Докажем перестановочность u с g. Пусть матрица оператора u в базисе $a_1, \ldots, a_n$ имеет вид $A_u = \begin{pmatrix} u_1^1 & \ldots & u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^n & \ldots & u_n^n \end{pmatrix}$ (в этом базисе матрицы операторов f и g имеют диагональный вид). Тогда

$$A_{uf} = A_u A_f = \begin{pmatrix} u_1^1 & \ldots & u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^n & \ldots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^1 & \ldots & \lambda_n u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 u_1^n & \ldots & \lambda_n u_n^n \end{pmatrix},$$

аналогично, $A_{fu} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^1 & \ldots & \lambda_1 u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n u_1^n & \ldots & \lambda_n u_n^n \end{pmatrix}$. Перестановочность u с f означает, что

$$\lambda_i u_i^j = \lambda_j u_i^j \forall i, j. \qquad (1)$$

Точно так же получаем, что

$$A_{ug} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} u_1^1 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\lambda_1} u_1^n & \ldots & \sqrt{\lambda_n} u_n^n \end{pmatrix}, \qquad A_{gu} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} u_1^1 & \ldots & \sqrt{\lambda_1} u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\lambda_n} u_1^n & \ldots & \sqrt{\lambda_n} u_n^n \end{pmatrix}.$$

Из равенства (1) следует, что $\sqrt{\lambda_i} u_i^j = \sqrt{\lambda_j} u_i^j$ для всех i, j, т.е. $ug = gu$. □

Единственный неотрицательный квадратный корень из неотрицательного оператора f мы будем обозначать $f^{1/2}$.

Лемма 28. *Оператор f неотрицателен тогда и только тогда, когда $f = h^* h$ для некоторого оператора h.*

Доказательство.
Если f неотрицателен, то в качестве оператора h можно взять квадратный корень из f.
Если $f = h^* h$, то $f^* = (h^* h)^* = h^* (h^*)^* = h^* h = f$, т.е. f — самосопряженный. Для любого вектора a имеем $(fa, a) = (h^* h a, a) = (ha, ha) \geqslant 0$, следовательно, f — неотрицательный. □

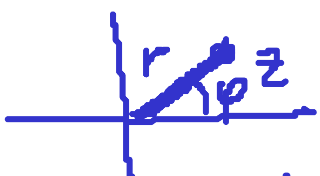
Определение 29. Оператор f называется *положительным*, если он неотрицателен и обратим.

Для любого положительного оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна, причем на диагонали стоят положительные числа. $\leftrightarrow (a, fb)$

Лемма 30. *Если оператор $f : V \to V$ положителен, то формула $\langle a, b \rangle := (fa, b)$, где $a, b \in V$, задает (новое) скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в евклидовом/эрмитовом пространстве V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.*

Доказательство. Проверим необходимые условия скалярного произведения:
1) линейность очевидна, т.к. оператор f линейный и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ также линейно;
2) симметричность следует из самосопряженности f;
3) положительная определенность: $\langle a, a \rangle \geqslant 0$, т.к. $\langle a, a \rangle = (fa, a) = (g^2 a, a) = (ga, ga) \geqslant 0$, где g — неотрицательный квадратный корень из f. Причем оператор g положителен, поскольку обратим (иначе $f = g^2$ был бы необратим). Равенство $\langle a, a \rangle = 0$ эквивалентно $(ga, ga) = 0$, или $ga = 0$, но из обратимости g отсюда вытекает $a = 0$. □

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$



$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$

Полярное разложение операторов

На примере комплексных чисел мы знаем, что они допускают так называемое полярное разложение — разложение в виде $z = r \cdot e^{i\varphi}$, где $r \geqslant 0$ — вещественное число, и $|e^{i\varphi}| = 1$. Оказывается, что подобным образом можно раскладывать и линейные операторы.

Теорема 31 (о полярном разложении)**.** *Для любого оператора $f : W \to W$ существует разложение в произведение двух операторов $f = uh$, где u — унитарный (или ортогональный), а h — неотрицательный. Причем оператор h определен однозначно, а если f обратим, то и u определен однозначно.*

