$x \in V_0^{(k)} \Leftrightarrow f(x) \in V_0^{(k-1)}$

Поэтому мы можем предположить без ограничения общности, что f имеет единственное собственное значение. Также без ограничения общности можно считать, что это собственное значение равно нулю.

Наша задача — построить базис в пространстве, в котором действует такой оператор, т.е. в корневом пространстве $V = V_0 = V_0^{(p)}$, которое является объединением подпространств $V_0^{(1)} \subset V_0^{(2)} \subset \ldots \subset V_0^{(p)}$.

Для подпространства $L \subset V$ система векторов $e_{r+1}, \ldots, e_n$ называется относительным базисом (относительно подпространства L), если, будучи дополненной базисом подпространства L, она становится базисом всего пространства V. В любом (конечномерном) пространстве можно выбрать относительный базис относительно любого подпространства.

На первом шаге рассмотрим подпространство $V_0^{(p-1)} \subset V_0^{(p)} = V$ и выберем относительный базис $e_1, \ldots, e_q$ относительно этого подпространства. Очевидно, он будет состоять из присоединенных векторов порядка $p-1$. Поскольку $f(V_0^{(p)}) = V_0^{(p-1)}$, $f(e_1), \ldots, f(e_q) \in V_0^{(p-1)}$. Покажем, что система векторов $f(e_1), \ldots, f(e_q)$ линейно независима относительно предыдущего подпространства $V_0^{(p-2)}$: если $\alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_q f(e_q) = f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q) \in V_0^{(p-2)}$, то $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_q e_q \in V_0^{(p-1)}$, и из определения векторов $e_1, \ldots, e_q$ следует, что все $\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 0$. Дополним систему векторов $f(e_1), \ldots, f(e_q)$ до относительного базиса в $V_0^{(p-1)}$ относительно подпространства $V_0^{(p-2)}$ векторами $g_1, \ldots, g_s$. Т.о. относительный базис $V_0^{(p-1)}$ относительно подпространства $V_0^{(p-2)}$ состоит из векторов $f(e_1), \ldots, f(e_q), g_1, \ldots, g_s$. К этому относительному базису применим оператор f и вновь полученную систему векторов опять дополним до относительного базиса $V_0^{(p-2)}$ относительно подпространства $V_0^{(p-3)}$. Этот процесс можно продолжить до конца, т.е. до подпространства $V_0^{(1)}$ и его нулевого подпространства.

Запишем полученные векторы в виде таблицы:

e_1	$\ldots$	e_q										
$f(e_1)$	$\ldots$	$f(e_q)$	g_1	$\ldots$	g_s							
$f^2(e_1)$	$\ldots$	$f^2(e_q)$	$f(g_1)$	$\ldots$	$f(g_s)$	h_1	$\ldots$	h_r				
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$f^{p-1}(e_1)$	$\ldots$	$f^{p-1}(e_q)$	$f^{p-2}(g_1)$	$\ldots$	$f^{p-2}(g_s)$	$f^{p-3}(h_1)$	$\ldots$	$f^{p-3}(h_r)$	$\ldots$	l_1	$\ldots$	l_t

собств. вект.

Векторы нижней строчки образуют базис подпространства $V_0^{(1)}$, векторы предпоследней строчки образуют относительный базис в $V_0^{(2)}$ относительно $V_0^{(1)}$, поэтому векторы двух последних строчек составляют базис подпространства $V_0^{(2)}$. Добавляя к ним векторы третьей с конца строчки, получаем базис подпространства $V_0^{(3)}$, и т.д. В итоге, все векторы таблицы составляют базис пространства V. Осталось проверить, что это — такой базис, в котором матрица оператора состоит из жордановых клеток.

Для этого рассмотрим вертикальные цепочки векторов таблицы. Обозначим $f^{p-1}(e_1) = \tilde{e}_1$, $f^{p-2}(e_1) = \tilde{e}_2$,... $e_1 = \tilde{e}_p$. Т.к. $\tilde{e}_1$ — собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению, то $f(\tilde{e}_1) = 0$. Далее, по определению, $f(\tilde{e}_2) = f^{p-1}(e_1) = \tilde{e}_1$, $f(\tilde{e}_3) = \tilde{e}_2$,.... Пусть $L_1 = \langle \tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_p \rangle$ — линейная оболочка векторов первого стольбца. Тогда L_1 переходит в себя, т.е. является инвариантным подпространством, при этом матрица оператора f, ограниченного на L_1, имеет вид жордановой клетки с нулевым собственным значением. Аналогично, векторы второго столбца образуют инвариантное подпространство L_2, и матрица ограничения f на L_2 также является жордановой клеткой, и т.д. Таким образом, матрица оператора f состоит из стольких жордановых клеток, сколько столбцов в таблице.

