При этом его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно, и по предположению индукции можно считать, что матрица ограничения оператора f на $L^\perp$ уже имеет требуемый вид. Рассмотрим матрицу ограничения f на L в произвольном ортонормированном базисе двумерного подпространства L: это двумерная матрица, причем, в силу косой симметрии, на ее диагонали стоят нули, а вне диагонали — противоположные по знаку числа.

Единственность канонического вида матриц кососимметрических операторов с точностью до перестановки блоков также следует из того, что эти блоки определяются характеристическим многочленом оператора: если канонический вид матрицы состоит из двумерных блоков $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ -a_k & 0 \end{pmatrix}$ и $n-2k$ нулевых одномерных блоков, то корни характеристического многочлена — это числа $\pm ia_1, \dots, \pm ia_k$ и 0 кратности $n-2k$. Это показывает независимость чисел k и $a_1, \dots, a_k$ от выбора базиса. □

Изометрии

Определение 17. Линейный оператор $f: V \to V$ называется *изометрией*, если $|f(a)| = |a|$ для любого вектора $a \in V$ (т.е. если он сохраняет длины векторов).

Утверждение 18. *Оператор f является изометрией тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное произведение.* $(f(a), f(b)) = (a, b)\ \forall a, b \in V$

Доказательство. Если f сохраняет скалярное произведение, то он, в частности, сохраняет и длины векторов. Остается проверить обратное утверждение. Пусть f сохраняет длины векторов (т.е. изометрия).

1) В случае, когда пространство V евклидово, возьмем два произвольных вектора $a, b \in V$, тогда $(a+b, a+b) = (a,a) + (b,b) + 2(a,b)$, откуда $(a,b) = \frac{1}{2}((a+b,a+b) - (a,a) - (b,b))$, следовательно, оператор f сохраняет скалярное произведение. $(b,a) = \overline{(a,b)}$

2) Рассмотрим теперь случай, когда пространство V эрмитово. Тогда $(a+b, a+b) = (a,a) + (b,b) + (a,b) + \overline{(a,b)} = (a,a) + (b,b) + 2\,\mathrm{Re}(a,b)$, откуда $\mathrm{Re}(a,b) = \frac{1}{2}((a+b,a+b) - (a,a) - (b,b))$, следовательно, вещественная часть скалярного произведения сохраняется. Взяв вектор ib вместо b, получаем

$(-i)\cdot i$

$$\begin{aligned}(a+ib, a+ib) &= (a,a) + (ib,ib) + (a,ib) + (ib,a) = (a,a) + (b,b) + i(a,b) - i(b,a) = \\ &= (a,a) + (b,b) + i(a,b) - i\overline{(a,b)} = (a,a) + (b,b) + 2\,\mathrm{Im}(a,b),\end{aligned}$$

следовательно мнимая часть скалярного произведения также выражается через длины векторов, $\mathrm{Im}(a,b) = +\frac{1}{2}((a+ib,a+ib) - (a,a) - (b,b))$ и, значит, тоже сохраняется. □

Лемма 19. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) оператор f сохраняет скалярное произведение;

2) оператор f переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный;

3) оператор f переводит произвольный ортонормированный базис в ортонормированный;

4) в любом ортонормированном базисе матрица A_f оператора f обладает свойством $\overline{A}_f^t A_f = E$. [т.е. ортогональная/унитарная]

Доказательство. $a_1, \dots, a_n$ – ортонорм. базис

1) ⇒ 3) очевидно, т.к. $(f(a_i), f(a_j)) = (a_i, a_j) = \delta_{ij}$.

2) ⇒ 1). Пусть $a_1, \dots, a_n$ — ортонормированный базис, $b_i = f(a_i)$, и $b_1, \dots, b_n$ — также ортонормированный базис. Возьмем произвольные векторы $x = x^i a_i$ и $y = y^i a_i$. Тогда $f(x) = x^i b_i$, $f(y) = y^i b_i$, и $(f(x), f(y)) = (x^i b_i, y^j b_j) = \overline{x}^i (b_i, b_j) y^j = \overline{x}^i (a_i, a_j) y^j = (x, y)$, значит, f сохраняет скалярное произведение.

