

Тензоры. Пространство тензоров

Пусть нам задано векторное пространство V (над полем $\mathbb{K}$), и пусть V' — двойственное пространство. Возьмем произведение p экземпляров пространства V и q экземпляров пространства V' и рассмотрим функцию

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V' \times \dots \times V'}_q \rightarrow \mathbb{K},$$

т.е. T — функция от p векторов и q линейных функций, принимающая значения в $\mathbb{K}$. Такая функция называется **полилинейной**, если она линейна по каждому аргументу при фиксированных остальных аргументах, т.е. если выполняются равенства:

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v'_i + v''_i, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q) &= T(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q) + \\ &+ T(v_1, \dots, v''_i, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q), \\ T(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q) &= \lambda T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q), \\ T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f'^j + f''^j, \dots, f^q) &= T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f'^j, \dots, f^q) + \\ &+ T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f''^j, \dots, f^q), \\ T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, \lambda f^j, \dots, f^q) &= \lambda T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^j, \dots, f^q). \end{aligned}$$

Определение 1. **Тензором** называется полилинейная функция. Тензор типа (p, q) — это полилинейная функция от p векторов из V и от q линейных функций из V' . Тензором типа $(0, 0)$ называют **скаляры**.

Примеры:

- 1) скаляры — это тензоры типа $(0, 0)$ по определению;
- 2) векторы — это тензоры типа $(0, 1)$, т.к. любой вектор задает линейную функцию на V' переводящую элемент $f \in V'$ в $f(v) \in \mathbb{K}$;
- 3) линейные функции — это тензоры типа $(1, 0)$, т.к. они задают отображение $f : V \rightarrow \mathbb{K}$, переводя вектор $v \in V$ в элемент $f(v) \in \mathbb{K}$;
- 4) билинейные функции — это тензоры типа $(2, 0)$, т.к. они задают отображение $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

5) **линейные операторы** — это тензоры типа $(1, 1)$, этот пример мы обсудим позже.

Отметим, что в силу канонического изоморфизма $V \cong V''$ роль векторного пространства V и его двойственного пространства V' в определении тензора симметричны.

Множество тензоров типа (p, q) мы будем обозначать Θ_p^q . На этом множестве можно ввести структуру линейного пространства, для этого нужно определить операции сложения двух тензоров и их умножения на скаляры. Пусть $T, S \in \Theta_p^q$, тогда:

$$\begin{aligned} (T + S)(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q) &:= T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q) + \\ &+ S(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q); \\ (\lambda T)(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q) &:= \lambda T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q). \end{aligned}$$

Легко проверить выполнение всех аксиом линейного пространства и убедиться, что множество Θ_p^q действительно будет линейным пространством.

Можно также определить операцию умножения тензоров (разных типов) друг на друга. Пусть $T \in \Theta_p^q$, $S \in \Theta_r^t$, тогда новый тензор $T \otimes S \in \Theta_{p+r}^{q+t}$ опреляется по формуле

$$\begin{aligned} (T \otimes S)(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+r}, f^1, \dots, f^q, f^{q+1}, \dots, f^{q+t}) &:= \\ := T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q) \cdot S(v_{p+1}, \dots, v_{p+r}, f^{q+1}, \dots, f^{q+t}). \end{aligned}$$

Так определенное умножение тензоров дистрибутивно (т.е. $(T + \lambda S) \otimes R = T \otimes R + \lambda S \otimes R$), ассоциативно (т.е. $(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R)$), но не коммутативно.

Примеры:

1) произведение вектора $v \in V$ и линейной функции $f \in V'$ — тензор $v \otimes f \in \Theta_1^1$. Посмотрим, как этот тензор действует на своих аргументах. Возьмем произвольный вектор $a \in V$ и функцию $h \in V'$, получим, что $(v \otimes f)(a, h) = h(v) \cdot f(a)$.