Доказательство.
Доказательство приведем только для случая, когда f обратим.
Существование. Т.к. f обратим, то и f^* обратим, а, следовательно, и f^*f обратим. Более того, f^*f — неотрицательный, следовательно, он положительный. Пусть $h = (f^*f)^{1/2}$, тогда h — неотрицательный и обратимый, т.к. $h^2 = f^*f$, т.е. существует самосопряженный (и даже положительный) оператор h^{-1}. Рассмотрим оператор $u = fh^{-1}$. Тогда $u^* = (h^{-1})^* f^* = h^{-1}f^*$ и $u^*u = h^{-1}f^*fh = h^{-1}h^2h^{-1} = id$, следовательно, u — унитарный (или ортогональный) оператор. Мы получили искомое разложение $f = uh$.
Единственность. Пусть $f = uh = vk$, где u, v — унитарные (ортогональные), а h, k — неотрицательные операторы. Тогда имеем $h^2 = f^*f = (vk)^*vk = k^*v^*vk = k^*k = k^2$, т.е. h и k — это неотрицательные квадратные корни из f^*f, следовательно, $k = h$ (здесь мы не пользуемся обратимостью f), и, значит, $u = v = fh^{-1}$.

Канонический вид матрицы нормального оператора

Определение 32. *Оператор f называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряженным, т.е. $ff^* = f^*f$.*

Самосопряженные, кососимметрические, ортогональные и унитарные операторы являются нормальными. Жорданова клетка задает оператор, который не является нормальным.

Теорема 33. *Оператор f, действующий в эрмитовом пространстве W, является нормальным тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица диагональна.*

Доказательство. Если в некотором ортонормированном базисе матрица оператора f диагональна, $A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то матрица сопряженного оператора имеет в том же базисе вид $A_{f^*} = \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \bar\lambda_n \end{pmatrix}$. Так как $A_f A_{f^*} = A_{f^*} A_f$, то $f^*f = ff^*$.

$f^*v = w$

$f(w) = \lambda \cdot w$

$w \in V_\lambda$

Теперь перейдем к доказательству существования ортонормированного базиса, в котором матрица нормального оператора диагональна. Пусть λ — собственное значение оператора f, $V_\lambda = \{v \in W : fv = \lambda v\} \subset W$ - подпространство собственных векторов, отвечающих λ. Подпространство V_λ, очевидно, инвариантное относительно f, будет инвариантно также относительно f^*. Действительно, возьмем произвольный $v \in V_\lambda$. Тогда $f^*fv = f^*\lambda v = \lambda f^*v$, но с другой стороны, $f^*fv = ff^*v$, поэтому $f(f^*v) = \lambda f^*v$, следовательно, вектор f^*v является собственным, отвечающим тому же собственному значению λ, поэтому $f^*v \in V_\lambda$, что и доказывает инвариантность V_λ относительно f^*.

$f(V_\lambda)\subset V_\lambda,\ f(V_\lambda^\perp)\subset V_\lambda^\perp;\ f^*(V_\lambda)\subset V_\lambda,\ f^*(V_\lambda^\perp)\subset V_\lambda^\perp$

Мы знаем, что, если подпространство инвариантно относительно f, то ортогональное дополнение инвариантно относительно f^*. Т.к. V_λ инвариантно относительно обоих операторов f и f^*, то и $V_\lambda^\perp$ будет инвариантно относительно обоих операторов.

Доказательство теоремы проведем по индукции (по размерности пространства) точно так же, как и в предыдущих теоремах о приведении к диагональному виду. Возьмем инвариантное подпространство V_λ, тогда в подходящем ортонормированном базисе матрица оператора f имеет блочный вид $A_f = \left(\begin{array}{c|c} \lambda E & 0 \\ \hline 0 & \star \end{array}\right)$. Ограничения оператора f на V_λ и $V_\lambda^\perp$ тоже нормальны, следовательно (по предположению индукции) эти блоки диагональны в подходящих базисах, следовательно, и вся матрица диагональна.

Отдельно надо рассмотреть случай, когда $V_\lambda = W$. В этом случае $f = \lambda \cdot id$, и его матрица в любом базисе диагональна.

$A_f = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ □

Лемма 34. *Пусть f — нормальный оператор, а оператор g коммутирует с f. Тогда g коммутирует и с f^*.*

Доказательство. Запишем матрицы всех трех операторов в ортонормированном базисе, в котором матрица оператора f диагональна:

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A_{f^*} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Коммутирование операторов равносильно коммутированию их матриц. Условие коммутирования A_f и A_g можно записать в виде $a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, а условие коммутирования A_{f^*} и A_g имеет вид $a_{ij}(\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j) = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Если $a_{ij} \neq 0$, то условие $\lambda_i - \lambda_j = 0$ равносильно условию $\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j = 0$.