3) ⇒ 2) очевидно, как частный случай

Таким образом, первые три условия эквивалентны (3) $\Rightarrow$ 2) — очевидно). Покажем, что 3) и 4) эквивалентны.

3) $\Rightarrow$ 4). Возьмем ортонормированный базис $a_1, \dots, a_n$, тогда $\underbrace{G(f(a_1), \dots, f(a_n))}_{=E} = \overline{A}_f^t \underbrace{G(a_1, \dots, a_n)}_{=E} A_f$, т.е. $\overline{A}_f^t A_f = E$.

4) $\Rightarrow$ 3). Для любого ортонормированного базиса $a_1, \dots, a_n$ имеем $G(f(a_1), \dots, f(a_n)) = \overline{A}_f^t \underbrace{G(a_1, \dots, a_n)}_{=E} A_f$, значит, $\overline{A}_f^t A_f = E$, следовательно, векторы $f(a_1), \dots, f(a_n)$ также ортонормированны. $\square$

Ортогональные и унитарные операторы

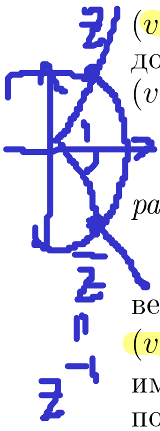
Определение 20. Оператор, сохраняющий скалярное произведение в евклидовых пространствах называется *ортогональным*, в эрмитовых пространствах — *унитарным.*

Лемма 21. *Пусть оператор f действует в евклидовом или эрмитовом пространстве V, а $L \subset V$ — инвариантное подпространство. Если f сохраняет скалярное произведение, то $L^\perp$ тоже инвариантно.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $a \in L^\perp$; надо доказать, что $f(a) \in L^\perp$, т.е., что $(f(a), v) = 0$ для любого $v \in V$. Мы знаем, что $f(L) \subseteq L$, но, поскольку ортонормированный базис переходит в ортонормированный базис, то $\dim f(L) = \dim L$, следовательно $f(L) = L$. Тогда найдется такой вектор $w \in L$, что $v = f(w)$, и тогда $(f(a), v) = (f(a), f(w)) = (a, w) = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 22. *Если f — унитарный оператор, то все его собственные значения по модулю равны 1, если же f — ортогональный, то все его собственные значения равны ± 1.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение, тогда для собственного вектора v выполнено равенство $f(v) = \lambda v$. Т.к. оператор сохраняет скалярное произведение, то $(v, v) = (f(v), f(v)) = (\lambda v, \lambda v) = \overline{\lambda}\lambda(v, v) = |\lambda|^2 (v, v)$, а т.к. $v \neq 0$, то $(v, v) \neq 0$, следовательно, $|\lambda|^2 = 1$, т.е. $|\lambda| = 1$. Если же оператор f ортогональный, то будем иметь $(v, v) = \lambda^2 (v, v)$ с вещественным λ, следовательно, $\lambda = \pm 1$. $\square$



Лемма 23. *Если f — унитарный оператор, то его собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $f(v_2) = \lambda_2 v_2$ (v_1 и v_2 — собственные вектора). Тогда $(v_1, v_2) = (f(v_1), f(v_2)) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = \overline{\lambda}_1 \lambda_2 (v_1, v_2)$, следовательно, либо $(v_1, v_2) = 0$, т.е. $v_1 \perp v_2$, либо $\overline{\lambda}_1 \lambda_2 = 1$. Но во втором случае, поскольку $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, имеем $\lambda_1^{-1} = \overline{\lambda}_1$, поэтому $\overline{\lambda}_1 \lambda_2 = \lambda_1^{-1} \lambda_2 = 1$, откуда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$, что невозможно по предположению. Следовательно, векторы v_1 и v_2 ортогональны. $\square$

Аналогичное утверждение верно и для ортогональных операторов, но у ортогонального оператора может быть не более двух различных собственных значений.

