{(2p)} = V_0$. Полученное противоречие доказывает, что $V_0 \cap W = \{0\}$.

Докажем теперь, что ограничение f на W невырождено. Если бы это было не так, что 0 был бы собственным значением оператора $f|_W$, т.е. существовал бы собственный вектор $v \in W$, $v \neq 0$, $f(v) = 0$. Но это бы означало, что $v \in V_0$. Но $V_0 \cap W = \{0\}$. Т.о., 0 не может быть собственным значением для $f|_W$. $\square$

корневое разл.

Теорема 36. Пусть дан оператор $f : V \rightarrow V$ (над алгебраически замкнутым полем). Тогда пространство V является прямой суммой всех корневых подпространств, т.е. $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — все собственные значения оператора f .

Доказательство. Применим нужное число раз предыдущую лемму. После первого применения получим $V = V_{\lambda_1} \oplus W$. Далее, из блочно-диагонального вида матрицы оператора f — она состоит из блоков, отвечающих ограничениям $f|_{V_{\lambda_1}}$ и $f|_W$ — следует, что собственные значения $f|_W$ — $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$. Продолжая этот процесс, мы исчерпаем все пространство. Действительно, если после k -кратного применения леммы мы получим $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \oplus W'$, то $W' = \{0\}$ — иначе оператор ограничения $f|_{W'}$ будет иметь еще одно собственное значение (поле алгебраически замкнуто), которого не было у f — противоречие. $\square$

Отметим, что ограничение оператора на корневое подпространство имеет единственное собственное значение.

Жорданова нормальная форма оператора

Теорема 37 (Жордана о приведении матрицы оператора к нормальной форме). Для любого оператора f существует базис, в котором его матрица A_f будет жордановой. Такая матрица единственна с точностью до перестановки блоков (ячеек).

Доказательство.

1) Существование. По теореме о корневом разложении, в подходящем базисе матрица оператора f имеет блочно-диагональный вид

$$A_f = \begin{pmatrix} A_{f|_{V_{\lambda_1}}} & & & \\ & A_{f|_{V_{\lambda_2}}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{f|_{V_{\lambda_k}}} \end{pmatrix},$$

поэтому достаточно доказать теорему для операторов с единственным собственным значением, каковыми являются ограничения оператора f на корневые подпространства.

$$\begin{array}{ccc}
 V_{\lambda}^{(k)} & \overset{?}{\subset} & V_{\lambda}^{(k+1)} \\
 \parallel & & \parallel \\
 \text{Ker } g^k & & \text{Ker } g^{k+1}
 \end{array}$$

$$4 - \lambda \cdot \text{id} = g$$

$$\begin{aligned}
 x \in V_{\lambda}^{(k)} &\Leftrightarrow x \in \text{Ker } g^k \Leftrightarrow g^k(x) = 0 \Rightarrow \\
 \underline{g^{k+1}(x)} &= g(g^k(x)) = g(0) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } g^{k+1}
 \end{aligned}$$

$$V_1 \subset V_2; \quad \dim V_1 = \dim V_2 \Rightarrow V_1 = V_2.$$

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad V_\lambda^{(k-1)} = V_\lambda^{(k)}.$$

$$V_\lambda^{(1)} \subset V_\lambda^{(2)} \subset \dots \subset V_\lambda^{(k)} \subset V_\lambda^{(k+1)} \subset \dots \subset V_\lambda^p = V_\lambda^{p+1} = V_\lambda^{p+2} = \dots = V_\lambda.$$

если v собств. то $v \in V_\lambda^{(1)}$, $v \notin V_\lambda^{(2)}$
 в обратной норме $1 \in V_\lambda^{(2)}$, $\notin V_\lambda^{(3)}$...

