Определение 1. Пусть дано линейное пространство W, его элемент $a \in W$ и его подпространство $V \subset W$. *Линейным подмногообразием* называется множество всех векторов вида $a + v$, где $v \in V$. всегда аффинное

Для линейных подмногообразий удобно пользоваться обозначением $a + V$.

Лемма 2. *Линейное подмногообразие $a + V$ является линейным подпространством пространства W тогда и только тогда, когда $a \in V$.*

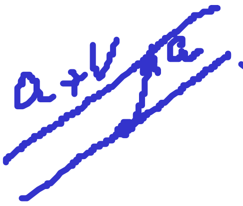
$a+V=\{\underbrace{a+v}_{\in V} : v\in V\}$ $\quad a+V=0+v',\ v'\in V$

Доказательство.
1) если $a \in V$, то $a + V = 0 + V = V$ (совпадают как множества).
2) пусть $a+V$ является подпространством. Т.к. $a \in a+V$, то $2a \in a+V$, что равносильно существованию некоторого $b \in V$, такого что $2a = a + b$, но тогда получаем, что $a = b$, т.е. $a \in V$. □

Лемма 3. $a_1 + V = a_2 + V \iff a_1 - a_2 \in V$.

Доказательство.
$\Rightarrow$: пусть $a_1 + V = a_2 + V$, тогда $a_1 \in a_1 + V = a_2 + V$, значит, найдется такой вектор $b \in V$, что $a_1 = a_2 + b$, т.е. $\overset{b}{a_1 - a_2} \in V$.
$\Leftarrow$: пусть $a_1 - a_2 \in V$, т.е. $\underline{a_1 - a_2 = v} \in V$. Возьмем произвольный элемент $b \in a_1 + V$. Тогда $b = a_1 + b'$ для какого-то вектора $b' \in V$. Покажем, что $b \in a_2 + V$. Действительно, $b = a_1 + b' = a_2 + (v + b')$, причем $v + b' \in V$. □

$\underset{b}{a_1}+V\subset a_2+V \qquad a_2+V\subset a_1+V$



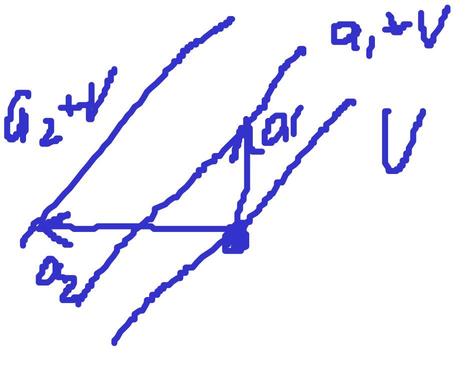
$AX=B$

V = реш. одн. сист. $AX=0$

a – реш. неодн.

$a+V$ – все реш. неоднородн. сист.

$a_1+V=a_2+V$ не только когда $a_1=a_2$, но и если они не равны, но $a_1-a_2\in V$



W лин-пр-во, $V \subset W$ лин. подпр-во

Определение 4. *Фактор-пространством* W/V линейного пространства W по подпространству V называется множество $\{a+V : a \in W\}$ — множество всех линейных подмногообразий пространства W, заданных подпространством V, с определенными на нем операциями сложения, $(a+V)+(b+V) := (a+b)+V$, и умножения на скаляры, $\lambda(a+V) := \lambda a + V$.

проблема: $a_1+V=a_2+V$ $\quad b_1+V=b_2+V$

Лемма 5. *Факторпространство линейного пространства само является линейным пространством.*

Корректность определения

Доказательство.

1) Сначала докажем, что введенные нами в факторпространстве операции корректны, т.е. какие бы мы ни брали элементы подмногообразий в качестве a и b, мы получим одно и то же подмногообразие. Докажем это для сложения (для умножения доказывается аналогично): если

$$a_1+V=a_2+V, \quad b_1+V=b_2+V,$$

то

$$a_1-a_2=v\in V, \quad b_1-b_2=w\in V,$$

поэтому $(a_1+b_1)-(a_2+b_2)=v+w\in V \Rightarrow a_1+b_1+V=a_2+b_2+V$

$$(a_1+b_1)+V=(a_2+b_2+v+w)+V=(a_2+b_2)+(v+w)+V=(a_2+b_2)+V,$$

т.е. сложение определено корректно.

2) Проверим свойства линейного пространства. Ввиду простоты ограничимся проверкой одного из восьми свойств, например 5).

