

Но, т.к. это равенство имеет место для любого набора индексов $k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q$, то все $\lambda_{k_1, \dots, k_p}^{l_1, \dots, l_q}$ равны нулю. Линейная независимость доказана.

Удостоверимся теперь, что любой тензор можно представить в виде линейной комбинации этих базисных тензоров. Для этого достаточно доказать равенство

$$T = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}. \quad (2)$$

А из-за полилинейности это равенство достаточно проверять на базисных аргументах вида $e_{k_1}, \dots, e_{k_p}, \varepsilon^{l_1}, \dots, \varepsilon^{l_q}$. Левая часть равенства по определению равна $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$, а правая часть, как мы уже видели раньше, также равна $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}, \varepsilon^{l_1}, \dots, \varepsilon^{l_q}) = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$. Итак, равенство проверено, т.е. для произвольного тензора T мы нашли его разложение в линейную комбинацию (2), причем числа $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$ являются координатами этого тензора в указанном базисе. $\square$

Линейные операторы как тензоры

Перейдем теперь к обещанному отождествлению линейных операторов и тензоров типа $(1, 1)$.

Утверждение 4. *Имеет место канонический изоморфизм $\Theta_1^1 \cong L(V)$.*

Доказательство. Пусть дан линейный оператор $f: V \rightarrow V$, нам надо по нему построить билинейную функцию $T_f = T_f(v, \varphi)$ с одним векторным ($v \in V$) и одним ковекторным ($\varphi \in V'$) аргументами. Определим его равенством $T_f(v, \varphi) := \varphi(f(v)) \in \mathbb{K}$. T_f действительно является полилинейным отображением от двух аргументов. Соответствие $f \mapsto T_f$ задает линейное отображение $L(V) \rightarrow \Theta_1^1$, конструкция которого не зависит от выбора базисов. Доказать, что отображение $L(V) \rightarrow \Theta_1^1$ будет изоморфизмом, можно двумя способами.

Первый — это просто записать все в координатах и сравнить.

Второй способ. Размерности пространств $L(V)$ и Θ_1^1 совпадают (они равны $(\dim V)^2$), поэтому надо проверить лишь то, что у этого отображения нулевое ядро, т.е. что если $T_f = 0$, то и $f = 0$. Пусть $T_f(v, \varphi) = 0$ для любых $v \in V, \varphi \in V'$, т.е. для любого φ $\varphi(f(v)) = 0$, следовательно, $f(v) = 0$. Но, т.к. это верно для всех векторов $v \in V$, то имеем $f = 0$. $\square$

Теперь мы можем отождествлять линейные операторы и тензоры типа $(1, 1)$.

Например, тождественный оператор задается в любом базисе матрицей (δ_i^j) . Проверим в явном виде, что символ Кронекера δ_i^j является тензором. Запишем тензорный закон изменения координат $\tilde{\delta}_i^k = \delta_i^j c_i^k d_j^k = c_i^k d_i^k$, что, в свою очередь, равно $c_i^k d_i^k = \delta_i^k$, т.к. $D = C^{-1}$ и $CD = E$. Значит, символ Кронекера действительно является тензором типа $(1, 1)$.

Свертка тензоров

Пусть $T \in \Theta_p^q$ — тензор с хотя бы одним нижним и одним верхним индексами, т.е. $p, q > 0$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в V . Зафиксируем один векторный и один ковекторный аргумент (пусть это будут первые по порядку аргументы), на их место поставим базисные элементы e_i и ε^i и определим полилинейную функцию sT от $p-1$ векторов и $q-1$ ковекторных аргументов по формуле

$$(sT)(v_2, \dots, v_p, f^2, \dots, f^q) := T(\underline{e_i}, v_2, \dots, v_p, \underline{\varepsilon^i}, f^2, \dots, f^q),$$

$$T \in \Theta_p^q$$

$$sT \in \Theta_{p-1}^{q-1}$$

$$s(T)$$

$$(sT)_{i_2 \dots i_p}^{j_2 \dots j_q} = (sT)(e_{i_2} \dots e_{i_p}, \varepsilon^{j_2} \dots \varepsilon^{j_q})$$

$$(sT)_{i_2 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

в которой подразумевается суммирование по индексу i . Проверим, что определение тензора sT не зависит от выбора базиса, т.е. что его координаты будут преобразовываться по тензорному закону. Имеем $(sT)_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q}$ (здесь опять производится суммирование по индексу i). При переходе к другому базису имеем

