двух различных матриц перехода, C и D, т.е. если $A = CJ(A)C^{-1} = DJ(A)D^{-1}$, то матрицы $D^{-1}C$ и $f(J(A))$ перестановочны для любой функции f, для которой определено $f(J(A))$.

Овеществление и комплексификация

Овеществление

Определение 38. Пусть V — векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Рассмотрим пространство $V_{\mathbb{R}}$, состоящее из тех же векторов, что и V, только вместо операции умножения на все комплексные числа мы ограничимся умножением только на вещественные числа. Тогда $V_{\mathbb{R}}$ будет линейным пространством над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, оно называется *овеществлением* пространства V.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в пространстве V, тогда он не будет базисом пространства $V_{\mathbb{R}}$, так как не все вектора являются их линейными комбинациями с вещественными числами, а на комплексные числа мы больше не можем умножать. Базисом в $V_{\mathbb{R}}$ будут вектора $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ (проверьте), следовательно $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$ (индекс у dim непоминает, над каким полем мы рассматриваем размерность пространства).

Определение 39. Пусть дан оператор $f : V \to V$, тогда этот оператор, рассматриваемый на пространстве $V_{\mathbb{R}}$, называется *овеществлением оператора* f и обозначается $f_{\mathbb{R}}$.

Посмотрим, как связаны матрицы операторов f и $f_{\mathbb{R}}$. Пусть в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства V $f(e_k) = c_k^j e_j$. Матрицу $A_f = (c_k^j)$ оператора f можно разложить на вещественную и чисто мнимую часть, т.к. ее элементы — это комплексные числа, т.е. $A_f = A + iB$, где $A = (\operatorname{Re} c_k^j)$, $B = (\operatorname{Im} c_k^j)$. Тогда матрица оператора $f_{\mathbb{R}}$ в базисе $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ будет иметь вид $A_{f_{\mathbb{R}}} = \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right)$. Посчитаем $\det A_{f_{\mathbb{R}}}$, для чего сделаем следующие элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы $A_{f_{\mathbb{R}}}$:

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A - iB & -B - iA \\ B & A \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} A - iB & -B - iA + i(A - iB) \\ B & A + iB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - iB & 0 \\ B & A + iB \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\det A_{f_{\mathbb{R}}} = \det(A - iB)\det(A + iB) = \overline{\det(A_f)} \cdot \det A_f = |\det A_f|^2. \geqslant 0.$$

Комплексная структура

Определение 40. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Комплексной структурой* на V называется такой линейный оператор $j : V \to V$, что $j^2 = -id$.

Тогда пространство V можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{C}$, так как на V можно ввести операцию умножения на комплексные числа: $(a + ib)v := av + bj(v)$. То, что это определение корректно (свойства v-viii определения векторного пространства), проверяется тривиально.

Лемма 41. *Пусть j — комплексная структура на вещественном векторном пространстве V. Тогда*
1) $\dim V$ четна;
2) в подходящем базисе матрица оператора j имеет вид $A_j = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -E \\ \hline E & 0 \end{array}\right)$.

Доказательство.

1. Обозначим через $\widetilde{V}$ пространство V, рассматриваемое как комплексное (с помощью комплексной структуры j). Размерность пространства $\widetilde{V}$ конечна, т.к. по базису пространства V можно разложить любой вектор (возможно неоднозначно). Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $\widetilde{V}$, тогда $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = j(e_1), \ldots, e_{2n} = j(e_n)$ будет базисом в V, следовательно, $\dim V = 2n$.

2. Т.к. $j(e_i) = e_{n+i}$ и $j(e_{n+i}) = -e_i$ для $i = 1, \ldots, n$, то в этом базисе матрица оператора имеет указанный вид. $\square$

$e_{n+i} = j(e_i)$ $\quad j(e_{n+i}) = j^2(e_i) = -e_i$

Комплексификация

Определение 42. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим пространство $V_{\mathbb{C}} = V \oplus V = \{(a, b) : a, b \in V\}$ и определим комплексную структуру следующим образом: $j(a, b) := (-b, a)$ (нетрудно убедиться, что $j^2 = -id$). Пространство с такой комплексной структурой называется *комплексификацией* пространства V.