2) Единственность. Надо показать, что каким бы способом мы не привели бы матрицу оператора f к жордановой нормальной форме, количество жордановых клеток фиксированной размерности с собственным значением λ одно и то же. Для этого зафиксируем собственное значение λ и посчитаем количество клеток, ему отвечающих.

базис e_i^{I} — одна ж.ф., базис e_i^{II} — другая.

Введем числа $r_k(\lambda) = \mathrm{rk}(f - \lambda \cdot id)^k$ и $N_k(\lambda)$ — количество жордановых клеток размерности k, отвечающих собственному значению λ. Для блочно-диагональных матриц ранги можно считать по каждому блоку отдельно, и суммировать. Легко заметить, что при вычислении разности $r_{k+1}(\lambda) - r_k(\lambda)$ нужно учитывать только клетки, отвечающие собственному значению λ, поскольку ранги остальных клеток $J_m(\lambda_i - \lambda)$ не меняются при возведении таких клеток в любую степень (эти клетки невырождены).

Рассмотрим разность $r_0(\lambda) - r_1(\lambda)$. Для каждой отдельно взятой клетки с собственным значением λ такая разность равна 1, т.к. ранг клетки размера $k \times k$ равен $k-1$, т.е. на единицу меньше, чем размерность. Поэтому каждая клетка вносит в разность $r_0(\lambda) - r_1(\lambda)$ вклад, равный единице, т.е. эта разность равна общему количеству клеток, следовательно $r_0(\lambda) - r_1(\lambda) = N_1(\lambda) + N_2(\lambda) + N_3(\lambda) + \ldots$.

Рассмотрим разность $r_1(\lambda) - r_2(\lambda)$. Для клеток размера 1×1 такая разность равна нулю, а для клеток размера $n \times n$ при $n \geqslant 2$ ранг клетки равен $n-1$, а ранг ее квадрата равен $n-2$, и их разность равна единице. Поэтому разность $r_1(\lambda) - r_2(\lambda)$ равна количеству клеток размера $n \times n$ при $n \geqslant 2$, т.е. $r_1(\lambda) - r_2(\lambda) = N_2(\lambda) + N_3(\lambda) + \ldots$. Аналогично получаем, что $r_2(\lambda) - r_3(\lambda) = N_3(\lambda) + N_4(\lambda) + \ldots$ и т.д., $r_{i-1}(\lambda) - r_i(\lambda) = N_i(\lambda) + N_{i+1}(\lambda) + \ldots$. Вычитая из предыдущего равенства последующее, получаем $N_i(\lambda) = (r_{i-1}(\lambda) - r_i(\lambda)) - (r_i(\lambda) - r_{r+1}(\lambda)) = r_{i-1}(\lambda) - 2r_i(\lambda) + r_{r+1}(\lambda)$. Т.к. ранги от выбора базиса не зависят, то и числа $N_i(\lambda)$ от базиса не зависят, следовательно количество клеток каждого размера будет одно и то же, поэтому нормальная форма оператора единственна с точностью до перестановки клеток, из которых она состоит. $\square$