Теорема 24. *1) Если $f : V \to V$ — унитарный оператор, то существует ортонормированный базис, в котором его матрица A_f диагональна, причем на диагонали стоят числа, по модулю равные 1.*

2) Если $f : V \to V$ — ортогональный оператор, то существует ортонормированный базис, в котором A_f имеет блочно-диагональный вид с блоками размера 1 и 2, причем *одномерные блоки — это* ± 1*, а двумерные блоки имеют вид* $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *для некоторого угла* φ*.*

3) Указанные канонические виды матриц унитарного и ортогонального оператора единственны с точностью до перестановки диагональных элементов и двумерных блоков.

Доказательство.

1) Пусть λ — собственное значение оператора f (оно существует, т.к. поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто) и v — собственный вектор, отвечающий этому значению. Тогда $L = \langle v \rangle$ — одномерное пространство, порожденное вектором v — будет инвариантным. Кроме того, его ортогональное дополнение $L^\perp$ также будет инвариантным по доказанной ранее лемме. Пользуясь этим замечанием, проведем теперь доказательство по индукции.

Если $\dim V = 1$, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть теорема верна для случая $\dim V = n$, докажем ее для $\dim V = n + 1$. Возьмем одномерное инвариантное подпространство L, порожденное собственным вектором, тогда $V = L \oplus L^\perp$, и матрица A_f имеет вид $A_f = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & A' \end{array}\right)$, где A' — матрица оператора $f|_{L^\perp}$.

в нов. выбр. базисе

Ограничение $f|_{L^\perp}$ оператора f на $L^\perp$ также будет унитарным (так как f сохраняет скалярные произведения), следовательно, по предположению индукции матрицу A' можно представить в требуемом виде, но тогда и вся матрица будет представлена в таком виде. Поскольку на диагонали будут стоять собственные значения оператора f (и его ограничений), то они все по модулю равны 1.

2) Если у оператора f есть вещественные собственные значения, то с ним можно поступить так же, как и в случае унитарного оператора. Если же их нет, то у оператора f найдется двумерное инвариантное подпространство L. По предположению индукции, для ограничения $f|_{L^\perp}$ существует ортонормированный базис в $L^\perp$, в котором матрица этого оператора имеет требуемый вид. Тогда матрица исходного оператора f будет блочно-диагональной, и все блоки, кроме первого (отвечающего подпространству L), имеют требуемый вид.

$\left(\begin{array}{c|c} \blacksquare & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$

Ограничение оператора f на двумерное подпространство L также является ортогональным оператором. Выберем в L произвольный ортонормированный базис e_1, e_2. Поскольку длина вектора $f(e_1)$ должна быть равна 1, его координаты в базисе e_1, e_2 имеют вид $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ для некоторого угла φ. Пусть (x, y) — координаты $f(e_2)$ в этом же базисе. Тогда $x^2 + y^2 = 1$ и $x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0$, откуда получаются два решения: $x = -\sin\varphi$, $y = \cos\varphi$ и $x = \sin\varphi$, $y = -\cos\varphi$. Первое решение нам подходит — в этом случае двумерный блок — матрица ограничения f на L — имеет требуемый вид. Второе решение дает матрицу $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$, котроая, как легко видеть, имеет вещественные собственные значения (ее харакеристический многочлен равен $\lambda^2 - 1$). Эту матрицу можно привести к диагональному виду с числами ± 1 на диагонали, что противоречит нашему предположению о том, что оператор f не имеет одномерных инвариантных подпространств.

$\begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array}$
$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

3) В случае унитарного оператора единственность очевидна, т.к. на диагонали там стоят корни характеристического многочлена с учетом их кратности. В случае ортогонального оператора корни характеристического многочлена двумерной клетки являются комплексными корнями характеристического многочлена оператора, следовательно, двумерные клетки тоже определяются однозначно. $\square$

Неотрицательные и положительные операторы. Извлечение неотрицательного квадратного корня из оператора

Определение 25. Оператор $f : V \to V$ называется *неотрицательным*, если

1) $f^* = f$,
2) $(fv, v) \geqslant 0$ для любого $v \in V$

Упражнение: в случае поля комплексных чисел первое условие является следствием второго, а в вещественном — нет.