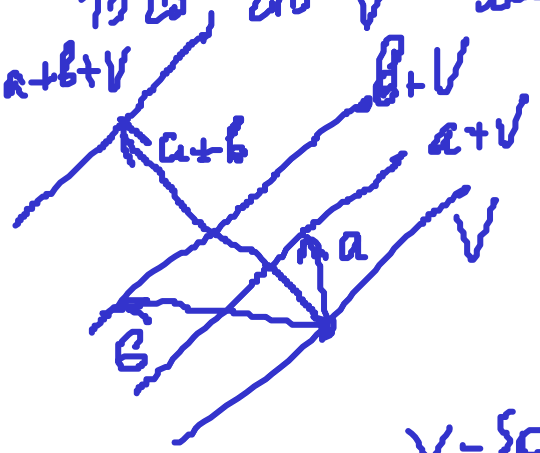
$$\begin{aligned}\lambda((a+V)+(b+V)) &= \lambda((a+b)+V)=\lambda(a+b)+V= \\ &= (\lambda a+\lambda b)+V=(\lambda a+V)+(\lambda b+V)= \\ &= \lambda(a+V)+\lambda(b+V).\end{aligned}$$

$V=\{\lambda\cdot v : v\in V\}$ если $\lambda\neq 0$

если $\lambda=0$, очевидно обе части $=0$.

□

свойства 1-8) для лин. подмногообразий следуют из этих свойств для W и из того, что V — лин. подпр.



$V=W$ все лин. подмногообр. совп.; W/V состоит из одного эл-та. (нулевого)

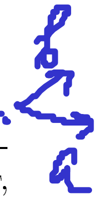
$V=\{0\}$.

$a_1+V=a_2+V \Leftrightarrow a_1=a_2$

W/V можно отождествить с W

Линейная зависимость векторов

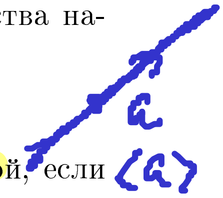
$\{a, b\}$ вся пл.



Определение 6. Пусть дано линейное пространство V и некоторая система (множество) векторов $\{v_i : i \in I\} \subset V$ этого пространства. Если множество индексов I (а, значит, и система векторов) конечно ($I = \{1, \ldots, n\}$), их *линейной комбинацией* называется выражение вида $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, где λ_i — это числа (скаляры) из поля $\mathbb{K}$. Если множество I бесконечно, линейной комбинацией бесконечной системы векторов называется выражение аналогичного вида, $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, в котором лишь *конечное* число скаляров λ_i отлично от нуля.

набора

Определение 7. *Линейной оболочкой* системы векторов линейного пространства называется множество всех векторов, являющихся их линейной комбинацией.



Линейная оболочка системы векторов $e_1, \ldots, e_n$ часто обозначается $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

Определение 8. Система векторов $\{a_i : i \in I\}$ называется линейно зависимой, если существуют числа λ_i, не все равные нулю, такие, что $\sum_{k \in I} \lambda_i a_i = 0$, в противном случае система векторов называется линейно независимой.

Лемма 9. *Если система векторов $\{a_i : i \in I\}$ линейно зависима, то один из них является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$, причем существует $\lambda_i \neq 0$, тогда имеем $\lambda_i a_i = -\lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda_{i-1} a_{i-1} - \lambda_{i+1} a_{i+1} - \ldots \lambda_k a_k$, умножив обе части этого равенства на λ_i^{-1}, получим, что a_i есть линейная комбинация остальных векторов. □

Лемма 10. *Если система векторов $a_1, \ldots, a_n$ линейно независима, а система векторов $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ линейно зависима, то a_{n+1} является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_n$.*

Доказательство. аналогично доказательству предыдущей леммы, с тем лишь замечанием, что если $\lambda_{n+1} = 0$, то ненулевой коэффициент λ_i находится среди первых n скаляров, но тогда первые n векторов линейно зависимы, что противоречит предположению. □

Лемма 11. *Пусть дана линейно независимая система векторов $e_1, \ldots, e_n$ и пусть существует линейно независимая система векторов $f_1, \ldots, f_m \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, тогда $m \leqslant n$.*

лин. комб.

Доказательство. Пусть $f_i = a_{i1} e_1 + \ldots + a_{in} e_n$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$. Т.к. $f_1, \ldots, f_m$ — линейно независимая система векторов, то

$$x_1 f_1 + \ldots + x_m f_m = 0 \Longleftrightarrow x_1 = \ldots = x_m = 0. \quad (1)$$

$(x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{K})$

Подставляя в линейную комбинацию из (1) выражение f_i через $e_1, \ldots, e_n$, получаем:

перегруппир.