Функции от операторов и от матриц

Если функция $f(x)$ достаточно гладкая, т.е. имеет достаточно много производных, то для нее можно написать формулу Тейлора, которая будет иметь достаточно много членов, $f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(t-\lambda)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(t-\lambda)^m + r_m$ (в качестве последнего слагаемого можно взять, например, остаточный член в форме Лагранжа). Если матрица A — жорданова клетка, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{pmatrix}$, то $f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ \mathbf{0} & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$, т.е. значение функции $f(A)$ определяется только значением функции $f(t)$ и ее $n-1$ производной в точке $t = \lambda$, а все производные более высоких порядков (т.е. все последующие слагаемые формулы Тейлора) дают нулевой вклад. То есть, мы можем взять формулу Тейлора для этой функции, обрубить ее на $n-1$-й производной, и мы получим многочлен $p(t)$, причем $p(A) = f(A)$, а вычислять значение многочлена от матрицы мы умеем. Если матрица произвольна, то ее нужно привести к жордановой форме, $A' = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$, где $A_1, \ldots, A_m$ — жордановые клетки. Т.к. $f(A') = \begin{pmatrix} f(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(A_m) \end{pmatrix}$ и $f(A) = Cf(A')C^{-1}$, то формулу Тейлора нам достаточно обрубить на $k-1$-й производной, где k — максимальный размер жордановой клетки в жордановой форме матрицы A, тогда мы получим такой многочлен $p(t)$, что $p(A) = f(A)$. Этот многочлен называется интерполяционным.

Вопрос: Почему определение $f(A)$ не зависит от способа приведения к жордановой форме ? Проверьте, что если матрица A приведена к жордановому виду $J(A)$ с помощью двух различных матриц перехода, C и D, т.е. если $A = CJ(A)C^{-1} = DJ(A)D^{-1}$, то матрицы $D^{-1}C$ и $f(J(A))$ перестановочны для любой функции f, для которой определено $f(J(A))$.

Овеществление и комплексификация

Овеществление

Определение 38. Пусть V — векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Рассмотрим пространство $V_{\mathbb{R}}$, состоящее из тех же векторов, что и V, только вместо операции умножения на все комплексные числа мы ограничимся умножением только на вещественные числа. Тогда $V_{\mathbb{R}}$ будет линейным пространством над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, оно называется *овеществлением* пространства V.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в пространстве V, тогда он не будет базисом пространства $V_{\mathbb{R}}$, так как не все вектора являются их линейными комбинациями с вещественными числами, а на комплексные числа мы больше не можем умножать. Базисом в $V_{\mathbb{R}}$ будут вектора $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ (проверьте), следовательно $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$ (индекс у dim напоминает, над каким полем мы рассматриваем размерность пространства).

$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

Определение 39. Пусть дан оператор $f : V \to V$, тогда этот оператор, рассматриваемый на пространстве $V_{\mathbb{R}}$, называется *овеществлением оператора* f и обозначается $f_{\mathbb{R}}$.

$c_k^j = a_k^j + i b_k^j$

Посмотрим, как связаны матрицы операторов f и $f_{\mathbb{R}}$. Пусть в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства V $f(e_k) = c_k^j e_j$. Матрицу $A_f = (c_k^j)$ оператора f можно разложить на вещественную и чисто мнимую часть, т.к. ее элементы — это комплексные числа, т.е. $A_f = A + iB$, где $A = (\operatorname{Re} c_k^j)$, $B = (\operatorname{Im} c_k^j)$. Тогда матрица оператора $f_{\mathbb{R}}$ в базисе $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ будет иметь вид $A_{f_{\mathbb{R}}} = \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right)$. Посчитаем $\det A_{f_{\mathbb{R}}}$, для чего сделаем следующие элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы $A_{f_{\mathbb{R}}}$:

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A - iB & -B - iA \\ B & A \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} A - iB & -B - iA + i(A - iB) \\ B & A + iB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - iB & 0 \\ B & A + iB \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\det A_{f_{\mathbb{R}}} = \det(A - iB)\det(A + iB) = \overline{\det(A_f)} \cdot \det A_f = |\det A_f|^2.$$

Комплексная структура

Определение 40. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Комплексной структурой* на V называется такой линейный оператор $j : V \to V$, что $j^2 = -id$.

Тогда пространство V можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{C}$, так как на V можно ввести операцию умножения на комплексные числа: $(a + ib)v := av + bj(v)$. То, что это определение корректно (свойства v-viii определения векторного пространства), проверяется тривиально.

