Оператор альтернирования. Внешние формы

Рассмотрим линейное пространство Θ^0_p тензоров с одними нижними индексами, т.е. полилинейные функции от p векторов. Также рассмотрим группу перестановок S_p. Если взять какую-нибудь перестановку $\sigma \in S_p$, то можно определить линейный оператор $f_\sigma : \Theta^0_p \to \Theta^0_p$ следующим образом. Пусть $T \in \Theta^0_p$, т.е. $T = T(v_1, \ldots, v_p)$; определим $f_\sigma(T) = \sigma T$, где $(\sigma T)(v_1, \ldots, v_p) := T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})$. Эта операция перестановки аргументов сумму тензоров переводит в сумму, а умножение тензора на скаляр — в умножение на скаляр, следовательно, f_σ — линейный оператор. кроме того, $f_{\sigma_1} f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1\sigma_2}$. Координаты тензоров T и σT связаны между собой равенством $(\sigma T)_{i_1,\ldots,i_p} = (\sigma T)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) = T(e_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, e_{i_{\sigma(p)}}) = T_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, i_{\sigma(p)}$.

Поскольку нам вскоре понадобится делить на целые числа, с этого момента, говоря о тензорах, будем считать, что характеристика поля $\mathbb{K}$ нулевая. При желании для простоты можно считать, что $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Построим оператор *альтернирования* (приводящий к аналогу свойства кососимметричности)

$$\operatorname{Alt} : \Theta^0_p \to \Theta^0_p; \quad \operatorname{Alt} T := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \sigma T.$$

Этот оператор будет линейным, т.к. является суммой линейных операторов. Назовем тензор $T \in \Theta^0_p$ *кососимметрическим* (или *внешней формой*), если $\sigma T = (-1)^\sigma T$ для любой перестановки $\sigma \in S_p$. В пространстве всех тензоров с нижними индексами определим подпространство $\Lambda_p \subset \Theta^0_p$ всех кососимметрических тензоров (проверка того, что множество кососимметрических тензоров в действительности есть подпространство, очевидна). Если $p = 2$, то условие кососимметричности эквивалентно условию $T_{ij} = -T_{ji}$.

Лемма 5. *Оператор* Alt *является оператором проектирования на подпространство внешних форм* Λ_p.

Доказательство. Нам потребуются следующие равенства:

Утверждение 6. $\sigma(\operatorname{Alt} T) = \operatorname{Alt}(\sigma T) = (-1)^\sigma \operatorname{Alt} T$.

$(-1)^\rho = (-1)^\tau \cdot (-1)^\sigma$

Доказательство. Применим перестановку σ к тензору $\operatorname{Alt} T$:

$(-1)^{\sigma^{-1}} = (-1)^\sigma.$

$$\sigma(\operatorname{Alt} T) = \sigma\Big(\frac{1}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^\rho \rho T\Big) = \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^\rho ((\sigma\rho) T),$$

т.к. σ — это линейный оператор. Когда ρ пробегает всю группу S_p, перестановка $\tau = \sigma\rho$ тоже пробегает всю группу S_p, поэтому полученное выражение можно записать так: $\sigma(\operatorname{Alt} T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\rho \tau T$. А, поскольку $(-1)^\tau = (-1)^\rho (-1)^\sigma$, то

$\rho = \sigma^{-1}\tau$

$$\sigma(\operatorname{Alt} T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\sigma (-1)^\tau \tau T = (-1)^\sigma \Big(\frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\tau \tau T\Big) = (-1)^\sigma \operatorname{Alt} T,$$

т.е. мы доказали, что $\sigma(\operatorname{Alt} T) = (-1)^\sigma \operatorname{Alt} T$. Теперь докажем, что $\operatorname{Alt}(\sigma T) = (-1)^\sigma \operatorname{Alt} T$.

По определению $\operatorname{Alt}(\sigma T) = \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^\rho ((\rho\sigma) T)$. Обозначим $\tau = \rho\sigma$ и получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Alt}(\sigma T) &= \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^\rho ((\rho\sigma) T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\rho (\tau T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\tau (-1)^\sigma (\tau T) = \\ &= (-1)^\sigma \Big(\frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\tau (\tau T)\Big) = (-1)^\sigma \operatorname{Alt} T. \end{aligned}$$

$\square$

Перейдем теперь собственно к доказательству леммы.