$j^2(a, b) = (-a, -b)$

Покажем, что $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве V, то $(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0)$ будет базисом в пространстве $V_{\mathbb{C}}$. Действительно, поскольку $j(e_i, 0) = (0, e_i)$, то умножением на мнимую единицу мы можем получить вектора $(0, e_1), \ldots, (0, e_n)$ и, следовательно, любой вектор (a, b), где $a, b \in V$.

Определение 43. Если дан оператор $f : V \to V$, то оператор $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, заданный формулой $f_{\mathbb{C}}(a, b) := (fa, fb)$, называется *комплексификацией* оператора f.

Легко убедиться, что так определенный $f_{\mathbb{C}}$ действительно будет линейным оператором. Если A_f — матрица оператора f в базисе $e_1, \ldots, e_n$, то эта же матрица будет матрицей оператора $f_{\mathbb{C}}$ в базисе $(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0)$.

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $a + ib$ для пары (a, b) по аналгоии с комплексными числами.

Инвариантные подпространства в вещественном случае

В случае алгебраически замкнутого поля каждый оператор имеет собственные значения, и, следовательно, одномерные инвариантные подпространства. В вещественном случае это, вообще говоря, неверно, но имеется более слабое утверждение о существовании по крайней мере двумерных инвариантных подпространств.

Лемма 44. *Если $f : V \to V$ — оператор в вещественном векторном пространстве и $\dim V \geqslant 1$, то в пространстве V существует либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Если $\dim V = 1$, то утверждение леммы очевидно. Если $\dim V > 1$, то пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ — собственное значение оператора $f_{\mathbb{C}}$. Тогда в $V_{\mathbb{C}}$ есть собственный вектор $a + ib$, $a, b \in V$, отвечающий собственному значению λ. Тогда

$$\underset{(a,b)}{\overset{\parallel}{}} \qquad f_{\mathbb{C}}(a + ib) = (\alpha + i\beta)(a + ib) = \alpha a - \beta b + i(\alpha b + \beta a),$$

но с другой стороны $f_{\mathbb{C}}(a+ib) = f(a)+if(b)$, следовательно, $f(a) = \alpha a - \beta b$ и $f(b) = \alpha b + \beta a$. Т.к. α и β — это вещественные числа, то $f(a), f(b) \in \langle a, b \rangle$, значит, $\langle a, b \rangle$ — инвариантное подпространство. Очевидно, что оно либо одномерное, либо двумерное (на самом деле оно всегда будет получаться двумерным, если $\beta \neq 0$). $\square$

Операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах

$(a, x) = 0 \quad \forall a$
$\Rightarrow x = 0$

Сопряженный оператор

Изучим теперь линейные операторы, действующие в евклидовых и эрмитовых пространствах, т.е. в пространствах со скалярным произведением.

Определение 1. Если для оператора $f : V \to V$ существует такой оператор g, что для любых векторов $a, b \in V$ выполняется равенство $(f(a), b) = (a, g(b))$, то g называется *сопряженным оператором* для f.

Докажем единственность сопряженного оператора. Допустим, что g_1 и g_2 — два сопряженных оператора для f. Тогда $(f(a), b) = (a, g_1(b)) = (a, g_2(b))$, т.е. $(a, g_1(b) - g_2(b)) = 0$ для любого вектора a, следовательно при любом b имеем $g_1(b) - g_2(b) = 0$, следовательно, $g_1 = g_2$.

Сопряженный оператор обозначается $g = f^*$.