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{k_1, \dots, k_p}^{l_1, \dots, l_q} &= T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \cdot c_{k_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot c_{k_p}^{i_p} \cdot d_{j_1}^{l_1} \cdot \dots \cdot d_{j_q}^{l_q}; \\ (s\tilde{T})_{k_2, \dots, k_p}^{l_2, \dots, l_q} &= \tilde{T}_{k, k_2, \dots, k_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q} = T_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q} \cdot \underbrace{c_k^{i_1}} \cdot c_{k_2}^{i_2} \cdot \dots \cdot c_{k_p}^{i_p} \cdot \underbrace{d_{j_1}^{l_2}} \cdot d_{j_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot d_{j_q}^{l_q}. \end{aligned}$$

Произведение подчеркнутых элементов равно $c_k^{i_1} d_{j_1}^{l_2} = \delta_{j_1}^{i_1}$, т.к. $CD = E$, поэтому ненулевые слагаемые отвечают значениям $i_1 = j_1$. Обозначим $i_1 = j_1 = i$, тогда

$$(s\tilde{T})_{k_2, \dots, k_p}^{l_2, \dots, l_q} = T_{i, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q} \cdot c_{k_2}^{i_2} \cdot \dots \cdot c_{k_p}^{i_p} \cdot d_{j_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot d_{j_q}^{l_q} = (sT)_{i_2, \dots, i_p}^{j_2, \dots, j_q} \cdot c_{k_2}^{i_2} \cdot \dots \cdot c_{k_p}^{i_p} \cdot d_{j_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot d_{j_q}^{l_q}.$$

Т.е. координаты $(sT)_{i_2, \dots, i_p}^{j_2, \dots, j_q}$ действительно преобразуются по тензорному закону, значит, действительно, sT — тензор типа $(p-1, q-1)$. Этот тензор называется *сверткой* тензора T . Такую операцию свертки можно проводить несколько раз до исчерпания верхних или нижних индексов. Последняя возможная свертка (после которой не остается либо нижних, либо верхних индексов) называется *полной* сверткой.

Примеры:

1) Возьмем линейный оператор — тензор типа $(1, 1)$, результатом свертки будет скаляр. Пусть нам дан оператор $f: V \rightarrow V$, который задается матрицей (f_i^j) , сверткой этого тензора будет число f_i^i (сумма диагональных элементов), т.е. в данном случае свертка — это след, $sf = \text{tr } f$.

2) Рассмотрим полную свертку тензора типа $(2, 2)$. Возьмем билинейную функцию g , т.е. тензор типа $(2, 0)$, и два вектора a, b — тензоры типа $(0, 1)$. Тогда $g \otimes a \otimes b$ будет тензором типа $(2, 2)$. Координаты этого тензора $(g \otimes a \otimes b)_{ij}^{kl} = g_{ij} a^k b^l$, где g_{ij} — матрица билинейной функции g . Тогда при полной свертке этого тензора получим $s(g \otimes a \otimes b) = g_{ij} a^i b^j = g(a, b)$.

Поднятие и опускание индексов

Пусть нам дано *евклидово* пространство V , т.е. векторное пространство над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Тогда существует канонический изоморфизм $V \cong V'$, поэтому у любого тензора можно заменить векторный аргумент на ковекторный и наоборот. Например, возьмем тензор типа $(0, 1)$, т.е. вектор $T: V' \rightarrow \mathbb{R}$. отождествим его с ковектором $(T, \cdot): V \rightarrow \mathbb{R}$, тогда получим канонический изоморфизм пространств тензоров Θ_0^1 и Θ_1^0 . В координатах это выглядит следующим образом. Пусть $G = (g_{ij})$ — матрица Грама скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$. Каждому тензору T с координатами T^i поставим в соответствие $T_j = g_{ij} T^i$ (это произведение двух тензоров, g и T и свертка по индексу i). Таким образом мы у тензора T опустили индекс.