Лемма 41. *Пусть j — комплексная структура на вещественном векторном пространстве V. Тогда*

1) $\dim V$ *четна;*

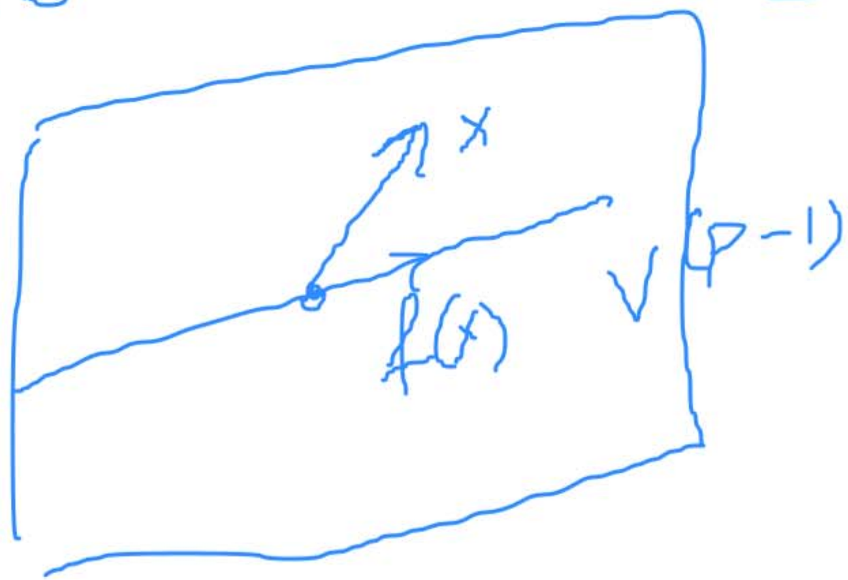
2) в подходящем базисе матрица оператора j имеет вид $A_j = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -E \\ \hline E & 0 \end{array}\right)$.

$$f\left(V^{(p)}\right) \subset V^{(p-1)}:$$

$$\underline{x \in V^{(p)} \Longleftrightarrow f^{p}(x) = 0}$$

$$f^{p}(x) = f^{p-1}\left(f(x)\right) = 0 \Longleftrightarrow \underline{f(x) \in V^{(p-1)}}$$

$V^{(p)}$



$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \boxed{A_3} & \\ 0 & & & \boxed{A_4} \end{pmatrix}$$

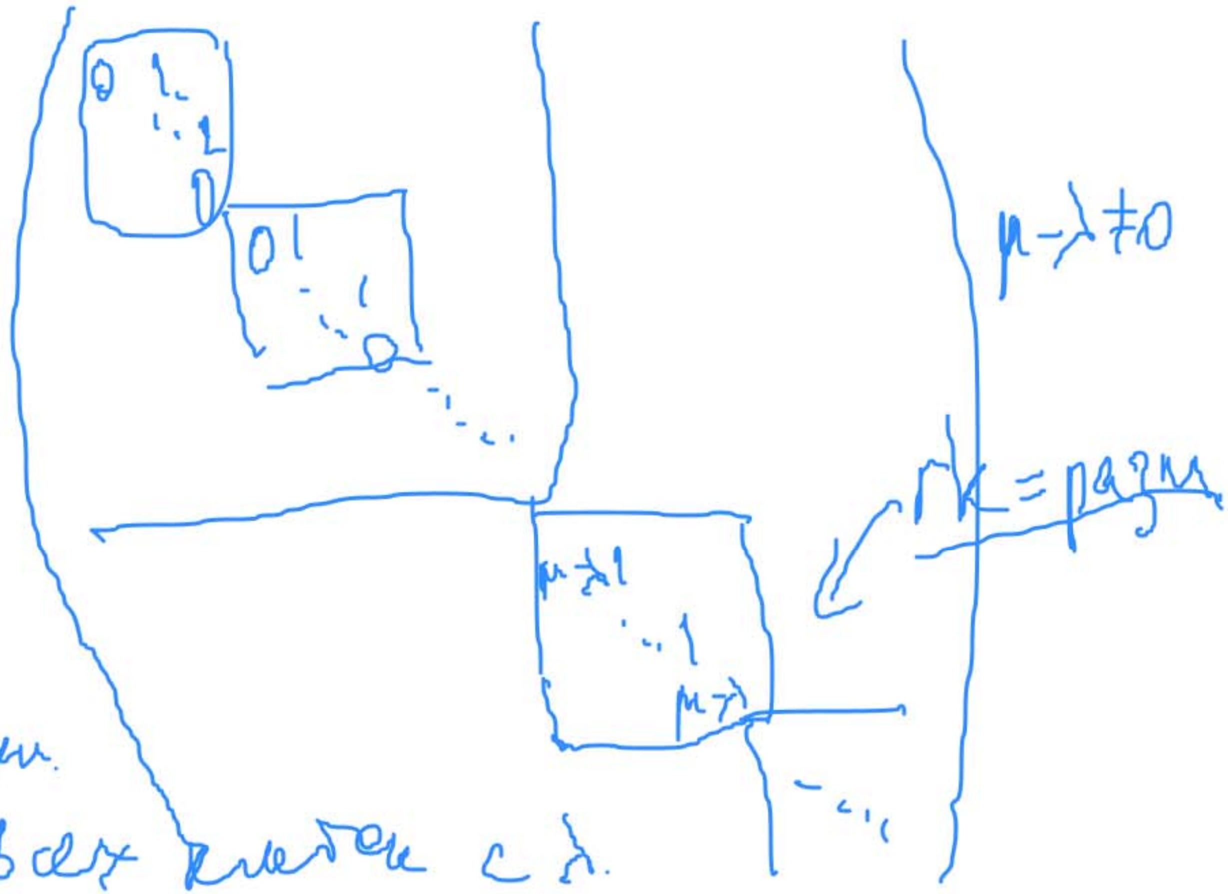
$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A_1 + \operatorname{rk} A_2 + \operatorname{rk} A_3 + \operatorname{rk} A_4.$$