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(a_{11} e_1 + \ldots a_{1n} e_n) + \ldots + x_m(a_{m1} e_1 + \ldots + a_{mn} e_n) = \\ &= \underbrace{(x_1 a_{11} + \ldots + x_m a_{m1})} e_1 + \ldots + \underbrace{(x_1 a_{1n} + \ldots + x_m a_{mn})} e_n, \end{aligned}$$

что равносильно (т.к. $e_1, \ldots, e_n$ — линейно независимая система векторов) системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + \ldots + x_m a_{m1} = 0 \\ \ldots \\ x_1 a_{1n} + \ldots + x_m a_{mn} = 0. \end{cases}$$

Если $m > n$, то эта система имеет ненулевое решение, что противоречит (1). □

Размерность

Определение 12. Определим *ранг* системы векторов: пусть S - непустая система векторов в некотором линейном пространстве V, тогда:

1) если S состоит только из $0 \in V$, то ранг $r(S) := 0$;

2) пусть e_1 — произвольный ненулевой вектор из системы S; если существует такой вектор e_2, что система $\{e_1, e_2\}$ будет линейно независимой, то рассмотрим эту систему векторов; если, далее, существует такой вектор e_3, что система $\{e_1, e_2, e_3\}$ будет линейно независимой, то будем рассматривать эту систему векторов, и т.д.;

3а) если процедура в п.2) закончится на конечном шаге, т.е. мы дойдем до линейно независимой системы векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$ и далее уже нельзя будет найти вектор e_{n+1}, чтобы расширить эту систему, то определим ранг как $r(S) := n$;

3б) если процедура в п.2) не закончится на конечном шаге, то ранг $r(S) := \infty$.

Докажем, что наше определение корректно. Сначала предположим, что, действуя, как в п.2), двумя способами, мы получили две конечные системы векторов $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_m$, и пусть $m \neq n$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $m > n$. Но, т.к. по определению к системе векторов $e_1, \dots, e_n$ больше нельзя добавить ни одного вектора, то все $f_i \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, $i = 1, \dots, m$, и по лемме 11 имеем $m \leqslant n$. Получили противоречие.

Теперь предположим, что один способ нам дал конечную систему векторов $e_1, \dots, e_n$, а второй способ выбора векторов $f_1, f_2, \dots$ не заканчивается ни на каком конечном шаге. Но тогда система векторов $f_1, \dots, f_{n+1}$ линейно независима, и еще одно применение леммы 11 дает противоречие.

$S = V$ $\qquad$ $n+1 \leq n.$

Определение 13. *Размерность* линейного пространства V равна $\dim V := r(V)$. Пространство V называется *конечномерным*, если $\dim V < \infty$. В противном случае пространство называется *бесконечномерным*.

Примеры бесконечномерных векторных пространств: множество $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$, пространство непрерывных функций на отрезке (докажите), пр-во многочленов.

Определение 14. Линейно независимая система векторов в пространстве V называется *максимальной*, если при добавлении любого другого вектора система векторов становится линейно зависимой.

$\vec{e_1}$ $\qquad$ $e_2 \nearrow \rightarrow e_1$ — макс. на плоск.

Следствие 15. *В любом конечномерном пространстве существует максимальная (линейно независимая) система векторов.*

$e_1, .., e_n$ любой новый вектор есть лин. комб. этих

Следствие 16. *Если векторы $v_1, \dots, v_n$ составляют базис линейного пространства V, то любой вектор $v \in V$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов единственным образом.*

Определение 17. Максимальная система векторов называется *базисом* пространства.

Бесконечномерные пространства мы почти не будем рассматривать в нашем курсе и все следующие определения, леммы и теоремы относятся к случаю конечномерных пространств. Полезным упражнением является проверка истинности таких утверждений в бесконечномерном случае (иногда сложно даже переформулировать конечномерные утверждения)

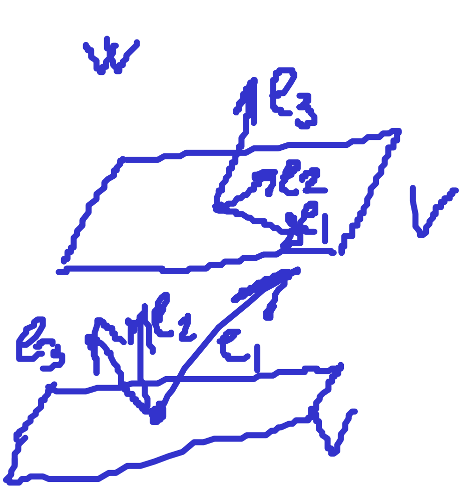
Лемма 18. *Пусть дано подпространство V некоторого* конечномерного *векторного пространства W, и пусть $e_1, \dots, e_r$ — базис в V. Тогда его можно дополнить до базиса всего пространства.*