Лемма 26. *Оператор f является неотрицательным $\iff$ в некотором ортонормированном базисе его матрица диагональна с неотрицательными элементами на диагонали.*

Доказательство.
$\Rightarrow$: Т.к. $f^* = f$, то существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица оператора диагональна, $A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Тогда $(fe_i, e_i) = \lambda_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.
$\Leftarrow$: очевидно. $\square$

Лемма 27 (извлечение квадратного корня)**.** *Если f — неотрицательный оператор, то существует (и притом единственный) такой неотрицательный оператор g, что $g^2 = f$.*

Доказательство.
Существование. Т.к. f — неотрицательный, то в некотором ортонормированном базисе его матрица имеет вид $A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$, причем все $\lambda_i \geqslant 0$. Возьмем оператор g с матрицей $A_g = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ в этом же базисе, тогда $g^2 = f$.

Единственность. Пусть наряду с оператором g, построенным выше, существует еще один такой неотрицательный оператор h, что $h^2 = f$. В некотором базисе $a_1, \ldots, a_n$ матрица оператора g имеет вид $A_g = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, а т.к. оператор h неотрицательный, то и его матрица в некотором (вообще говоря другом) базисе $b_1, \ldots, b_n$ имеет вид $A_h = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n \end{pmatrix}$. Т.к. λ_i и μ_i^2 — это собственные значения оператора f (с учетом кратности), то μ_i совпадают с $\sqrt{\lambda_i}$ с точностью до перестановки. Без ограничения общности можно считать, что они уже переставлены так, чтобы μ_i в точности совпадали с $\sqrt{\lambda_i}$. Построим изометрию u, переводящую один базис в другой, $u(a_i) = b_i$, тогда

$$(u^*hu)a_i = (u^*h)b_i = u^*\mu_i b_i = \mu_i u^* b_i = \sqrt{\lambda_i}u^*b_i = \sqrt{\lambda_i}a_i = ga_i,$$

следовательно, $u^*hu = g$ и $h = ugu^*$ (т.к. оператор u обратим и $u^{-1} = u^*$). Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$f = g^2 = (u^*hu)^2 = u^*huu^*hu = u^*h^2u = u^*fu,$$

значит, $uf = fu$, т.е. оператор u перестановочен с f. Если бы u был перестановочен и с g, т.е. если бы было верно равенство $ug = gu$, то тогда получилось бы, что $h = ugu^* = guu^* = g$, что нам и нужно доказать.

Докажем перестановочность u с g. Пусть матрица оператора u в базисе $a_1, \ldots, a_n$ имеет вид $A_u = \begin{pmatrix} u_1^1 & \ldots & u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^n & \ldots & u_n^n \end{pmatrix}$ (в этом базисе матрицы операторов f и g имеют диагональный вид). Тогда

$$A_{uf} = A_u A_f = \begin{pmatrix} u_1^1 & \ldots & u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^n & \ldots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^1 & \ldots & \lambda_n u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 u_1^n & \ldots & \lambda_n u_n^n \end{pmatrix},$$

аналогично, $A_{fu} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^1 & \ldots & \lambda_1 u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n u_1^n & \ldots & \lambda_n u_n^n \end{pmatrix}$. Перестановочность u с f означает, что

$$\lambda_i u_i^j = \lambda_j u_i^j \forall i, j. \tag{1}$$

Точно так же получаем, что

$$A_{ug} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} u_1^1 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\lambda_1} u_1^n & \ldots & \sqrt{\lambda_n} u_n^n \end{pmatrix}, \qquad A_{gu} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} u_1^1 & \ldots & \sqrt{\lambda_1} u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\lambda_n} u_1^n & \ldots & \sqrt{\lambda_n} u_n^n \end{pmatrix}.$$

Из равенства (1) следует, что $\sqrt{\lambda_i} u_i^j = \sqrt{\lambda_j} u_i^j$ для всех i, j, т.е. $ug = gu$. □

Единственный неотрицательный квадратный корень из неотрицательного оператора f мы будем обозначать $f^{1/2}$.

