Так определенное умножение тензоров дистрибутивно (т.е. $(T+\lambda S)\otimes R = T\otimes R+\lambda S\otimes R$), ассоциативно (т.е. $(T\otimes S)\otimes R = T\otimes(S\otimes R)$), но не коммутативно.

Примеры:

1) произведение вектора $v\in V$ и линейной функции $f\in V'$ — тензор $v\otimes f\in\Theta^1_1$. Посмотрим, как этот тензор действует на своих аргументах. Возьмем произвольный вектор $a\in V$ и функцию $h\in V'$, получим, что $(v\otimes f)(a,h) = h(v)\cdot f(a)$.

2) возьмем две линейные функции $g,h\in V'$, тогда $g\otimes h$ будет тензором типа $(2,0)$ (т.е. билинейной функцией), $(g\otimes h)(v_1,v_2) = g(v_1)\cdot h(v_2)$.

Координатное определение тензоров

Перейдем теперь к координатному описанию тензоров. Зафиксируем базис $e_1,\dots,e_n$ в пространстве V, ему будет соответствовать двойственный базис $\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n$ в двойственном пространстве V'. Т.к. тензор — это полилинейная функция, то ее значение определяется значениями на базисных векторах, т.е.

$$T(v_1,\dots,v_p,f^1,\dots,f^q) = T(v_1^{i_1}e_{i_1},\dots,v_p^{i_p}e_{i_p},f^1_{j_1}\varepsilon^{j_1},\dots,f^q_{j_q}\varepsilon^{j_q}) =$$
$$= v_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot v_p^{i_p}\cdot f^1_{j_1}\cdot\ldots\cdot f^q_{j_q}\cdot T(e_{i_1},\dots,e_{i_p},\varepsilon^{j_1},\dots,\varepsilon^{j_q}),$$

где $v_k^{i_k}$ — координаты вектора v_k, а $f^l_{j_l}$ — координаты линейной функции f^l.

Обозначим $T(e_{i_1},\dots,e_{i_p},\varepsilon^{j_1},\dots,\varepsilon^{j_q}) = T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}\in\mathbb{K}$. Поэтому, зафиксировав базис, мы можем поставить тензору T в соответствие набор чисел $T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}$ — его значения на базисных векторах. Естественно, этот набор чисел будет зависеть от выбора базиса. Посмотрим, как изменяются эти числа при переходе от одного базиса к другому. Пусть мы перешли от базиса e_i к базису $\widetilde{e}_i$, и $C=(c_i^k)$ — матрица перехода, т.е. $\widetilde{e}_i = c_i^k e_k$. Тогда двойственный базис ε^i тоже сменится на $\widetilde{\varepsilon}^i$, причем матрица перехода $D=(d_k^i)=C^{-1}$, $d^j_k c^k_i = \delta^j_i$, т.е. $\widetilde{\varepsilon}^i = d^i_k\varepsilon^k$. Тогда

$$\widetilde{T}^{l_1,\dots,l_q}_{k_1,\dots,k_p} = T(\widetilde{e}_{k_1},\dots,\widetilde{e}_{k_p},\widetilde{\varepsilon}^{l_1},\dots,\widetilde{\varepsilon}^{l_q}) =$$
$$= T(c^{i_1}_{k_1}e_{i_1},\dots,c^{i_p}_{k_p}e_{i_p},d^{l_1}_{j_1}\varepsilon^{j_1},\dots,d^{l_q}_{j_q}\varepsilon^{j_q}) =$$
$$= T(e_{i_1},\dots,e_{i_p},\varepsilon^{j_1},\dots,\varepsilon^{j_q})\cdot c^{i_1}_{k_1}\cdot\ldots\cdot c^{i_p}_{k_p}\cdot d^{l_1}_{j_1}\cdot\ldots\cdot d^{l_q}_{j_q} =$$
$$= T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}\cdot c^{i_1}_{k_1}\cdot\ldots\cdot c^{i_p}_{k_p}\cdot d^{l_1}_{j_1}\cdot\ldots\cdot d^{l_q}_{j_q}.$$

Примеры:

1) если x — вектор, то $\widetilde{x}^k = d^k_i x^i$. Такой закон изменения координат называется *векторным* законом.