Доказательство. Т.к. $e_1, \dots, e_r$ — базис, то эти векторы линейно независимы; тогда, просто проделав процедуру п.2) в определении ранга системы векторов, мы получим базис всего пространства. □

Лемма 19. *Если V — подпространство векторного пространства W, то $\dim V \leqslant \dim W$. Если же $\dim V = \dim W$, то $V = W$.*

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что количество векторов в базисе подпространства не превышает количества векторов в базисе всего пространства, отсюда вытекает первое утверждение леммы. Докажем второе утверждение. Пусть $V \neq W$, т.е. существует вектор $w \in W$, $w \notin V$. Выберем базис $e_1, \dots, e_r$ в V. Тогда система векторов $e_1, \dots, e_r, w$ будет линейно независимой в W, что невозможно, т.к. $\dim W = r$. Действительно, если $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \lambda v = 0$ и хотя бы один из коэффициентов не равен нулю, то $\lambda \neq 0$ (противоречие с тем, что $e_1, \dots, e_r$ — базис в V), но тогда вектор w есть линейная комбинация векторов $e_1, \dots, e_r$, что противоречит предположению. □

Замечание: второе утверждение леммы неверно в бесконечномерном случае.



если взять произвольн. базис в W, то скорее всего, вектора этого базиса не лежат в V

если $e_1, \dots, e_r, w$ лин. зав., то $\exists \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}}_{\text{хотя бы одно ненул.}} \in K$

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} w = 0$

если $\lambda_{r+1} \neq 0$, то w - лин. комб. $e_1, \dots, e_r$ - против. с $w \notin V$

если $\lambda_{r+1} = 0$, то противореч. с лин. нез. $e_1, \dots, e_r$.

Теорема 20. *Пусть V — подпространство векторного пространства W, тогда*

$$\dim V + \dim W/V = \dim W.$$

r $\quad$ n

нужно док., что $\dim W/V = n - r$.

Доказательство. Пусть $\dim V = r$, $\dim W = n$. Выберем произвольный базис $e_1, \ldots, e_r$ в V и дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n$ в W. Докажем, что $e_{r+1} + V, \ldots, e_n + V$ будет базисом в W/V.

1) докажем линейную независимость этой системы векторов в W/V. Пусть они линейно зависимы, тогда существуют не все равные нулю $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, т.ч.

$$\lambda_{r+1}(e_{r+1} + V) + \ldots + \lambda_n(e_n + V) = 0 + V.$$

– это 0 в W/V

Раскрыв скобки, получим $(\lambda_{r+1}e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n) + V = 0 + V$, поэтому существует такой вектор $v \in V$, что $v = \lambda_{r+1}e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n$. Но, поскольку $v \in V$, его можно представить в виде $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r$. Тогда получаем, что $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r - \lambda_{r+1}e_{r+1} - \ldots - \lambda_n e_n = 0$, нетрив то есть, система векторов $e_1, \ldots, e_n$ линейно зависима, что неверно, так как это базис в W.

$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r = \lambda_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n$

2) Докажем теперь, что любой вектор из W/V является линейной комбинацией векторов $e_{r+1} + V, \ldots, e_n + V$. Возьмем произвольный вектор $a + V$ из фактор-пространства W/V. Т.к. $a \in W$, то $a = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1}e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n$. Тогда

$a_1 + V = a_2 + V \Leftrightarrow a_1 - a_2 \in V$

$$\begin{aligned} a + V &= \underbrace{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r}_{\in V} + \lambda_{r+1}e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n + V = \\ &= \lambda_{r+1}e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n + V = \lambda_{r+1}(e_{r+1} + V) + \ldots + \lambda_n(e_n + V), \end{aligned}$$

$a_1 + V$ $\quad$ $a_2 + V$

Таким образом, $e_{r+1} + V, \ldots, e_n + V$ является базисом в W/V и, следовательно, $\dim W/V = n - r$. Отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

W лин. пр-во $\quad$ $V \subset W$ лин. подпр

$a + V$ – лин. подмн.

= на множестве всех лин. подмногообр.

Задаём $+$ и $\cdot$