Обобщая эту операцию, дадим определение операции опускания индекса.

Опускание индекса — это отображение $\Theta_p^q \rightarrow \Theta_{p+1}^{q-1}$, которое тензору $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$ ставит в соответствие тензор $g_{ij} \cdot T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$. Здесь мы опустили первый индекс j_1 . Аналогично можно опустить любой другой верхний индекс.

Поднятие индекса. Аналогичным образом можно и поднимать индексы. Для этого используется матрица $G^{-1} = (g^{ij})$ (вспомним, что матрица Грама обратима и что g^{ij} есть тензор типа $(0, 2)$). Тензор $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$ операция поднятия индекса переводит в тензор $g^{ij} \cdot T_{i, i_2, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \in \Theta_{p-1}^{q+1}$.

Оператор альтернирования. Внешние формы

Рассмотрим линейное пространство Θ_p^0 тензоров с одними нижними индексами, т.е. полилинейные функции от p векторов. Также рассмотрим группу перестановок S_p . Если взять какую-нибудь перестановку $\sigma \in S_p$, то можно определить линейный оператор $f_\sigma : \Theta_p^0 \rightarrow \Theta_p^0$ следующим образом. Пусть $T \in \Theta_p^0$, т.е. $T = T(v_1, \dots, v_p)$; определим $f_\sigma(T) = \sigma T$, где $(\sigma T)(v_1, \dots, v_p) := T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$. Эта операция перестановки аргументов сумму тензоров переводит в сумму, а умножение тензора на скаляр — в умножение на скаляр, следовательно, f_σ — линейный оператор. Кроме того, $f_{\sigma_1} f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1 \sigma_2}$. Координаты тензоров T и σT связаны между собой равенством $(\sigma T)_{i_1, \dots, i_p} = (\sigma T)(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = T(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(p)}}) = T_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}}$.

Поскольку нам вскоре понадобится делить на целые числа, с этого момента, говоря о тензорах, будем считать, что характеристика поля $\mathbb{K}$ нулевая. При желании для простоты можно считать, что $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Построим оператор **альтернирования** (приводящий к аналогу свойства кососимметричности)

$$\text{Alt} : \Theta_p^0 \rightarrow \Theta_p^0; \quad \text{Alt } T := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \sigma T.$$

Этот оператор будет линейным, т.к. является суммой линейных операторов. Назовем тензор $T \in \Theta_p^0$ *кососимметрическим* (или *внешней формой*), если $\sigma T = (-1)^\sigma T$ для любой перестановки $\sigma \in S_p$. В пространстве всех тензоров с нижними индексами определим подпространство $\Lambda_p \subset \Theta_p^0$ всех кососимметрических тензоров (проверка того, что множество кососимметрических тензоров в действительности есть подпространство, очевидна). Если $p = 2$, то условие кососимметричности эквивалентно условию $T_{ij} = -T_{ji}$.

Лемма 5. Оператор Alt является оператором проектирования на подпространство внешних форм Λ_p .

Доказательство. Нам потребуются следующие равенства:

Утверждение 6. $\sigma(\text{Alt } T) = \text{Alt}(\sigma T) = (-1)^\sigma \text{Alt } T$.

Доказательство. Применим перестановку σ к тензору $\text{Alt } T$:

$$\sigma(\text{Alt } T) = \sigma \left(\frac{1}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^\rho \rho T \right) = \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^\rho ((\sigma \rho) T),$$

т.к. σ — это линейный оператор. Когда ρ пробегает всю группу S_p , перестановка $\tau = \sigma \rho$ тоже пробегает всю группу S_p , поэтому полученное выражение можно записать так: $\sigma(\text{Alt } T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\rho \tau T$. А, поскольку $(-1)^\tau = (-1)^\rho (-1)^\sigma$, то

$$\sigma(\text{Alt } T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\sigma (-1)^\tau \tau T = (-1)^\sigma \left(\frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\tau \tau T \right) = (-1)^\sigma \text{Alt } T,$$

т.е. мы доказали, что $\sigma(\text{Alt } T) = (-1)^\sigma \text{Alt } T$. Теперь докажем, что $\text{Alt}(\sigma T) = (-1)^\sigma \text{Alt } T$.