2) если f — линейная функция, то $\widetilde{f}_k = c^i_k f_i$. Такой закон изменения координат называется *ковекторным* законом. А величины, изменяющиеся по ковекторному закону называются *ковекторами.* Таким образом, линейные функции (элементы пространства V') — это ковекторы.

Мы получили *тензорный закон изменения координат:*

$$\widetilde{T}^{l_1,\dots,l_q}_{k_1,\dots,k_p} = T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}\cdot c^{i_1}_{k_1}\cdot\ldots\cdot c^{i_p}_{k_p}\cdot d^{l_1}_{j_1}\cdot\ldots\cdot d^{l_q}_{j_q}.$$

$$\widetilde{T}^{l_1 l_2}_{k_1 k_2} = T^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}\, d^{l_1}_{j_1} d^{l_2}_{j_2}\, C^{i_1}_{k_1} C^{i_2}_{k_2}$$

Теперь мы можем дать другое (координатное) определение тензору: тензор - это набор чисел $T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}$, который при замене координат преобразуется по тензорному закону.

Это и предыдущее определения тензора эквивалентны, так как по такому набору чисел, пользуясь линейностью, можно восстановить полилинейную функцию T, для которой $T(e_{i_1},\dots,e_{i_p},\varepsilon^{j_1},\dots,\varepsilon^{j_q}) = T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a^{n1} & \dots & a^{nn}\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$a_{ij} = a(e_i, e_j)$ $\qquad \tilde{a}_{kl} = c^i_k c^j_l a_{ij}$ $\qquad \tilde{A} = C^T A C$

Рассмотрим еще один пример — пример тензоров типа $(0,2)$. Пусть (a_{ij}) — матрица некоторой билинейной функции, или, что то же самое, тензор типа $(2,0)$. Предположим, что матрица (a_{ij}) обратима и обозначим элементы обратной матрицы через a^{ij}, т.е. $a^{ij}a_{jk} = \delta^i_k$.

Лемма 2. a^{ij} *является тензором типа* $(0,2)$*, т.е. этот набор чисел при переходе к другому базису изменяется по формуле* $\widetilde{a}^{kl} = a^{ij}d^k_i d^l_j$.

Доказательство. В новом базисе выполнено равенство $\widetilde{a}^{kl}\widetilde{a}_{lm} = \delta^k_m$. Подставим сюда $\widetilde{a}_{lm} = a_{ji}c^j_l c^i_m$, где $C = (c^i_m)$ — матрица перехода, тогда $\widetilde{a}^{kl}a_{ji}c^j_l c^i_m = \delta^k_m$. Умножим (и просуммируем по повторяющимся индексам) обе части этого равенства на элементы обратной матрицы к матрице перехода (напомним, что $c^k_i d^j_k = \delta^j_i$): $\widetilde{a}^{kl}a_{ji}c^j_l c^i_m d^m_p = \delta^k_m d^m_p$, т.е. $\widetilde{a}^{kl}a_{ji}c^j_l\delta^i_p = d^k_p$, или $\widetilde{a}^{kl}a_{jp}c^j_l = d^k_p$. Воспользуемся теперь обратимостью матрицы (a_{ij}), т.е. что $a_{jp}a^{pr} = \delta^r_j$. Умножив обе части предпоследнего равенства на a^{pr} (и просуммировав), получим $\widetilde{a}^{kl}a_{jp}a^{pr}c^j_l = a^{pr}d^k_p$, или $\widetilde{a}^{kl}c^r_l = a^{pr}d^k_p$. Еще раз умножив обе части равенства на d^n_r просуммировав по r и воспользовавшись тем, что $c^r_l d^n_r = \delta^n_l$ и $\widetilde{a}^{kl}\delta^n_l = \widetilde{a}^{kn}$, получим $\widetilde{a}^{kn} = a^{pr}d^k_p d^n_r$. ☐