$r_0(\lambda) - r_1(\lambda)$:

$\mathrm{rk}(f-\lambda\cdot id)^k$

$r_0(\lambda) = \mathrm{rk}(f-\lambda\cdot id)^0 =$

$= \mathrm{rk}\; id =$ разм. клетки.



$r_0(\lambda)$ — сумма разм. всех клеток с λ.

$r_1(\lambda)$ — сумма разм. − кол-во клеток

$r_0(\lambda) - r_1(\lambda) =$ кол-во клеток с λ

$= N_1(\lambda) + N_2(\lambda) + N_3(\lambda) + \dots$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r_1(\lambda) - r_2(\lambda) = N_2(\lambda) + N_3(\lambda) + \dots$

$$r_1 = rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad r_2 = rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

одномерная клетка

$\boxed{0}$

для "почти" каждой клетки

$r_1 - r_2 = 1.$

$r_2(\lambda)-r_3(\lambda)$ = кол-во "больших" клеток.

$= N_3(\lambda)+N_4(\lambda)+\ldots$

r_2 – ранг квадрата

r_3 – ранг куба

жн. клетки

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$r_2 - r_3$ для больших клеток $= 1$.

$\boxed{0}$ $\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$ – её квадрат и куб $= 0$.

$$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}$$

$$r_{i-1}(\lambda) - r_i(\lambda) = N_i(\lambda) + N_{i+1}(\lambda) + \ldots$$

$$r_i(\lambda) - r_{i+1}(\lambda) = N_{i+1}(\lambda) + N_{i+2}(\lambda) + \ldots$$

$$\boxed{N_i(\lambda) = r_{i-1}(\lambda) - 2r_i(\lambda) + r_{i+1}(\lambda)}$$

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (A-\lambda E)^m = 0 \text{ при } m \geq n$$

n – размер матрицы.

$$f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(t-\lambda)^2 + \ldots$$

n членов

$$t \to A \qquad t-\lambda \to A-\lambda E.$$

конечная сумма

$$f(\lambda)\cdot E + \frac{f'(\lambda)}{1!}\cdot \underset{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \ddots \end{pmatrix}}{(A-\lambda E)} + \frac{f''(\lambda)}{2!}\underset{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \end{pmatrix}}{(A-\lambda E)^2} + \ldots$$

V - компл.

$\forall x \in V$

$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$.

$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$,

$e_1, \dots, e_n$

$ie_1, \dots, ie_n$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$

не все x можно записать как лин. комб. с вещест. коэф.

над $\mathbb{C}$ они лин. зав.

над $\mathbb{R}$ нет.

$$x = (\alpha_1 + i\beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)e_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 \cdot (ie_1) + \dots + \beta_n \cdot (ie_n)$$

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \beta_1 \cdot (i e_1) + \ldots + \beta_n (i e_n) = 0$$

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$ с веществ. коэф.

$\lambda_k \in \mathbb{C}$

Коллоквиум. 13 апреля:

ауд. 12-24, 3-4 парах

121, 125, 126 – 3 пара

ост. 4 пара.