Лемма 28. *Оператор f неотрицателен тогда и только тогда, когда $f = h^*h$ для некоторого оператора h.*

Доказательство.
Если f неотрицателен, то в качестве оператора h можно взять квадратный корень из f.
Если $f = h^*h$, то $f^* = (h^*h)^* = h^*(h^*)^* = h^*h = f$, т.е. f — самосопряженный. Для любого вектора a имеем $(fa, a) = (h^*ha, a) = (ha, ha) \geqslant 0$, следовательно, f — неотрицательный. □

Определение 29. Оператор f называется *положительным*, если он неотрицателен и обратим.

Для любого положительного оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна, причем на диагонали стоят положительные числа.

Лемма 30. *Если оператор $f : V \to V$ положителен, то формула $\langle a, b\rangle := (fa, b)$, где $a, b \in V$, задает (новое) скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в гильбертовом пространстве V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.*

Доказательство. Проверим необходимые условия скалярного произведения:
1) линейность очевидна, т.к. оператор f линейный и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ также линейно;
2) симметричность следует из самосопряженности f;
3) положительная определенность: $\langle a, b\rangle \geqslant 0$, т.к. $\langle a, b\rangle = (fa, a) = (g^2 a, a) = (ga, ga) \geqslant 0$, где g — неотрицательный квадратный корень из f. Причем оператор g положителен, поскольку обратим (иначе $f = g^2$ был бы необратим). Равенство $\langle a, a\rangle = 0$ эквивалентно $(ga, ga) = 0$, или $ga = 0$, но из обратимости g отсюда вытекает $a = 0$. □

f - произвольн. оператор, A_f - его матрица в базисе $a_1, \dots, a_n$ (ортонорм.)

выразить

$f(a_1), \dots, f(a_n)$ $G(b_1, \dots, b_n)$ через

$\parallel$ $\parallel$

$b_1, \dots, b_n$ $G(a_1, \dots a_n)$

$A_f = (c_i^j)_{i,j=1}^n$ $b_i = c_i^j a_j$ (сумма по j)

$$G(b_1, \dots, b_n) = (\tilde{g}_{ij}) \qquad \tilde{g}_{ij} = (b_i, b_j) =$$

$$= (c_i^k a_k, c_j^l a_l) = (c_i^1 a_1 + \dots + c_i^n a_n, c_j^1 a_1 + \dots + c_j^n a_n)$$

$$\tilde{g}_{ij} = c_i^k (a_k, a_l) c_j^l = c_i^k g_{kl} c_j^l$$

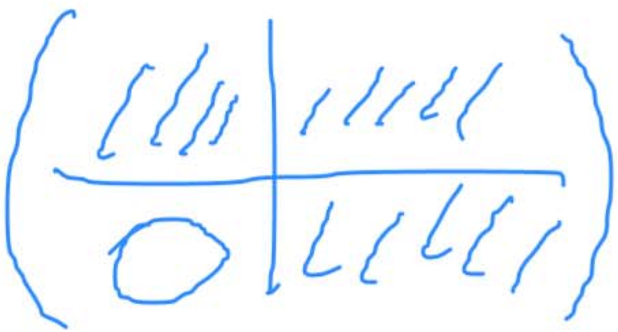
$$\tilde{G} = A_f^t G A_f$$

$a_1, \dots a_n$ ортонорм.

$G = E$; f сохр. $(\cdot,\cdot)$

если $L \subset V$ инвар. относительно операт. f.

в подход. базисе матрица оп. f



$e_1, \dots, e_k$ - базис в L

дополнить до базиса V.

если $L^\perp$ тоже инвар., и если дополнение до базиса V выбрано правильно, то

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{|||||} & 0 \\ \hline 0 & \text{||||||} \end{array}\right)$$

$e_1, \dots, e_k$ — базис L

$e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в $L^\perp$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi}$$

$$\lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + 1 = 0$$

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{matrix}} & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & \boxed{\begin{matrix}\cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k\end{matrix}} & & & & & \\
 & & & \boxed{+1} & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \boxed{+1} & & \\
 & & & & & & \boxed{-1} & \\
 & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & \boxed{-1}
\end{pmatrix}
$$

$\cos\varphi_j \pm i\sin\varphi_j$

1

-1

если в нек-ром ортон. базисе матрица опер.

f имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_k \geq 0$.