2) возьмем две линейные функции $g, h \in V'$, тогда $g \otimes h$ будет тензором типа $(2, 0)$ (т.е. билинейной функцией), $(g \otimes h)(v_1, v_2) = g(v_1) \cdot h(v_2)$.

$$h(v) = \varphi_v(h)$$

Координатное определение тензоров

Перейдем теперь к координатному описанию тензоров. Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ в пространстве V , ему будет соответствовать двойственный базис $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ в двойственном пространстве V' . Т.к. тензор — это полилинейная функция, то ее значение определяется значениями на базисных векторах, т.е.

$$T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q) = T(v_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, v_p^{i_p} e_{i_p}, f_{j_1}^1 \varepsilon^{j_1}, \dots, f_{j_q}^q \varepsilon^{j_q}) = \\ = v_1^{i_1} \cdot \dots \cdot v_p^{i_p} \cdot f_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot f_{j_q}^q \cdot T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_q}),$$

где $v_k^{i_k}$ — координаты вектора v_k , а $f_{j_j}^l$ — координаты линейной функции f^l .

Обозначим $T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_q}) = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \in \mathbb{K}$. Поэтому, зафиксировав базис, мы можем поставить тензору T в соответствие набор чисел $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$ — его значения на базисных векторах. Естественно, этот набор чисел будет зависеть от выбора базиса. Посмотрим, как изменяются эти числа при переходе от одного базиса к другому. Пусть мы перешли от базиса e_i к базису $\tilde{e}_i$, и $C = (c_i^k)$ — матрица перехода, т.е. $\tilde{e}_i = c_i^k e_k$. Тогда двойственный базис ε^i тоже сменится на $\tilde{\varepsilon}^i$, причем матрица перехода $D = (d_k^i) = C^{-1}$, $d_k^j c_i^k = \delta_i^j$, т.е. $\tilde{\varepsilon}^i = d_k^i \varepsilon^k$. Тогда

$$\tilde{T}_{k_1, \dots, k_p}^{l_1, \dots, l_q} = T(\tilde{e}_{k_1}, \dots, \tilde{e}_{k_p}, \tilde{\varepsilon}^{l_1}, \dots, \tilde{\varepsilon}^{l_q}) = \\ = T(c_{k_1}^{i_1} e_{i_1}, \dots, c_{k_p}^{i_p} e_{i_p}, d_{j_1}^{l_1} \varepsilon^{j_1}, \dots, d_{j_q}^{l_q} \varepsilon^{j_q}) = \\ = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_q}) \cdot c_{k_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot c_{k_p}^{i_p} \cdot d_{j_1}^{l_1} \cdot \dots \cdot d_{j_q}^{l_q} = \\ = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \cdot c_{k_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot c_{k_p}^{i_p} \cdot d_{j_1}^{l_1} \cdot \dots \cdot d_{j_q}^{l_q}.$$

Примеры:

1) если x — вектор, то $\tilde{x}^k = d_i^k x^i$. Такой закон изменения координат называется *векторным законом*.

2) если f — линейная функция, то $\tilde{f}_k = c_k^i f_i$. Такой закон изменения координат называется *ковекторным законом*. А величины, изменяющиеся по ковекторному закону называются *ковекторами*. Таким образом, линейные функции (элементы пространства V') — это ковекторы.

Мы получили *тензорный закон изменения координат*:

$$\tilde{T}_{k_1, \dots, k_p}^{l_1, \dots, l_q} = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \cdot c_{k_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot c_{k_p}^{i_p} \cdot d_{j_1}^{l_1} \cdot \dots \cdot d_{j_q}^{l_q}.$$

Теперь мы можем дать другое (координатное) определение тензору: тензор — это набор чисел $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$, который при замене координат преобразуется по тензорному закону.

Это и предыдущее определения тензора эквивалентны, так как по такому набору чисел, пользуясь линейностью, можно восстановить полилинейную функцию T , для которой $T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_q}) = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$.

ли н. $\mathbb{F}$ -мод:

$$f: V \longrightarrow K$$

$e_1, \dots, e_n$ - базис в V

$$f(e_i) = f_i$$

$$f \longmapsto (f_1, \dots, f_n)$$

f переводит сумм в сумм, умнож. на числа - в умнож. на эти числа.

Билин. форма $g: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$.

линейность по каждому арг. при фиксир.
другом аргументе.

$e_1, \dots, e_n$ - базис

$$g \longmapsto (g_{ij})$$

$$g_{ij} = g(e_i, e_j)$$

$(V^1)'$ канонически изом. V .

$\uparrow$ пр-во лнн. ф-ии на V

$$v \in V$$

$$\varphi_v(f) = \underline{\underline{f(v)}}$$

$$f \in V^1$$

$$V \times V^1 \rightarrow K$$

$$(\varphi_v)(f)$$



базис.