□

Одновременное приведение двух коммутирующих нормальных операторов к каноническому виду

Теорема 35. *Пусть f и g — нормальные операторы в эрмитовом пространстве W. Ортонормированный базис, в котором матрицы обоих операторов диагональны, существует тогда и только тогда, когда f и g коммутируют.*

Доказательство. Если требуемый базис существует, то операторы коммутируют, т.к. коммутируют их матрицы в этом базисе. Обратно, предположим, что $fg = gf$. Тогда $fg^* = g^*f$. Пусть $V_\lambda = \{v \in W : fv = \lambda v\}$ — собственное подпространство. Мы уже знаем, что оно инвариантно для f, и его ортогональное дополнение $V_\lambda^\perp$ — тоже (т.к. V_λ инвариантно для f^*).

Пусть $v \in V_\lambda$. Поскольку $fg = gf$, $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$, т.е. $g(v) \in V_\lambda$, т.е. V_λ инвариантно для g. Аналогично, поскольку $fg^* = g^*f$, подпространство V_λ инвариантно также для g^*, откуда следует, что $V_\lambda^\perp$ инвариантно для g. Итак, V_λ и $V_\lambda^\perp$ инвариантны как для f, так и для g. Это позволяет доказать утверждение по индукции. База (в размерности 1) очевидна. Для индукционного перехода заметим, что если взять в качестве базиса W объединение ортонормированных базисов V_λ и $V_\lambda^\perp$, то матрицы операторов f и g будут иметь вид $A_f = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ и $A_g = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$, где матрицы B_1, C_1 — матрицы ограничения операторов на V_λ, а B_2, C_2 — матрицы ограничения операторов на $V_\lambda^\perp$. Ограничения нормальных операторов на инвариантные (для самого оператора и для его сопряженного) подпространства являются также нормальными, поэтому для них по предположению индукции теорема верна.

Отдельно надо рассмотреть случай, когда $V_\lambda = W$. В этом случае $f = \lambda \cdot id$, и его матрица в любом базисе диагональна. В качестве искомого базиса возьмем тот, в котором матрица оператора g диагональна.

$\square$

Точно так же доказывается аналогичное утверждение о самосопряженных операторах в евклидовых пространствах:

Теорема 36. *Пусть f и g — самосопряженные операторы в евклидовом пространстве W. Ортонормированный базис, в котором матрицы обоих операторов диагональны, существует тогда и только тогда, когда f и g коммутируют.*

Доказательство. Самосопряженные операторы в евклидовом пространстве обладают собственными векторами (а больше от эритовых пространств ничего и не нужно для доказательства предыдущего утверждения).

$\square$

$$h \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \underline{\lambda_k > 0.}$$

$$h^{-1} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

пол. оператор

поларных разложений 2. | 2) f = неотр. · (унит./ортог.)

1.) f = (унит./ортог.) · неотрицат.

$f^* f$ $\qquad f f^*$ $\qquad h = (f f^*)^{1/2}$

$\underline{f = h \cdot v}$ $\qquad v$ – унит./ортог.

$v = h^{-1} f$ –

$v v^* \overset{?}{=} \mathrm{id}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1-\lambda_n)a_{1n}=0$$

$$(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}=0 \quad \forall i,j$$

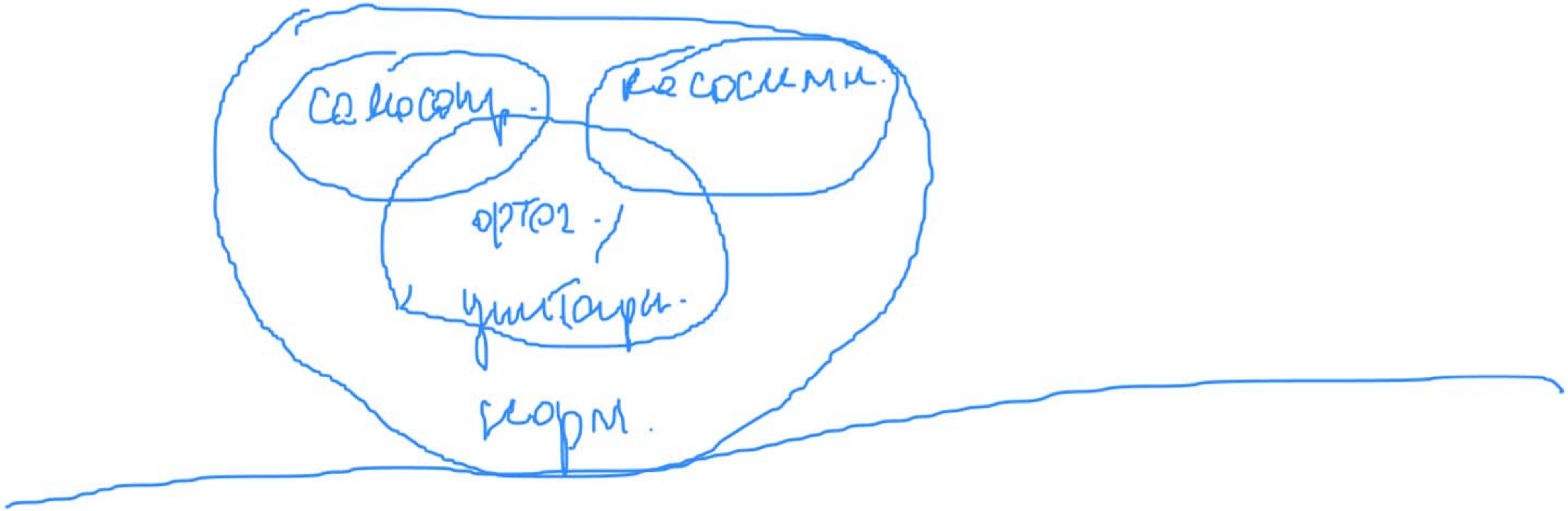
$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_1 a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_n a_{n1} & \cdots & \lambda_n a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_n a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1 a_{n1} & \cdots & \lambda_n a_{nn}\end{pmatrix}$$