$p(t)$ f можно рассмотреть f как t
и считать оператор $p(f)$.

$$\underline{p(t)q(t) = q(t)p(t)}$$

$$p(f)q(f) = q(f)p(f)$$

$$p(f) = (f - \lambda \cdot \text{id})^p$$

$$q(f) = f.$$

$$\begin{aligned} f \cdot (f - \lambda \cdot \text{id})^p &= \\ &= (f - \lambda \cdot \text{id})^p f. \end{aligned}$$

Пример.

f задается матрицей

$$f(x) = Ax$$

$$V_{\lambda}^{(1)} = \langle e_1 \rangle$$

$$V_{\lambda}^{(2)}$$

$$(f - \lambda \cdot \text{id})^2(x) = 0$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda x_2 + x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} + x_n \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

matricea lui $g = f - \lambda \cdot \text{id}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$g^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$x_3 = x_4 = \dots = 0$$

$$V_\lambda^{(2)} = \text{Ker } g^2 = \langle e_1, e_2 \rangle.$$

$$V_\lambda^{(3)} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle,$$

$$V_\lambda^{(k)} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

Пример f diag. матрицы $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$V_{\lambda_1}^{(1)} = \langle e_1 \rangle, \quad V_{\lambda_1}^{(2)} = \langle e_1 \rangle = V_{\lambda_1}^{(3)} = \dots$$

$$g = f - \lambda_1 \cdot \text{id}$$

$$\text{Ker } g^k = \langle e_1 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

↑ ненулевые.

если f гевт. с различными с.з.к.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \langle e_1 \rangle$$

$$V_{\lambda_2} = \langle e_2 \rangle$$

— — —

$$V_{\lambda_n} = \langle e_n \rangle$$

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$V_{\lambda_2} = \langle e_3 \rangle \quad V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} \lambda & 1 & \\ \lambda & & \\ \hline & \mu & 1 \\ & & \mu \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda}^{(1)} = \langle e_1 \rangle \quad V_{\lambda}^{(2)} = \langle e_1, e_2 \rangle = V_{\lambda}$$

$$V_{\mu}^{(1)} = \langle e_3 \rangle, \quad V_{\mu}^{(2)} = \langle e_3, e_4 \rangle = V_{\mu}$$

$$V = V_{\lambda} \oplus V_{\mu}.$$

$$\underbrace{f - \lambda \cdot \text{id}}$$

$$\underbrace{g = f - \lambda \cdot \text{id} \quad 0.}$$

V_λ — корневое гл.з. f
 $\ker (f - \lambda \cdot \text{id})^p.$

$$V = V_\lambda \oplus \dots$$

$V_\lambda = W_\theta$
 $\underbrace{\quad} W_\theta$ — корневое
 гл.з. $g.$

$$V = W_\theta \oplus \dots$$

$$\underline{\text{Ker } f^{P+1} = \text{Ker } f^P}$$

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V.$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \text{Im } f^{P+1} = \dim \text{Im } f^P$$

$$\text{Im } f^{P+1} \subset \text{Im } f^P \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\text{Im } f^{P+1} = \text{Im } f^P.$$

$$V = V_{\lambda_1} \oplus W$$

$$A_f = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 0 & \end{array} \right) \text{ невопр. матр.}$$