1. Проверим, что $\operatorname{Im}\operatorname{Alt} \subset \Lambda_p$. Действительно, поскольку $\sigma(\operatorname{Alt} T) = (-1)^\sigma \operatorname{Alt} T$, то по определению $\operatorname{Alt} T \in \Lambda_p$ для любого $T \in \Theta_p^0$, поэтому $\operatorname{Im}\operatorname{Alt} \subset \Lambda_p$.

2. Докажем, что если $T \in \Lambda_p$, то $\operatorname{Alt} T = T$. Действительно, поскольку $T \in \Lambda_p$, то $\sigma T = (-1)^\sigma T$ и

$$\operatorname{Alt} T = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^\sigma \sigma T = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^\sigma(-1)^\sigma T = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} T = \frac{1}{p!}p!T = T.$$

3. Проверим, что $\operatorname{Alt}^2 = \operatorname{Alt}$, т.е. что $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} T) = \operatorname{Alt} T$ для любого $T \in \Theta_p^0$. Действительно, в п.1 мы доказали, что $S = \operatorname{Alt} T \in \Lambda_p$, в п.2 — что $\operatorname{Alt} S = S$, подставив $\operatorname{Alt} T$ вместо S, получим $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} T) = \operatorname{Alt} T$. $\square$

Внешнее умножение, его свойства

Определим аналог тензорного умножения для внешних форм — *внешнее тензорное умножение* (обозначается $\wedge$): для $T \in \Lambda_p$, $S \in \Lambda_q$ положим $T \wedge S := \operatorname{Alt}(T \otimes S)$.

Лемма 7. *Введенное нами внешнее тензорное умножение обладает следующими свойствами: для любых внешних форм $T \in \Lambda_p$, $S \in \Lambda_q$, $R \in \Lambda_r$*

1) $(T + \lambda S)\wedge R = T \wedge R + \lambda S \wedge R$ (дистрибутивность);

2) $S \wedge T = (-1)^{pq} T \wedge S$ (антикоммутативность) ;

3) $(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$ (ассоциативность).

Доказательство. 1) Дистрибутивность следует из дистрибутивности операции $\otimes$ и линейности оператора Alt.

2) По определению

$$S \wedge T = \operatorname{Alt}(S \otimes T) = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} \sigma(S\otimes T);$$

$$T \wedge S = \operatorname{Alt}(T \otimes S) = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} \sigma(T\otimes S).$$

Рассмотрим координаты тензоров $\sigma(S \otimes T)$ и $\sigma(T \otimes S)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma(S\otimes T)_{i_1,\ldots,i_{p+q}} &= (S\otimes T)_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p+q)}} = \\ &= S_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(q)}}\cdot T_{i_{\sigma(q+1)},\ldots,i_{\sigma(p+q)}}; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sigma(T\otimes S)_{i_1,\ldots,i_{p+q}} &= (T\otimes S)_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p+q)}} = \\ &= T_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}\cdot S_{i_{\sigma(p+1)},\ldots,i_{\sigma(p+q)}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Посмотрим, чем отличаются индексы у S и T в выражениях (3) и (4). Индексы в (3) — это $\sigma(1),\ldots,\sigma(q),\sigma(q+1),\ldots,\sigma(p+q)$, а индексы в (4) — это $\sigma(p+1),\ldots,\sigma(p+q),\sigma(1),\sigma(q)$. Пусть τ — перестановка

$$\begin{pmatrix} p+1 & \ldots & p+q & 1 & \ldots & p \\ 1 & \ldots & q & q+1 & \ldots & p+q \end{pmatrix}.$$

Тогда, как легко видеть, $\sigma(S\otimes T)=\sigma\tau(T\otimes S)$. Поэтому

$$\begin{aligned} S\wedge T &= \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^{\sigma}\sigma(S\otimes T)= \\ &= \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^{\tau}(-1)^{\sigma\tau}(\sigma\tau)(S\otimes T)= \\ &= (-1)^{\tau}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\rho\in S_{p+q}}(-1)^{\rho}\rho(S\otimes T)=(-1)^{\tau}T\wedge S, \end{aligned}$$

и нам осталось определить $(-1)^{\tau}$. Для вычисления знака перестановки надо подсчитать количество элементарных перестановок, ее составляющих. Легко видеть, что это число равно произведению pq, т.е. $(-1)^{\tau}=(-1)^{pq}$, что и требовалось показать.