По определению $\text{Alt}(\sigma T) = \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^\rho ((\rho \sigma) T)$. Обозначим $\tau = \rho \sigma$ и получим

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\sigma T) &= \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^\rho ((\rho \sigma) T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\rho (\tau T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\tau (-1)^\sigma (\tau T) = \\ &= (-1)^\sigma \left(\frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\tau (\tau T) \right) = (-1)^\sigma \text{Alt } T. \end{aligned}$$

$$\oplus_1$$

$$T: \underbrace{V} \times \underbrace{V^1} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\text{Satz 6 } \oplus_1$$

$$\boxed{\varepsilon^i \otimes e_j}$$

$$i, j = 1, \dots, n = \dim V.$$

$$\varepsilon^i \otimes e_j$$

$$\tilde{A}_f = C^{-1} A_f C.$$

$$\dim L(V) = n^2.$$

$$f \rightarrow A_f$$

$$\tilde{T}_\ell^k = T_j^i d_i^k c_\ell^j \quad (\text{сумма по } i \text{ и } j)$$

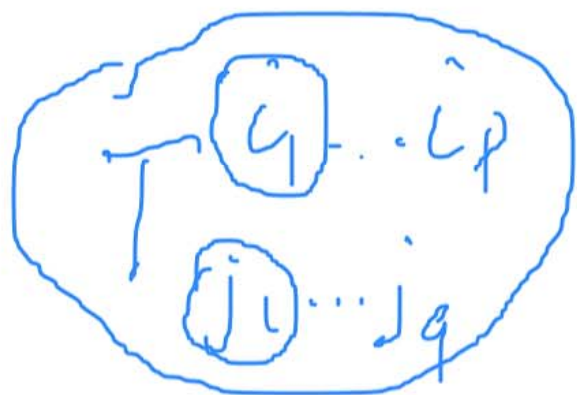
$$T_j^i = \delta_j^i$$

$$\tilde{T}_j^i = \delta_j^i$$

$$\tilde{\delta}_\ell^k = \underbrace{\delta_j^i d_i^k c_\ell^j}_{\sum_{i=1}^n - \text{огоро некуда. Чна?}} = \underbrace{d_j^k c_\ell^j}_{i=j} = (DC)_\ell^k$$

$$\tilde{A} = C^{-1}AC$$

$$A = E \Rightarrow \tilde{A} = E.$$



$$\begin{matrix} i_2, \dots, i_p \\ j_2, \dots, j_q \end{matrix}$$

$$f(x, y)$$

$$x = 1$$

$$f(1, y)$$

$$v_i = (e_i)$$

$$T(v_1, \dots, v_p, f^1, \dots, f^q)$$

$$\underline{T(e_1, v_2, \dots, v_p, \underline{\varepsilon^1}, f^2, \dots, f^q)} +$$

$$+ \underline{T(e_2, v_2, \dots, v_p, \underline{\varepsilon^2}, f^1, \dots, f^q)} + \dots$$

$$+ \underline{T(e_n, v_2, \dots, v_p, \underline{\varepsilon^n}, f^1, \dots, f^q)}$$

$$\underline{f(x, y)} = x + y$$

$$\underline{f(3, 4)} = \boxed{3+4}$$

отсюда
вывести

$$f \quad (a_j^i)$$

$$e_1 \dots e_n \text{ — Basis } B \quad \checkmark$$

$$f \longrightarrow a_j^i$$

$$(T_f)^i_j = a_j^i$$

$$\phi(f(v)) = T_f(v, \varphi) \longrightarrow (a_j^i)$$

$$f(e_j) = \underbrace{a_j^1 e_1 + \dots + a_j^n e_n}_{\varepsilon^i(e_k) = \delta_k^i}$$

$$(T_f)^i_j = T_f(e_j, \varepsilon^i) =$$

$$= \varepsilon^i(f(e_j)) = a_j^i$$

f
 $\overline{1f}$

(a_{ij}^i)
 (a_{ij}^i)

