т.е. $g = f^*$. $\square$

Следствие 5. *Если f^* — оператор, сопряженный к f, то $(f^*)^* = f$.*

Лемма 6. *Если V — инвариантное подпространство относительно f, то $V^\perp$ — инвариантное подпространство относительно f^*.*

$x \in V \Rightarrow f(x) \in V$

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $v \in V^\perp$, тогда $\forall u \in V$ имеем $(f^*(v), u) = (v, f(u)) = 0$, т.к. $v \in V^\perp$, а $f(u) \in V$. Следовательно, $f^*(v) \in V^\perp$ для любого $v \in V^\perp$. $\square$

В случае евклидовых пространств операция перехода к сопряженному оператору является линейным оператором в пространстве $L(V)$ линейных операторов, квадрат которого равен единице. Далее мы увидим, что его собственными значениями являются числа 1 и -1. Вопрос: почему в случае эрмитовых пространств эта операция (перехода к сопряженному оператору) не является линейным оператором?

Определение 7. Оператор f называется *самосопряженным* (или *симметрическим*), если $f^* = f$. Оператор f называется *кососимметрическим*, если $f^* = -f$.

Заметим, что для матриц операторов будут выполнены эти же свойства, что и для операторов, т.е. матрица симметрического оператора является симметрической (в вещественном случае), матрица кососимметрического оператора является кососимметрической и т.д. (в ортонорм. базисе)

Лемма 8. *Любой оператор единственным образом представляется в виде суммы симметрического и кососимметрического операторов.*

$(f+f^*)^* = f^* + (f^*)^* = f^* + f$

Доказательство. Разложение нужного вида дает формула $f = \frac{1}{2}(f + f^*) + \frac{1}{2}(f - f^*)$, первое слагаемое которой — симметрический оператор, а второе — кососимметрический. Единственность следует из того, что если оператор одновременно симметрический и кососимметрический, то он равен нулю. $\square$

Лемма 9. *Пусть λ — собственное значение самосопряженного оператора. Тогда $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Ясно, что содержательной эта лемма является лишь в эрмитовом случае, в котором мы ее и будем доказывать. Пусть v — соответствующий собственный вектор, $f(v) = \lambda v$. Тогда $\overline{\lambda}(v,v) = (\lambda v, v) = (f(v), v) = (v, f^*(v)) = (v, f(v)) = (v, \lambda v) = \lambda(v,v)$. Поскольку $v \neq 0$, $\overline{\lambda} = \lambda$. $\square$

$f^* = f$

Лемма 10. *Пусть λ — собственное значение кососимметрического оператора. Тогда в евклидовом случае $\lambda = 0$, а в эрмитовом — λ чисто мнимое, $\lambda \in i\mathbb{R}$.*

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущей лемме. В евклидовом случае $\lambda(v,v) = (\lambda v, v) = (f(v), v) = (v, f^*(v)) = -(v, f(v)) = -(v, \lambda v) = -\lambda(v,v)$, откуда $\lambda = -\lambda$. В эрмитовом случае $\overline{\lambda}(v,v) = (\lambda v, v) = (f(v), v) = (v, f^*(v)) = -(v, f(v)) = -(v, \lambda v) = -\lambda(v,v)$, откуда $\overline{\lambda} = -\lambda$. $\square$

Лемма 11. *Пусть λ_1, λ_2 — различные собственные значения самосопряженного или кососимметрического оператора, а v_1, v_2 — соответствующие собственные ~~значения~~. Тогда $v_1 \perp v_2$.*

векторы

Доказательство. $\overline{\lambda}_1(v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) = (f(v_1), v_2) = (v_1, f^*(v_2)) = \pm(v_1, f(v_2)) = \pm(v_1, \lambda_2 v_2) = \pm\lambda_2(v_1, v_2)$, т.е. $(v_1, v_2)(\pm\lambda_2 - \overline{\lambda}_1) = 0$.

Рассмотрим второй сомножитель: $\pm\lambda_2 - \overline{\lambda}_1$. Если f самосопряжен, то собственные значения вещественны и знак — "плюс т.е. $\lambda_2 - \lambda_1$; если f кососимметричен, то собственные значения число мнимы и знак — "минус т.е. $-\lambda_2 + \lambda_1$. В обоих случаях это выражение отлично от нуля, следовательно, нулю равен первый сомножитель, $(v_1, v_2) = 0$. □

Лемма 12. *Если L — инвариантное подпространство относительно самосопряженного или кососимметрического оператора f, то $L^\perp$ также будет инвариантно относительно f.*

Доказательство. Очевидно, т.к. $L^\perp$ инвариантно относительно $f^* = \pm f$. □

Канонический вид матрицы самосопряженного оператора

Теорема 13. *Для любого самосопряженного оператора $f : V \to V$ существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет диагональный вид с вещественными числами на диагонали. Указанный канонический вид матрицы самосопряженного оператора единственен с точностью до перестановки диагональных элементов.*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы по индукции по размерности пространства.