Базис в пространстве тензоров

$e_1, \dots, e_n$ - базис в V $\qquad \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$

Построим базис в пространстве тензоров Θ^q_p. Векторы и ковекторы — это тензоры типа $(0,1)$ и $(1,0)$ соответственно. Рассмотрим произведение $\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}$, оно состоит из тензоров типа $(0,1)$ и тензоров типа $(1,0)$, следовательно само является тензором типа (p,q). Всего таких различных произведений получится n^{p+q}, т.к. из n ковекторов надо выбрать p и из n векторов надо выбрать q. Докажем, что эти элементы (произведения такого вида) образуют базис в Θ^q_p. Прежде, чем доказывать это, вычислим значение такого тензора (произведения) на наборах аргументов из базисных векторов:

$\lambda^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\, t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$

$$\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}(e_{k_1},\ldots,e_{k_p},\varepsilon^{l_1},\ldots,\varepsilon^{l_q}) =$$
$$= \varepsilon^{i_1}(e_{k_1})\cdot\ldots\cdot\varepsilon^{i_p}(e_{k_p})\cdot\varepsilon^{l_1}(e_{j_1})\cdot\ldots\cdot\varepsilon^{l_q}(e_{j_q}) =$$
$$= \delta^{i_1}_{k_1}\cdot\ldots\cdot\delta^{i_p}_{k_p}\cdot\delta^{l_1}_{j_1}\cdot\ldots\cdot\delta^{l_q}_{j_q} =$$
$$= \begin{cases} 1, & i_1 = k_1,\ldots,i_p = k_p, j_1 = l_1,\ldots,j_q = l_q,\\ 0, & \end{cases}$$

$\varepsilon^{l_q}(e_{j_q})$ $\quad \{v_{k_1},\dots,v_{k_p}\}$ $\quad f^{l_1}\dots f^{l_q}$

$\lambda^{ij} t_{ij} = \lambda^{11}t_{11} + \ldots \lambda^{nn} t_{nn}$

Лемма 3. *Множество произведений вида* $\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}$ *является базисом в* Θ^q_p.

Доказательство. Сначала докажем линейную независимость этих произведений. Пусть существуют такие числа $\lambda^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$, что линейная комбинация $\lambda^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}$. Применим этот тензор, как полилинейную функцию, к аргументам $e_{k_1},\ldots,e_{k_p},\varepsilon^{l_1},\ldots,\varepsilon^{l_q}$ и получим

$$\lambda^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}\underbrace{\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}(e_{k_1},\ldots,e_{k_p},\varepsilon^{l_1},\ldots,\varepsilon^{l_q})} = 0 \qquad (1)$$

Подчеркнутое выражение равно 1, если $i_1 = k_1,\ldots,i_p = k_p, j_1 = l_1,\ldots,j_q = l_q$ и 0 в остальных случаях, следовательно, равенство (1) может быть записано в виде

$$\lambda^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}(e_{k_1},\ldots,e_{k_p},\varepsilon^{l_1},\ldots,\varepsilon^{l_q}) = \lambda^{l_1,\ldots,l_q}_{k_1,\ldots,k_p} = 0.$$

$\lambda_i t^i$ $\qquad \lambda_{ij} t^{ij}$ $\qquad \sum^n \lambda_{ij}\,\varepsilon^i\otimes\varepsilon^j(v_1, v_2) =$

$t^i = \varepsilon^i$ $\qquad t^{ij} = \varepsilon^i\otimes\varepsilon^j$ $\qquad (e_k, e_l)$

$= \lambda_{ij}\,\varepsilon^i(e_k)\cdot\varepsilon^j(e_l) = \lambda_{kl}$

Но, т.к. это равенство имеет место для любого набора индексов $k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_q$, то все $\lambda^{l_1,\ldots,l_q}_{k_1,\ldots,k_p}$ равны нулю. Линейная независимость доказана.