$$K \leq n$$

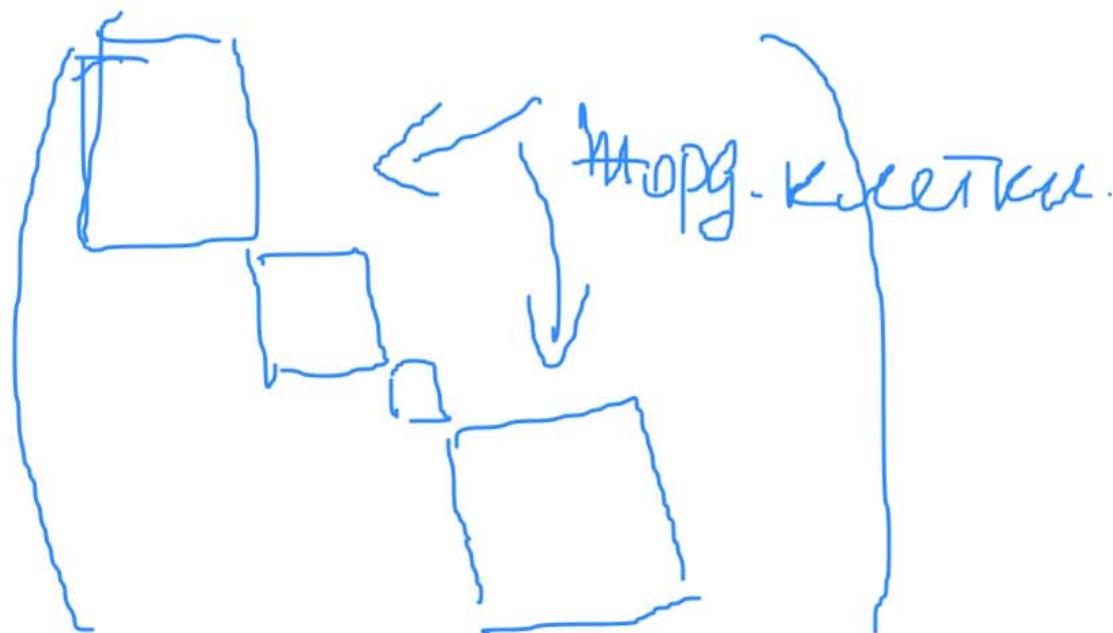
$$\left(\begin{array}{c|c} c \cdot 3^n \cdot \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c} \text{невопр.} \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{array} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\{\lambda\}$$

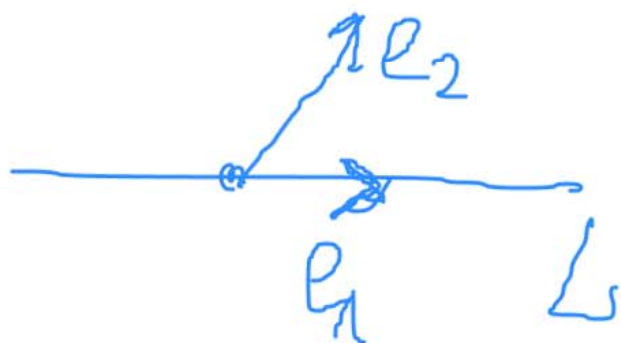
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \dots$$



$L \subset V$

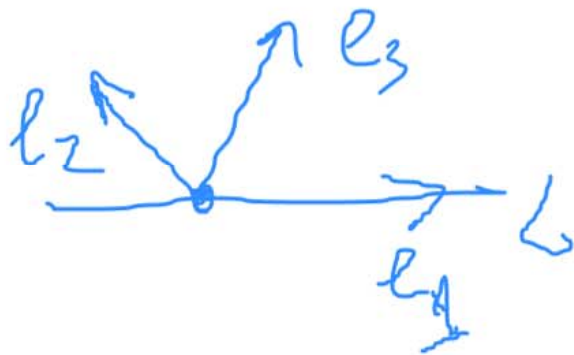
L — прямая, V — плоскость.



e_2 — ортонормированный
базис по плоскости.
(от нормали к L)

e_1, e_2 — базис V

L прямая, V — центр — O



Класс, если $l_3 - l_2 = l_1$
относит. базисом
не будет

Базис L генерируется из базиса V .

$$a_1, \dots, a_k \in V$$

линейно-независимые векторы в $L =$

если к $a_1, \dots, a_k$ добавив $\forall$ базис u в L , то получим линейно независимую

систему.

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r = 0$$

$u_1, \dots, u_r$ — базис L

$$\Downarrow$$

$$\text{все коэф.} = 0.$$

$$u_j \quad \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \in L \quad \text{целый, то}$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$