1 индекс
Лин. пр-ва
Двойств. пр-ва
Евкл. и Эрм. пр-ва

2 инд.
Билин. (квадр., полуторалин.) ф-ии.
Операторы (Жорд. форма)
Операторы в евкл. и эрмит. пр-вах

Тензоры.


самосопр.
кососимм.
ортог./
унитарн.
норм.

vladimir.manuilov@gmail.com

$$h \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \underline{\lambda_k > 0.}$$

$$h^{-1} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

пол. оператор

полярных разложений 2. | 2) f = неотр. · (унит./ортог.)

1.) f = (унит./ортог.) · неотрицат.

$f^* f \qquad f f^* \qquad h = (f f^*)^{1/2}$

$\underline{f = h \cdot v}$ $\qquad v$ – унит./ортог.

$v = h^{-1} f$ –

$v v^* \overset{?}{=} \mathrm{id}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(\lambda_1 - \lambda_n) a_{1n} = 0$

$$(\lambda_i - \lambda_j) a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

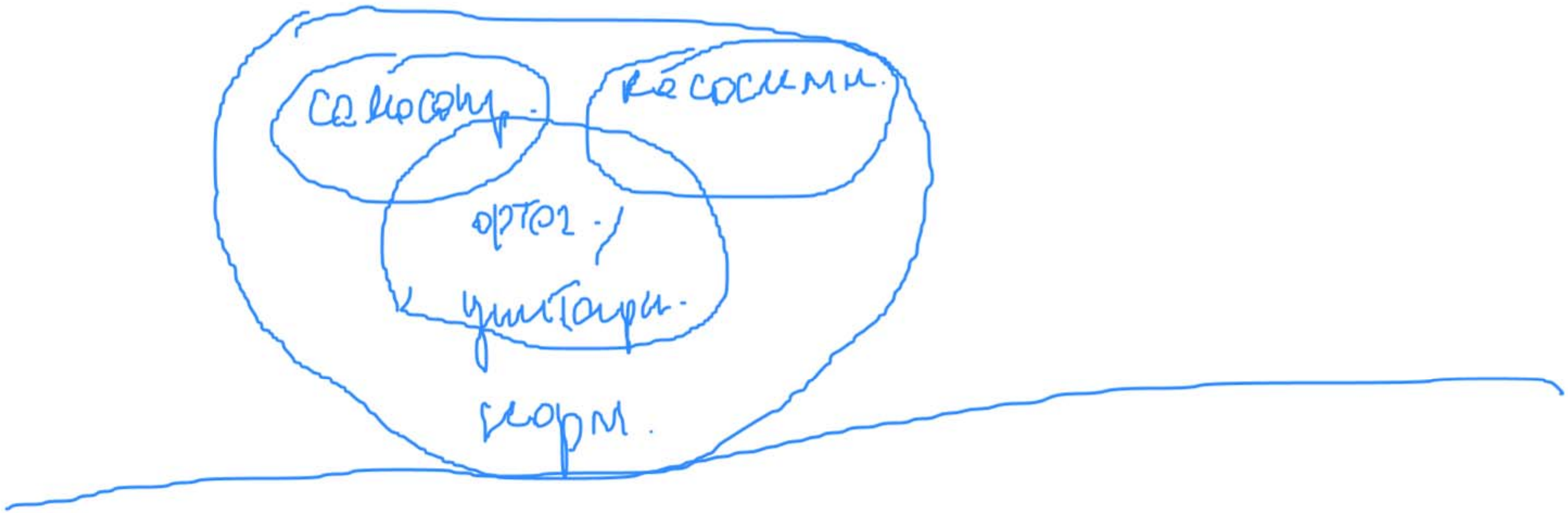
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