1) Пусть $\dim V = 1$. Очевидно, $A_f = (a)$ — диагональная матрица. В случае поля комплексных чисел, a будет вещественным числом, т.к. $\overline{a} = a$.

$f(v) = \lambda v \in L$

2) Допустим, что теорема доказана для $\dim V \leqslant n$, докажем ее для $\dim V = n + 1$.

$e_1 = \frac{v}{|v|}$

Сначала разберем случай эрмитова пространства. Пусть v — собственный вектор оператора f, $L = \langle v \rangle$, тогда $V = L \oplus L^\perp$, причем L и $L^\perp$ оба инвариантны относительно f, тогда матрица оператора f имеет вид $A_f = \left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A_{f'} \end{array}\right)$, где ограничение f' оператора f на $L^\perp$ тоже самосопряжено, следовательно, по предположению индукции, его можно привести к искомому виду. В итоге матрица A_f будет диагональной, причем, т.к. $\overline{a} = a$, на диагонали будут вещественные числа.

$e_2, \ldots, e_n$ ортон. б. $L^\perp$

Теперь перейдем к случаю евклидова пространства. Мы знаем, что у любого оператора над полем вещественных чисел существует либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство. Если у этого оператора есть хотя бы одно одномерное инвариантное подпространство, то можно действовать аналогично предыдущему случаю. Если же у этого оператора имеются лишь двумерные инвариантные подпространства, то его матрица имеет вид $A_f = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \\ \hline \mathbf{0} & & A_{f'} \end{array}\right)$. По предположению индукции матрица ограничения f' на ортогональное дополнение к инвариантному подпространству имеет искомый вид. Осталось лишь разобраться с двумерной клеткой $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Т.к. $A^t = A$, то $a_{21} = a_{12}$. Для дальнейшего доказательства нам потребуется

Лемма 14. *У двумерной симметричной матрицы характеристический многочлен имеет вещественные корни.*

Доказательство.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - t \end{pmatrix} = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

$\hat{D} = C^{-1}AC$

Дискриминант этого многочлена равен $D = (a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) = (a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2 \geqslant 0$. $\square$

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы A. Тогда в базисе, составленным из собственных векторов, она имеет вид $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то мы всегда можем выбрать два ортонормированных собственных вектора в качестве базиса двумерного пространства. Если же $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то отвечающие м собственные векторы уже автоматически ортогональны друг другу.

Доказательство существования канонического вида закончено. Единственность следует из того, что на диагонали там стоят корни характеристического многочлена с учетом их кратности. $\square$

Канонический вид матрицы кососимметрического оператора

Теорема 15. *У любого кососимметрического оператора $f : V \to V$ в эрмитовом пространстве V существует ортонормированный базис, в котором его матрица A_f имеет диагональный вид с чисто мнимыми числами на диагонали.*

Доказательство. Мы знаем, что если $L \subset V$ инвариантно относительно f, то и $L^\perp$ будет инвариантно относительно f. Следовательно матрицу оператора f можно привести к диагональному виду (таким же способом, каким мы делали это ранее — по индукции, соответствующий базис будет ортонормированным), $A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\square$

$\bar{\lambda}_k = -\lambda_k$.

Теорема 16. *У любого кососимметрического оператора $f : V \to V$ в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица A_f имеет блочно-диагональный вид, причем все блоки либо одномерные* (равные нулю), *либо двумерные, имеющие вид* $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

$n=1$: (λ) $\lambda = 0$

Доказательство. Если у оператора f имеется одномерное инвариантное подпространство, то доказательство в точности совпадает с эрмитовым случаем, поэтому остается рассмотреть случай, когда можно выделить двумерное инвариантное подпространство $L \subset V$. При этом его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно, и по предположению индукции можно считать, что матрица ограничения оператора f на $L^\perp$ уже имеет требуемый вид. Рассмотрим матрицу ограничения f на L в произвольном ортонормированном базисе двумерного подпространства L: это двумерная матрица, причем, в силу косой симметрии, на ее диагонали стоят нули, а вне диагонали — противоположные по знаку числа.

Единственность канонического вида матриц кососимметрических операторов с точностью до перестановки блоков также следует из того, что эти блоки определяются характеристическим многочленом оператора. $\square$

Изометрии

Определение 17. Линейный оператор $f : V \to V$ называется *изометрией*, если $|f(a)| = |a|$ для любого вектора $a \in V$ (т.е. если он сохраняет длины векторов).

Утверждение 18. *Оператор f является изометрией тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное произведение.*