Лемма 2. *Если операторы f_1 и f_2 имеют сопряженные f_1^* и f_2^* соответственно, то операторы $h = f_1 + f_2$ и $g = f_1 f_2$ также имеют сопряженные h^* и g^*, причем $h^* = f_1^* + f_2^*$ в $g^* = f_2^* f_1^*$.*

Доказательство. приведем доказательство для второго утверждения (для композиции операторов), т.к. для первого оно очевидно. $(f_1 f_2(a), b) = (f_2(a), f_1^*(b)) = (a, f_2^* f_1^*(b))$. □

Лемма 3. *Если в ортонормированном базисе матрица оператора f равна A и существует сопряженный оператор f^*, то матрица этого оператора в том же базисе равна A^t (если пространство евклидово) или $\overline{A}^t$ (если пространство эрмитово).*

Доказательство. Пусть матрица оператора f в ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_n$ есть $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$, а матрица оператора f^* (в том же базисе) есть $B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$. Тогда $a_i^j = (e_j, a_i^k e_k) = (e_j, f(e_i)) = (f^*(e_j), e_i) = (b_j^l e_l, e_i) = \overline{b}_j^i$, откуда получаем $A = \overline{B}^t$, или $B = \overline{A}^t$. □

$, 0$ при $k \neq j$

$f(e_i) = a_i^k e_k$ (сумма по k)

Отметим, что условие ортонормированности базиса в лемме является существенным.

Лемма 4. *Для любого оператора f существует ему сопряженный f^*.*

Доказательство. Выберем ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$, и пусть A_f — матрица оператора f в этом базисе. Тогда матрица $\overline{A}_f^t$ будет (в этом же базисе) матрицей некоторого оператора g. Пусть $A_f = \begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}$. Возьмем произвольные векторы $a = a^i e_i$, $b = b^i e_i$. Тогда

$g(a) = \overline{A}_f^t \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ коорд. по стол.

$$f(b) = \begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}; \qquad g(a) = (a^1 \dots a^n) \begin{pmatrix} \overline{c}_1^1 & \dots & \overline{c}_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c}_1^n & \dots & \overline{c}_n^n \end{pmatrix},$$

← коорд. по стр.

и легко видеть, что

$$(a, f(b)) = (\overline{a}^1 \dots \overline{a}^n) \begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \overline{(b, g(a))} = (g(a), b),$$

$V = \mathbb{C}$ - одномерное

e - базис V

можно взять

$\underline{e = 1}$

$z = x + iy$

$= x \cdot e + y \cdot ie$

$i \neq \lambda e \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\underline{e, ie}$ — базис V как пространства над $\mathbb{R}$.

$e_1, \ldots, e_n$ – базис V как компл. пр-ва

$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$

$e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$.

$\lambda_k \in \mathbb{C}$

$z \in V$ $\quad z = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n,$

$z = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \beta_1 \cdot ie_1 + \ldots + \beta_n \cdot ie_n$

$\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$.

коорд. в компл. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

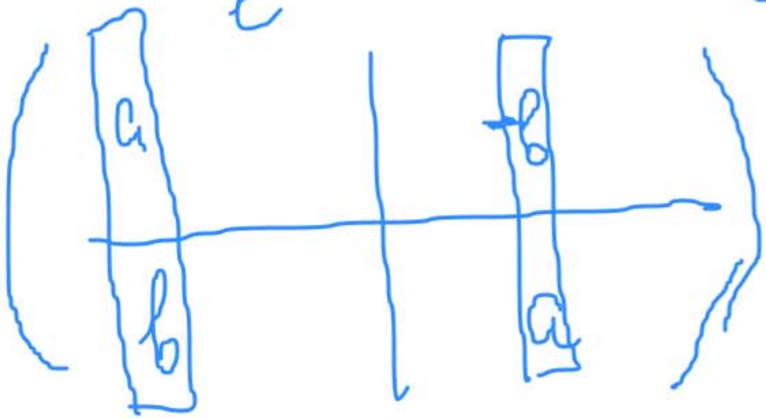
вещест. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$

$f : V \to V$

A $n \times n$ — матр. f над $\mathbb{C}$ с компл. коэф. (c_{kl}) $c_{kl} = a_{kl} + i \cdot b_{kl}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}+ib_{11} & \dots & a_{1n}+ib_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

$$f(e_k) = \sum_l c_{kl} e_l = \sum_l a_{kl} \underline{e_l} + \sum_l b_{kl}\cdot \underline{(ie_l)}.$$



$$f(ie_k) = \sum_l i c_{kl} e_l =$$

$$= \sum_l \underline{i}\, a_{kl}\cdot \underline{e_l} - \sum_l b_{kl} e_l$$

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

$2n \times 2n$.