днк. ф-ии

$$\underbrace{v} \quad \underbrace{f}$$

$$f(v)$$

$$v \in V, f, g \in V^1.$$

v функ. $f \mapsto f(v)$ — функ. на V'

$$v \mapsto \psi_v \in (V')^*$$

$$V \rightarrow V''$$

$$\psi \mapsto \psi_v$$

$$\psi_v(f) = \text{value } f(v)$$

ψ_v — функ. на V'

$$v \mapsto f(v)$$

$$V \text{ и } V'$$

равноправны

$$f \mapsto \psi_v(f)$$

Такая двойственность между V и V'

позволяет читать векторы лев. и прав. элементов V' .

Вект.-функторы $V' \rightarrow K$.

$f(x)$ $g(y)$

$$f \otimes g(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\begin{array}{l} x, y, z \in V \\ \text{или } V' \end{array}$$

$\underline{f(x)}, \underline{g(y)}$

$$\underline{f \otimes g(x, y, z) = f(y)g(y, z)}$$

$$T(\underbrace{v_1, v_2}_v; f) \\ S(v; f^1, f^2)$$

$$T \otimes S(\underbrace{v_1, v_2, v_3}_v; f^1, f^2, f^3) =$$

$$= T(v_1, v_2; f^1) \cdot S(v_3; f^2, f^3)$$

$$S \otimes T(v_1, v_2, v_3; f^1, f^2, f^3) = S(v_1; f^1, f^2) \cdot T(v_2, v_3; f^3)$$

$e_1, \dots, e_n$ - базис V

базиса $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

норм. р-ун

$(f_1, \dots, f_n)$

$\begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix}$

симм. р-ун

$e_1, \dots, e_n$ — базис V

$\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ — двойств. базис в V^1

$$\varepsilon^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Если n — количество базиса в V , то n — количество двойств. базиса.

$$v = \underbrace{v^1 e_1 + \dots + v^n e_n}_{\text{коорд.}} = \underbrace{v^i}_{\text{верхн. индексом}} e_i$$

коорд. — верхн. индексом;

а вектора — нижн. $f = f_i e^i$

$$f = f_1 e^1 + \dots + f_n e^n \quad e^1, \dots, e^n - \text{результат}$$

коорд. $(f_1, \dots, f_n)$ — нижн. Φ -ич. — верхн.

τ -ф-ия от $v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q$

на каждом месте v_i нужно поставить
каждый из базисных векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$\begin{array}{ccc} v_1 & \longmapsto & e_{i_1} \\ \hline v_p & \longmapsto & e_{i_p} \end{array}$$

$i_1, \dots, i_p$ - каждый
из них пробегает
 $1, \dots, n$

$$g(e_i, e_j) = g_{ij}$$

$$g(x, y)$$

$\nearrow$ $\nearrow$
 e_i e_j

$$\begin{pmatrix} i \rightarrow i_1 \\ j \rightarrow i_2 \end{pmatrix}$$

$$T(v_1, \dots, v_p; f^1, \dots, f^q)$$

$$i_k - \text{индекс}$$

$$g(v_1, v_2) = g(v_1^1 e_1 + \dots + v_1^n e_n, v_2^1 e_1 + \dots + v_2^n e_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n v_1^i v_2^j g(e_i, e_j) \right)$$

n^2 слагаемых

$$T(v_1, v_2) = v_1^{i_1} v_2^{i_2} T(e_{i_1}, e_{i_2}) \quad n^2 \text{ char.}$$

$$(i_j) \quad (i_1, i_2) \quad \hookrightarrow \sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \dots \left(\sum_{i_p=1}^n \dots \right) \right)$$

$$T(v_1, \dots, v_p) = v_1^{i_1} \dots v_p^{i_p} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

$$T(v_1, \dots, v_p; f^1, \dots, f^q) = n^p \text{ char.} \quad n^{p+q}$$

$$c_i^l d_i^l$$

$$\underline{(CD)}_k^l = \underline{c_i^l d_k^l} = \begin{cases} 1, & l=k \\ 0, & l \neq k. \end{cases}$$

$$C = (c_i^j) \quad D = (d_i^j)$$

$$D = C^{-1}$$

$$\underline{CD = \underline{E}}$$

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^1 & \dots & d_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ d_1^n & \dots & d_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 d_1^1 & c_1^1 d_2^1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