то $(f(v), v) = \lambda_1 (v^1)^2 + \ldots + \lambda_n (v^n)^2 \geq 0$.

$v = v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n$

$f(v) = v^1 f(e_1) + \ldots + v^n f(e_n) = v^1 \lambda_1 e_1 + \ldots + v^n \lambda_n e_n$

f – изометрия $\quad (f(a), f(b)) = (a, b)$

$$(\underline{\underline{a}}, f^* f(b)) = (a, b) \quad \forall a, b \in V$$
$$=$$

$$A^t \cdot A = E \qquad (\underline{\underline{a}}, f^* f(b) - b) = 0$$

$$f^* f = id \quad \Longleftarrow \quad f^* f(b) - b = 0 \quad \forall b \in V$$

$$f^* = f^{-1}.$$

$i \neq j$ $(\lambda_j - \lambda_i) u_i^j = 0$ либо $u_i^j = 0$,

либо $\lambda_j = \lambda_i$

$(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}) u_i^j = 0$

$uf = fu$

$\Updownarrow$

$ug = gu$

т.е. $\lambda_i \geq 0$. $\lambda_i = \lambda_j \Leftrightarrow$

$\sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda_j}$.

f - произвольн. оператор, A_f - его матрица в базисе $a_1, \ldots, a_n$ (ортонорм.)

$f(a_1), \ldots, f(a_n)$

$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$

$b_1, \ldots, b_n$

выразить

$G(b_1, \ldots, b_n)$ через

$G(a_1, \ldots a_n)$

$A_f = (c_i^j)_{i,j=1}^n$

$b_i = c_i^j a_j$ (сумма по j)

$$G(b_1,\dots,b_n) = (\tilde g_{ij}) \qquad \tilde g_{ij} = (b_i, b_j) =$$

$$= (c_i^k a_k, c_j^l a_l) = (c_i^1 a_1 + \dots + c_i^n a_n, c_j^1 a_1 + \dots + c_j^n a_n)$$

$$\tilde g_{ij} = \bar c_i^k (a_k, a_l) c_j^l = \bar c_i^k g_{kl} c_j^l$$

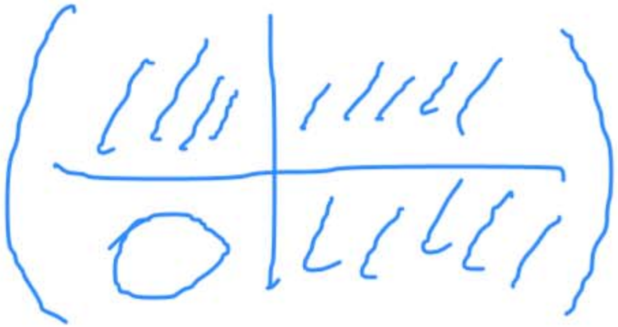
$$\tilde G = \bar A_f^t G A_f$$

$a_1,\dots,a_n$ ортонорм.

$G = E$; f сохр. $(\,;\,)$

если $L \subset V$ инвар. относительно операт-а f.

в подход. базисе матрица оп. f



$e_1, \dots, e_k$ - базис в L

дополнить до базиса V.

если $L^\perp$ тоже инвар., и если дополнение до базиса V выбрано правильно, то

$$\left(\begin{array}{c|c} \ast & 0 \\ \hline 0 & \ast \end{array}\right)$$

$e_1, \ldots, e_k$ — базис L

$e_{k+1}, \ldots, e_n$ — базис в $L^{\perp}$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi}$$

$$\lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{matrix}} & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & \boxed{\begin{matrix}\cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k\end{matrix}} & & & & \\
& & & \boxed{+1} & & & \\
& & & & \ddots & & \\
& & & & & \boxed{+1} & \\
& & & & & & \boxed{-1} \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & \boxed{-1}
\end{pmatrix}$$

$\cos\varphi_j \pm i\sin\varphi_j$

1

-1

если в нек-ром ортон. базисе матрица опер.

f имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_k \geq 0$:

то $(f(v), v) = \lambda_1 (v^1)^2 + \ldots + \lambda_n (v^n)^2 \geq 0$.