$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$

$(\overline{1f})_j^i$

$$(S \overline{1f}) = (\overline{1f})_i^i = a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n \\ = \text{tr } A$$

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \cdot S_{c_{p+1} \dots c_{p+r}}^{d_{q+1} \dots d_{q+r}} = (T \otimes S)_{i_1 \dots i_{p+r}}^{j_1 \dots j_{q+r}}$$

$$g_{ij} \quad a^k \quad b^l$$

$$(g \otimes a \otimes b)_{ij}^{kl} = g_{ij} \cdot a^k \cdot b^l$$

$$S^2(g \otimes a \otimes b) = g_{ij} a^i b^j =$$

$$= g(a, b)$$

$$(a \otimes b)^{kl} = a^k \cdot b^l$$

$$S(g \otimes a \otimes b)_{ij}^{kl} = g_{ij} a^k b^l$$

$$= g(b, a)$$

G -тензор типа $(2, 0)$

(g_{ij})

T^i -тензор

$$(G \otimes T)_{ij}^k = g_{ij} T^k$$

↓ вектора

$$g_{ij} T^i \quad (\text{сумма по } i)$$

$\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p$
 $\bar{j}_1 \dots \bar{j}_q$

$p > 0$.

$(G \otimes T)$ 

↓
 сверка по

$(G \otimes T)$
 $\bar{i} \quad \bar{i}_2 \dots \bar{i}_p$
 $\bar{j} \quad \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q$

G обратима

Эн-та обратная метр.
 - тензор типа $(0, 2)$

g_{ij} - Эн-та метр.

$i_1 \dots i_p$

$i_2 \dots i_p$ - верх.

$\bar{j}_1 \bar{j}_2 \dots \bar{j}_q$ ~~нижних~~

$$g^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = (G \otimes T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

↓ черта

A (a^j_i)

$$g^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = (\text{tensor})^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

в евкл. пр-ве есть билин. ф-я

$\underbrace{(a, b)}_{\text{пара векторов}} \mapsto (a, b)$
 скал.-пр.

$$g_{kl} = g_{ij} C_k^i C_l^j$$

$$\tilde{G} = C^t G C$$

где каноническая
 базис метр-транса

$$G = (g(e_i, e_j))$$

$$\underline{g_{ij} = g(e_i, e_j)}$$

$p=2$ симм. ф-ии

$S_p = \text{транс. перест. на } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma$

$\{1, 2\}$
 $\leftrightarrow$

σ

$$\begin{aligned} (\sigma T)(v_1, v_2) &= T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) = \\ &= T(v_2, v_1) \end{aligned}$$

$$\sigma \in S_p \quad T \in \mathbb{H}_p^0$$

$$f_\sigma(T)(v_1, \dots, v_p) = T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

$$\frac{T_{i_1, \dots, i_p} - \text{symm. } T}{\text{symm. } f_\sigma(T)}$$

$$f_\sigma(T+S) = f_\sigma(T) + f_\sigma(S)$$

$$f_\sigma(\lambda \cdot T) = \lambda f_\sigma(T)$$

$$\frac{T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}}}{\text{symm.}}$$

$$p=2$$

$$(-1)^{\sigma}$$

$$\text{Alt } T = \frac{1}{2} (T - \sigma(T))$$

↑
сумма трансп. перест.

$$(\text{Alt } T)(v_1, v_2) = \frac{1}{2} (T(v_1, v_2) - T(v_2, v_1))$$

$$(\text{Alt } T)_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji})$$

$$p=3$$

6 перестановок

$$(\text{Alt } T)_{ijk} = \frac{1}{6} \left(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{kji} \right)$$

$$\begin{pmatrix} i & j & \dots & p \\ i & j & \dots & p \end{pmatrix} \quad (-1)^{\sigma} - \text{знак перестановки.}$$