1 индекс
- Лин. пр-ва
- Двойств. пр-ва
- Евкл. и Эрм. пр-ва

2 инд.
- Билин. (квадр., полуторалин.) ф-ии.
- Операторы (Жорд. форма)
- Операторы в евкл. и эрмит. пр-вах

$\boxed{\text{Тензоры.}}$


самосопр.
кососимм.
ортог./
унитарн.
норм.

vladimir.manuilov@gmail.com

$$h \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \underline{\lambda_k > 0}.$$

$$h^{-1} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

пол. оператор

полярных разложений 2.

1.) $f =$ (унит./ортог.) $\cdot$ неотрицат.

2) $f =$ неотр. $\cdot$ (унит./ортог.)

$f^* f$ $\qquad f f^*$ $\qquad h = (f f^*)^{1/2}$

$\underline{f = h \cdot v}$ $\qquad v$ – унит./ортог.

$v = h^{-1} f$ –

$v v^* \overset{?}{=} id$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1-\lambda_n)a_{1n}=0$$

$$(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}=0 \quad \forall i,j$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

1 индекс

Лин. пр-ва

Двойств. пр-ва

Евкл. и Эрм. пр-ва

2 инд.

Билин. (квадр., полуторалин.) ф-ии.

Операторы (Жорд. форма)

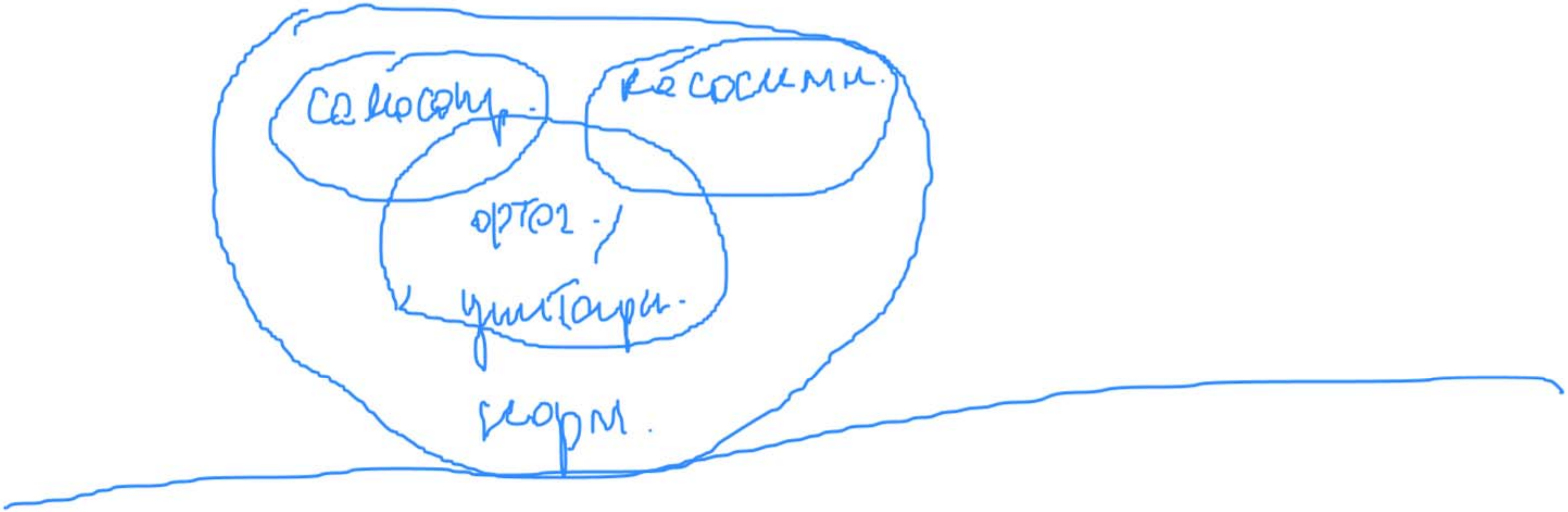
Операторы в евкл. и эрмит. пр-вах

$\boxed{\text{Тензоры.}}$

( )

⟨ ⟩

( )


самосопр.
кососимм.
ортог./
унитарн.
норм.

vladimir.manuilov@gmail.com