$\dim V = 1$ $j = (a)$ $j^2 = (a^2) \neq -1$.

$a \in \mathbb{R}$.

$\dim V = 2.$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

компл.

структ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

проверка аксиом лин. пр-ва над $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v}$$

$$(\alpha + i\beta) v = \alpha \cdot v + \beta \cdot j(v)$$

$\lambda = \alpha + i\beta \qquad \mu = \gamma + i\delta$

$\lambda\mu = \alpha\gamma + i\beta\gamma + i\alpha\delta - \beta\delta$

$(\lambda\mu)v = (\alpha\gamma - \beta\delta)\cdot v + (\beta\gamma + \alpha\delta)\, j(v).$

$(\alpha + i\beta)(\gamma v + \delta\, j(v)) = \alpha\gamma v + \alpha\delta\, j(v) + \beta\gamma\, j(v) +$

$+ \beta\delta\, \underline{j(j(v))} \qquad j^2 = -id \qquad j^2(v) = -v.$

V

W

$e_1, \dots, e_n$ — базис в V (т.е. над $\mathbb{C}$)

$z = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \quad \lambda_k \in \mathbb{C}$

$j(e_1) \dots j(e_n)$

$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \qquad z = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 \underbrace{i \cdot e_1} + \dots + \beta_n \underbrace{i e_n}$

$i \cdot e_k = j(e_k)$

$$\boxed{e_1, \dots, e_n, j(e_1), \dots, j(e_n)}$$

$a, b \in V \qquad e_1, \dots, e_n$ — базис в V

$a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, \quad b = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$

$(a, b) = (a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, \ b_1 e_1 + \dots + b_n e_n)$

координ. (a, b) — $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$

$2n$ координат.

$(e_1, 0), \dots, (e_n, 0)$ — базис.

$$(a,b) = a_1(e_1,0)+\dots+a_n(e_n,0) + ib_1(e_1,0)+\dots+ib_n(e_n,0)$$

$$= a_1(e_1,0)+\dots+a_n(e_n,0)+ b_1(0,e_1)+\dots+b_n(0,e_n) =$$

$$= (a_1e_1+\dots+a_ne_n,\ b_1e_1+\dots+b_ne_n).$$

(a,b) раскл. по $(e_1,0),\dots,(e_n,0)$ с компл. коэф.

$$\sum \lambda_k(e_k,0) = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

$\beta \neq 0 \quad \dim\langle a, b\rangle = 2.$ если $= 1$, то

$\boxed{b = \lambda a.}$ или $a = \lambda \cdot b. \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$f(a) = \alpha a - \beta \cdot b = (\alpha - \beta\lambda) a$

$f(b) = \beta a + \alpha \cdot b$

$-\lambda^2 \beta = \beta$

$f(b) = \lambda f(a) = \lambda(\alpha - \beta\lambda) a = \beta a + \cancel{\alpha\lambda a}.$

$\lambda(\cancel{\alpha} - \beta\lambda) = (\beta + \cancel{\alpha\lambda})$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \qquad (x,y) = (x^1 \dots x^n) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

(в ортонорм. базисе)

$V = \mathbb{C}$ - одномерное

e - базис V

можно взять

$e = 1$

$z = x + iy$.

$= x \cdot e + y \cdot ie$.

$i \neq \lambda e \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

e, ie — базис V как пространства над $\mathbb{R}$.