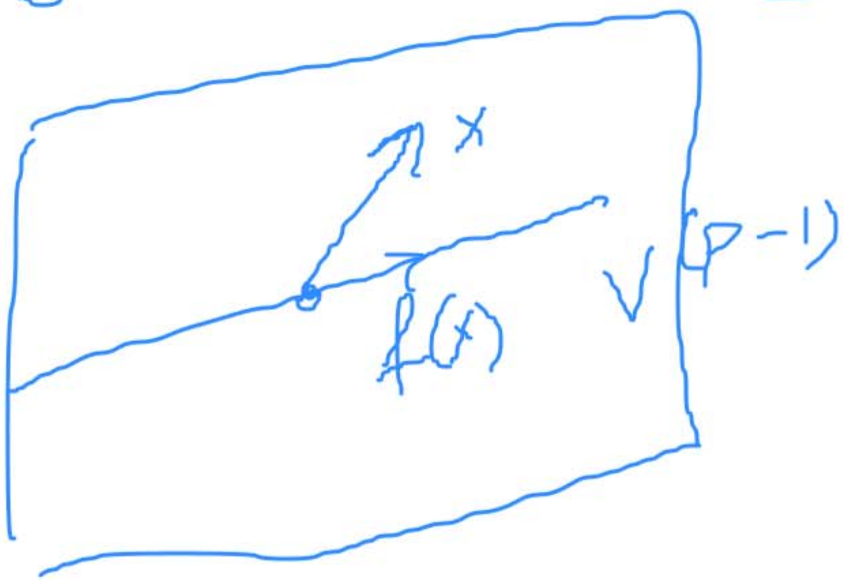
список вопросов на моей стр.
там же, где лекции.

$f\left(V^{(p)}\right) \subset V^{(p-1)}$:

$\underline{x \in V^{(p)} \iff f^{p}(x) = 0}$

$f^{p}(x) = f^{p-1}\left(f(x)\right) = 0 \iff \underline{f(x) \in V^{(p-1)}}$

$V^{(p)}$



$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \boxed{A_3} & \\ 0 & & & \boxed{A_4} \end{pmatrix}$$

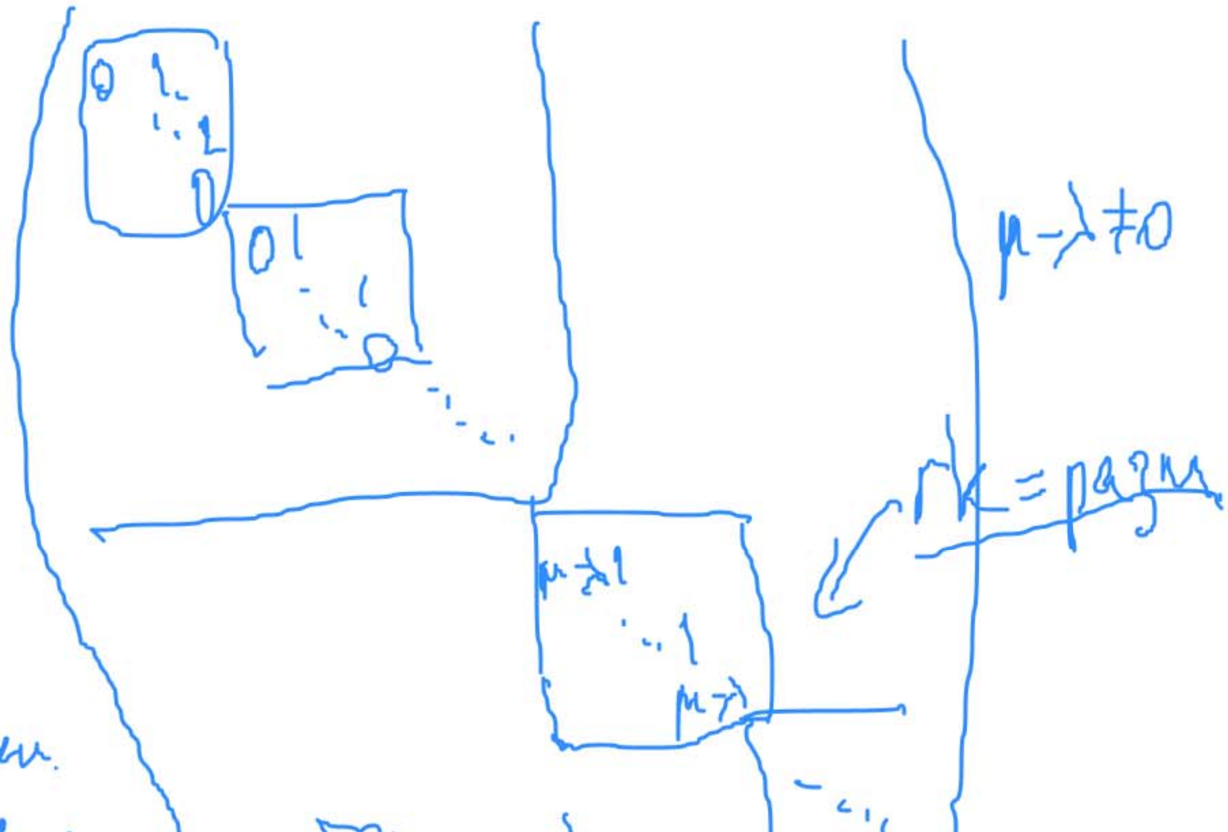
$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A_1 + \operatorname{rk} A_2 + \operatorname{rk} A_3 + \operatorname{rk} A_4 .$$