$v = v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n$

$f(v) = v^1 f(e_1) + \ldots + v^n f(e_n) = v^1 \lambda_1 e_1 + \ldots + v^n \lambda_n e_n$

f – изометрия $\quad (f(a), f(b)) = (a, b)$

$$(\underline{\underline{a}}, f^* f(b)) = (a, b) \quad \forall a, b \in V$$
$$=$$

$$\overline{A}^t \cdot A = E$$

$$(\underline{\underline{a}}, f^* f(b) - b) = 0$$

$$f^* f = id \quad \Longleftarrow \quad f^* f(b) - b = 0 \quad \forall b \in V$$

$$f^* = f^{-1}.$$

$i \neq j \quad (\lambda_j - \lambda_i) u_i^j = 0$ либо $u_i^j = 0$,

либо $\lambda_j = \lambda_i$

$$(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}) u_i^j = 0$$

$uf = fu$

$\Updownarrow$

$ug = gu$

все $\lambda_i \geq 0$. $\lambda_i = \lambda_j \Leftrightarrow$

$\sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda_j}$.

f - произвольн. оператор, A_f - его матрица в базисе $a_1, \dots, a_n$ (ортонорм.)

$f(a_1), \dots, f(a_n)$ $\quad$ выразить $G(b_1, \dots, b_n)$ через $G(a_1, \dots, a_n)$

$\shortparallel \qquad\quad \shortparallel$

$b_1, \dots, b_n$

$A_f = (c_i^j)_{i,j=1}^n$ $\qquad b_i = c_i^j a_j$ (сумма по j)

$$G(b_1, \dots, b_n) = (\tilde{g}_{ij}) \qquad \tilde{g}_{ij} = (b_i, b_j) =$$

$$= (c_i^k a_k, c_j^l a_l) = (c_i^1 a_1 + \dots + c_i^n a_n, c_j^1 a_1 + \dots + c_j^n a_n)$$

$$\tilde{g}_{ij} = \bar{c}_i^k (a_k, a_l) c_j^l = \bar{c}_i^k g_{kl} c_j^l$$

$$\tilde{G} = \bar{A}_f^t G A_f$$

$a_1, \dots a_n$ ортонорм.

$G = E$, f сохр. $(\cdot,\cdot)$

если $L \subset V$ инвар. относительно операт-а f.

в подход. базисе матрица оп. f

$$\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

$e_1, \dots, e_k$ – базис в L

дополнить до базиса V.

если $L^\perp$ тоже инвар., и если дополнение до базиса V выбрано правильно, то

$$\left(\begin{array}{c|c} [illegible] & 0 \\ \hline 0 & [illegible] \end{array}\right)$$

$e_1, \dots, e_k$ — базис L

$e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в $L^\perp$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi}$$

$$\lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{matrix} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \begin{matrix}\cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k\end{matrix} & & & & & \\ & & & +1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & +1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\cos\varphi_j \pm i\sin\varphi_j$

1

-1

если в нек-ром ортон. базисе матрица опер.

f имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_k \geq 0$.

то $(f(v), v) = \lambda_1 (v^1)^2 + \ldots + \lambda_n (v^n)^2 \geq 0$.

$v = v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n$

$f(v) = v^1 f(e_1) + \ldots + v^n f(e_n) = v^1 \lambda_1 e_1 + \ldots + v^n \lambda_n e_n$

f — изометрия $\quad (f(a), f(b)) = (a, b)$

$$(\underline{\underline{a}}, f^* f(b)) = (a, b) \quad \forall a, b \in V$$

$$\overline{A}^t \cdot A = E \qquad (\underline{\underline{a}}, f^* f(b) - b) = 0$$

$$f^* f = id \quad \Longleftarrow \quad f^* f(b) - b = 0 \quad \forall b \in V$$

$$f^* = f^{-1}.$$

$i \neq j \quad (\lambda_j - \lambda_i) u_i^j = 0$ либо $u_i^j = 0$,

либо $\lambda_j = \lambda_i$

$$(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}) u_i^j = 0$$

$uf = fu$

$\Updownarrow$

$ug = gu$

все $\lambda_i \geq 0$. $\lambda_i = \lambda_j \Leftrightarrow$

$\sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda_j}$.