$e_1, \dots, e_n$ – базис V как компл. пр-ва

$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$

$e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$

$z \in V \qquad z = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \quad \lambda_k \in \mathbb{C}$

$z = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 \cdot ie_1 + \dots + \beta_n \cdot ie_n$

$\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}.$

коорд. z компл. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

веществ. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$

$f : V \longrightarrow V$

A $n \times n$ – матр. f над $\mathbb{C}$ $\quad c_{kl} = a_{kl} + i \cdot b_{kl}$

с компл. коэф. $\quad (c_{kl})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + i b_{11} & \ldots & a_{1n} + i b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

$$f(e_k) = \sum_l c_{kl} e_l = \sum_l a_{kl} e_l + \sum_l b_{kl} \cdot (i e_l).$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$f(i e_k) = \sum_l i c_{kl} e_l = \sum_l i a_{kl} \cdot e_l - \sum_l b_{kl} e_l$$

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

$2n \times 2n$.

$\dim V = 1 \quad j = (a) \qquad j^2 = (a^2) \neq -1.$

$a \in \mathbb{R}.$

$\dim V = 2.$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

компл. структ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

проверка аксиом лин. пр-ва над $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v}$$

$$(\alpha + i\beta) v = \alpha \cdot v + \beta \cdot j(v)$$

$\lambda = \alpha + i\beta \qquad \mu = \gamma + i\delta$

$\lambda\mu = \alpha\gamma + i\beta\gamma + i\alpha\delta - \beta\delta$

V

$(\lambda\mu)v = (\alpha\gamma - \beta\delta)\cdot v + (\beta\gamma + \alpha\delta)\, j(v).$

$(\alpha + i\beta)(\gamma v + \delta\, j(v)) = \alpha\gamma v + \alpha\delta\, j(v) + \beta\gamma\, j(v) + \beta\delta\, \underline{j(j(v))}$

W

$j^2 = -id$

$j^2(v) = -v.$

$e_1, \dots, e_n$ — базис в V (т.е. над $\mathbb{C}$)

$z = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \quad \lambda_k \in \mathbb{C}$

$j(e_1) \dots j(e_n)$

$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \qquad z = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 \underbrace{i \cdot e_1} + \dots + \beta_n \underbrace{i e_n}$

$i \cdot e_k = j(e_k)$

$$\boxed{e_1, \dots, e_n, j(e_1), \dots, j(e_n)}$$

$a, b \in V$ $\quad e_1, \dots, e_n$ — базис в V

$a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, \quad b = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$

$(a, b) = (a_1 e_1 + \dots a_n e_n, \ b_1 e_1 + \dots + b_n e_n)$

~~ко~~ коорд. (a, b) — $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$

$2n$ координат.

$(e_1, 0), \dots, (e_n, 0)$ — базис.

$$(a,b) = a_1(e_1,0)+\dots+a_n(e_n,0) + ib_1(e_1,0)+\dots+ib_n(e_n,0)$$

$$= a_1(e_1,0)+\dots+a_n(e_n,0) + b_1(0,e_1)+\dots+b_n(0,e_n) =$$

$$= (a_1e_1+\dots+a_ne_n,\ b_1e_1+\dots+b_ne_n).$$

(a,b) раскл. по $(e_1,0),\dots,(e_n,0)$ с компл. коэф.

$$\sum \lambda_k(e_k,0) = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

$\beta \neq 0 \quad \dim\langle a, b\rangle = 2$. если $= 1$, то

$\boxed{b = \lambda a}$. или $a = \lambda \cdot b$. $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(a) = \alpha a - \beta \cdot b = (\alpha - \beta\lambda) a$

$f(b) = \beta a + \alpha \cdot b$

$-\lambda^2 \beta = \beta$

$f(b) = \lambda f(a) = \lambda(\alpha - \beta\lambda) a = \beta a + \cancel{\alpha\lambda a}$.

$\lambda(\cancel{\alpha} - \beta\lambda) = (\beta + \cancel{\alpha\lambda})$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \qquad (x, y) = \begin{pmatrix} x^1 \dots x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

(в ортонорм. базисе)