C — матрица пер

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \text{ где } D = C^{-1}.$$

$$T(v_1, v_2) = (2, 0)$$

$$T(e_{i_1}, e_{i_2}) = T_{i_1 i_2}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{i_1 i_2} &= T(\tilde{e}_{i_1}, \tilde{e}_{i_2}) = \\ &= T(c_{i_1}^{j_1} e_{j_1}, c_{i_2}^{j_2} e_{j_2}) = \end{aligned}$$

$$= c_{i_1}^{j_1} c_{i_2}^{j_2} T(e_{j_1}, e_{j_2})$$

$$\tilde{T}_{i_1 i_2} = T_{j_1 j_2} c_{i_1}^{j_1} c_{i_2}^{j_2}$$

$$\tilde{G} = C^t G C$$

$$\tilde{g}_{ij} = c_i^k c_j^l g_{kl}$$

$$T \quad \text{rank}(3, 0)$$

$$\tilde{T}_{i_1 i_2 i_3} = T_{j_1 j_2 j_3} c_{i_1}^{j_1} c_{i_2}^{j_2} c_{i_3}^{j_3}$$

$$T \quad \text{rank}(0, 2)$$

$$T(\tilde{\varepsilon}^{i_1}, \tilde{\varepsilon}^{i_2}) = T(d_{k_1}^{i_1} \varepsilon^{k_1}, d_{k_2}^{i_2} \varepsilon^{k_2}) =$$

$$= d_{k_1}^{i_1} d_{k_2}^{i_2} T(\varepsilon^{k_1}, \varepsilon^{k_2})$$

$$\tilde{\varepsilon}^{i_1} \tilde{\varepsilon}^{i_2} = d_{k_1}^{i_1} d_{k_2}^{i_2} \varepsilon^{k_1} \varepsilon^{k_2}$$

(сумма по k_1 и k_2)

каждому базису сопоставляется
набор координат

$$(e_i) \xrightarrow{C} (\tilde{e}_i)$$

$$e_1, \dots, e_n \mapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} \quad \boxed{\tilde{x} = D x}$$

мин. ор-ми. — тоже набор координат для каждого
 базиса.
 $l_1, \dots, l_n$ $\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n$
 $(f_1, \dots, f_n)$ $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$

$$(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) = (f_1, \dots, f_n) \cdot C$$

$$\bar{f}_i = c_{ij} f_j$$

$$(E_1, \dots, E_n) \quad (\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ (g_{ij}) & \longleftrightarrow & (\tilde{g}_{ij}) \\ & \text{связан} & \end{array}$$

$$\tilde{g}_{ij} = C_i^k C_j^l g_{kl}$$

$$\tilde{T}_{i_1 i_2} = C_{i_1}^{k_1} C_{i_2}^{k_2} T_{k_1 k_2}$$

$$\begin{array}{l} \tilde{g}_{11} = C_1^k C_1^l g_{kl} \\ \tilde{g}_{12} = \dots \end{array}$$

$$n^2 \text{ параметров} \\ i, j = 1, \dots, n$$

$$\sim^1 \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{matrix} = T_{\substack{i_1 \\ j_1 j_2 j_3}}^{\substack{e \\ i_1}} d_{i_1}^1 \cdot c_{j_1}^1 \cdot c_{j_2}^{j_2} \cdot c_{j_3}^{j_3} \mid (g_{ij})$$

$$\begin{matrix} \textcircled{k_1 k_2 k_3} \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{matrix}$$

n^4 char

$$\sim^2 \begin{matrix} 5 & 4 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 1 \end{matrix} = T_{\substack{i_1 \\ j_1 j_2 j_3}}^{\substack{i_1 \\ j_1 j_2 j_3}} d_{i_1}^2 \cdot c_{j_1}^{j_1} \cdot c_{j_2}^{j_2} \cdot c_{j_3}^{j_3} \mid \frac{g(x,y)}{(x_1 \dots x_n)(G)} \mid \frac{y_1}{(y_1 \dots y_n)}$$

$g_{ij} = c_i^k c_j^l g_{kl}$