Удостоверимся теперь, что любой тензор можно представить в виде линейной комбинации этих базисных тензоров. Для этого достаточно доказать равенство

$$T(e_{k_1},\ldots,e_{k_p},\varepsilon^{l_1},\ldots,\varepsilon^{l_q}) \quad T = \underline{T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}}. \; (e_{k_1},\ldots,e_{k_p},\varepsilon^{l_1},\ldots,\varepsilon^{l_q}) \tag{2}$$

А из-за полилинейности это равенство достаточно проверять на базисных аргументах вида $e_{k_1}, \ldots, e_{k_p}, \varepsilon^{l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_q}$. Левая часть равенства по определению равна $T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$, а правая часть, как мы уже видели раньше, также равна $T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}\varepsilon^{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_q}(e_{k_1},\ldots,e_{k_p},\varepsilon^{l_1},\ldots,\varepsilon^{l_q}) = T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$. Итак, равенство проверено, т.е. для произвольного тензора T мы нашли его разложение в линейную комбинацию (2), причем числа $T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$ являются координатами этого тензора в указанном базисе. $\square$

Линейные операторы как тензоры

Перейдем теперь к обещанному отождествлению линейных операторов и тензоров типа $(1,1)$.

Утверждение 4. *Имеет место канонический изоморфизм* $\Theta^1_1 \cong L(V)$.

Доказательство. Пусть дан линейный оператор $f : V \to V$, нам надо по нему построить билинейную функцию $T_f = T_f(v, \varphi)$ с одним векторным ($v \in V$) и одним ковекторным ($\varphi \in V'$) аргументами. Определим его равенством $T_f(v,\varphi) := \varphi(f(v)) \in \mathbb{K}$. T_f действительно является полилинейным отображением от двух аргументов. Соответствие $f \mapsto T_f$ задает линейное отображение $L(V) \to \Theta^1_1$, конструкция которого не зависит от выбора базисов. Доказать, что отображение $L(V) \to \Theta^1_1$ будет изоморфизмом, можно двумя способами.

Первый — это просто записать все в координатах и сравнить.

Второй способ. Размерности пространств $L(V)$ и Θ^1_1 совпадают (они равны $(\dim V)^2$), поэтому надо проверить лишь то, что у этого отображения нулевое ядро, т.е. что если $T_f = 0$, то и $f = 0$. Пусть $T_f(v,\varphi) = 0$ для любых $v \in V$, $\varphi \in V'$, т.е. для любого φ $\varphi(f(v)) = 0$, следовательно, $f(v) = 0$. Но, т.к. это верно для всех векторов $v \in V$, то имеем $f = 0$. $\square$

Теперь мы можем отождествлять линейные операторы и тензоры типа $(1,1)$.

Например, тождественный оператор задается в любом базисе матрицей (δ^j_i). Проверим в явном виде, что символ Кронекера δ^j_i является тензором. Запишем тензорный закон изменения координат $\widetilde{\delta}^k_l = \delta^j_i c^i_l d^k_j = c^i_l d^k_i$, что, в свою очередь, равно $c^i_l d^k_i = \delta^k_l$, т.к. $D = C^{-1}$ и $CD = E$. Значит, символ Кронекера действительно является тензором типа $(1,1)$.

Свертка тензоров

Пусть $T \in \Theta^q_p$ — тензор с хотя бы одним нижним и одним верхним индексами, т.е. $p, q > 0$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. Зафиксируем один векторный и один ковекторный аргумент (пусть это будут первые по порядку аргументы), на их место поставим базисные элементы e_i и ε^i и определим полилинейную функцию sT от $p-1$ векторых и $q-1$ ковекторных аргументов по формуле

$$(sT)(v_2,\ldots,v_p,f^2,\ldots,f^q) := T(e_i, v_2,\ldots,v_p,\varepsilon^i, f^2,\ldots,f^q),$$