$r_0(\lambda) - r_1(\lambda)$:

$\mathrm{rk}(f-\lambda\cdot id)^k$

$r_0(\lambda) = \mathrm{rk}(f-\lambda\cdot id)^0 =$

$= \mathrm{rk}\; id =$ разм. клетки.



$r_0(\lambda)$ – сумма разм. всех клеток с λ.

$r_1(\lambda)$ – сумма разм. – кол-во клеток

$r_0(\lambda) - r_1(\lambda) =$ кол-во клеток с λ

$$= N_1(\lambda) + N_2(\lambda) + N_3(\lambda) + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1(\lambda) - r_2(\lambda) = N_2(\lambda) + N_3(\lambda) + \ldots$$

$$r_1 = rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad r_2 = rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

одномерная клетка

$\boxed{a}$

для "почти" каждой клетки

$$r_1 - r_2 = 1.$$

$r_2(\lambda) - r_3(\lambda)$ = кол-во "больших" клеток.

$= N_3(\lambda) + N_4(\lambda) + \ldots$

r_2 – ранг квадрата

r_3 – ранг куба

нт. клетки

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & & \ddots & 0 & \\ & & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

$r_2 - r_3$ для больших клеток $= 1$.

$\boxed{0}$ $\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$ – её квадрат и куб $= 0$.

$$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}$$

$$r_{i-1}(\lambda) - r_i(\lambda) = N_i(\lambda) + N_{i+1}(\lambda) + \dots$$

$$r_i(\lambda) - r_{i+1}(\lambda) = N_{i+1}(\lambda) + N_{i+2}(\lambda) + \dots$$

$$\boxed{N_i(\lambda) = r_{i-1}(\lambda) - 2r_i(\lambda) + r_{i+1}(\lambda)}$$

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-\lambda E)^m = 0$ при $m \geq n$

n – размер матрицы.

$$f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(t-\lambda)^2 + \ldots \underbrace{}_{}$$

n шагов.

$t \longrightarrow A \qquad t-\lambda \longrightarrow A-\lambda E.$

конечная сумма

$$f(\lambda)\cdot E + \frac{f'(\lambda)}{1!}\cdot \underset{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix}}{(A-\lambda E)} + \frac{f''(\lambda)}{2!}\underset{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}{(A-\lambda E)^2} + \ldots$$

V - компл.

$e_1, \dots, e_n$

$ie_1, \dots, ie_n$

над $\mathbb{C}$ лин. нез.

над $\mathbb{R}$ нет.

$\forall x \in V$

$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$.

$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$,

$\lambda_i \in \mathbb{C}$

не все x можно записать как лин. комб. с вещест. коэф.

$$x = (\alpha_1 + i\beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)e_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 \cdot (ie_1) + \dots + \beta_n \cdot (ie_n)$$

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \beta_1 \cdot (i e_1) + \ldots + \beta_n (i e_n) = 0$$

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$ с веществ. коэф.

$\lambda_k \in \mathbb{C}$