$\tilde{T}^{kl} = T^{ij} d_i^k d_j^l$ $\qquad$ $\tilde{A}^{-1} = ?\, A^{-1}\, ?$

$\tilde{A}^{-1} = D A^{-1} D^{t}$. $\quad$ $\tilde{A}^{-1} = C^{-1} A^{-1} (C^{t})^{-1}$ $\qquad$ $\tilde{A} = C^{t} A C$

если коэф. матр. A меняются при переходе от одного базиса к другому по формуле $\tilde{a}_{kl} = a_{ij} c^i_k c^j_l$, то коэф. A^{-1} мен. по ф-ле $\tilde{a}^{kl} = a^{ij} d^k_i d^l_j$.

$$\delta^k_m d^m_p = \delta^k_1 d^1_p + \dots + \delta^k_n d^n_p = d^k_p .$$

$$=$$

$\underline{m = k}$ $\quad \delta^k_k = 1, \quad \delta^k_m = 0$

$m \neq k.$

$$c^i_m \cdot d^m_p = c^i_1 d^1_p + \dots + c^i_n d^n_p = (CD)^i_p = \begin{cases} 1, & i = p \\ 0, & i \neq p \end{cases}$$

$$= \delta^i_p$$

$$a_{ji}\delta^{i}_{p} = a_{j1}\delta^{1}_{p} + \dots + a_{jn}\delta^{n}_{p} = a_{jp}$$

$1 \le i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \le n$ $\qquad n = \dim V.$

$\varepsilon^{i_1}\otimes\dots\otimes\varepsilon^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\dots\otimes e_{j_q}$ — n^{p+q} базисных тензоров

$$\underbrace{\varepsilon^{5}\otimes\varepsilon^{3}\otimes\varepsilon^{3}\otimes\varepsilon^{7}}_{p=q=4}\otimes\underbrace{e_1\otimes e_3\otimes e_2\otimes e_1}$$

$p = 0,\ q = 1.$

e_j $\qquad e_1, \dots, e_n$

$p+q=0$

ε^1 $\quad \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ — базис $\quad \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ — двойств. базис

симм. ф-ия $\quad \varepsilon^{i_1} \otimes \varepsilon^{i_2}$

$\varepsilon^1(e_i) = \begin{cases} 1, & i=1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}$

$$\frac{\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j}{n^2}$$

$\varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1 \; \ldots \; \varepsilon^1 \otimes \varepsilon^n$

$\varepsilon^2(e_i) = \begin{cases} 1, & i=2 \\ 0, & \ldots \end{cases}$

$\varepsilon^n \otimes \varepsilon^1 \; \ldots \; \varepsilon^n \otimes \varepsilon^n$

$\varepsilon^j(e_i) = \delta_i^j$

$$T \overset{?}{=} T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}\, \varepsilon^{i_1} \dots$$

$$(e_{k_1}, \dots e_{k_p}, \varepsilon^{l_1}, \dots \varepsilon^{l_q})$$

$$F \overset{?}{=} G$$

$$T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q) = T \dots \varepsilon^{i_1} \dots (v_1, \dots v_p, f^1, \dots f^q)$$

$$F(x) = G(x)$$

$$v_1 = v_1^{k_1} e_{k_1} \quad v_p = v_p^{k_p} e_{k_p}$$

$$F(e_{k_1}, \dots e_{k_p}, \varepsilon^{l_1} \dots \varepsilon^{l_q}) = G(e_{k_1}, \dots e_{k_p}, \varepsilon^{l_1}, \dots \varepsilon^{l_q})$$

$$T(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}, \varepsilon^{l_1}, \dots, \varepsilon^{l_q}) = T^{l_1 \dots l_q}_{k_1 \dots k_p}$$ коэф. тензора

$$T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \underbrace{\varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} (e_{k_1}, \dots, e_{k_p}, \varepsilon^{l_1}, \dots, \varepsilon^{l_q})}_{\substack{i_1 = k_1, \ \dots, \ i_p = k_p \\ j_1 = l_1, \ \dots, \ j_q = l_q}} = T^{l_1 \dots l_q}_{k_1 \dots k_p}.$$