3) Введем дополнительно обозначение $T_1\wedge T_2\wedge\ldots\wedge T_k:=\mathrm{Alt}(T_1\otimes T_2\otimes\ldots\otimes T_k)$. Для доказательство ассоциативности нам также понадобится следующее равенство.

Утверждение 8. $\mathrm{Alt}((\mathrm{Alt}\,Q)\otimes R)=\mathrm{Alt}(Q\otimes R)=\mathrm{Alt}(Q\otimes(\mathrm{Alt}\,R))$ *для любых тензоров* $Q\in\Theta^0_p$, $R\in\Theta^0_q$.

Доказательство. Ограничимся доказательством первого из равенств (второе доказывается аналогично). Поскольку операция $\otimes$ обладает свойством дистрибутивности, а оператор Alt линеен, имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}((\mathrm{Alt}\,Q)\otimes R) &= \mathrm{Alt}\Big(\Big(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\sigma}\sigma Q\Big)\otimes R\Big)= \\ &= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\sigma}\,\mathrm{Alt}(\sigma Q\otimes R). \end{aligned}$$

Каждой перестановке $\sigma\in S_p$ поставим в соответствие такую перестановку $\widetilde{\sigma}\in S_{p+q}$, которая на первых p индексах действует как σ, а остальные оставляет на месте, т.е.

$$\widetilde{\sigma}=\begin{pmatrix} 1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & p+q \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(p) & p+1 & \ldots & p+q \end{pmatrix}.$$

При этом, очевидно, $(-1)^{\widetilde{\sigma}}=(-1)^{\sigma}$.

Тогда $\sigma Q\otimes R=\widetilde{\sigma}(Q\otimes R)$, и

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}((\mathrm{Alt}\,Q)\otimes R) &= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\sigma}\,\mathrm{Alt}(\widetilde{\sigma}(Q\otimes R))= \\ &= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\sigma}(-1)^{\widetilde{\sigma}}\,\mathrm{Alt}(Q\otimes R)= \\ &= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{Alt}(Q\otimes R)=\frac{1}{p!}p!\,\mathrm{Alt}(Q\otimes R)= \\ &= \mathrm{Alt}(Q\otimes R). \end{aligned}$$

□

Докажем теперь ассоциативность внешнего умножения. Обозначим $Q=T\otimes S$, тогда $\mathrm{Alt}\,Q=\mathrm{Alt}(T\otimes S)$ и

$$\begin{aligned} (T\wedge S)\wedge R &= \mathrm{Alt}((T\wedge S)\otimes R)=\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T\otimes S)\otimes R)= \\ &= \mathrm{Alt}((\mathrm{Alt}\,Q)\otimes R)=\mathrm{Alt}(Q\otimes R)=\mathrm{Alt}(T\otimes S\otimes R)= \\ &= T\wedge S\wedge R. \end{aligned}$$

Аналогично получим, что $T \wedge (S \wedge R) = T \wedge S \wedge R$, т.е. $(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$. $\square$

Базис в пространстве внешних форм

Построим базис в пространстве кососимметрических тензоров Λ_p. Как нам известно, базисом в пространстве Θ_p^0 являются всевозможные произведения вида $\varepsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_p}$. Однако при проектировании на подпространство Λ_p эти произведения переходят в $\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p} = \mathrm{Alt}(\varepsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_p})$ и становятся линейно зависимыми. Действительно, если $i_k = i_l$, то $\varepsilon^{i_k} \wedge \varepsilon^{i_l} = 0$, поэтому из базиса нужно выкинуть все произведения, в которых встречаются повторяющиеся индексы. Далее, т.к. $\varepsilon^{i_k} \wedge \varepsilon^{i_l} = -\varepsilon^{i_l} \wedge \varepsilon^{i_k}$, то нужно также выкинуть все произведения с неупорядоченными индексами и оставить только произведения с индексами упорядоченными, например, по возрастанию, т.е. такие, что $i_1 < \ldots < i_p$. Всего таких упорядоченных произведений будет C_n^p, где $n = \dim V$. Очевидно, что любой тензор является линейной комбинацией тензоров $\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p}$, $i_1 < \ldots < i_p$, т.к. из базиса мы выкинули только заведомо линейно зависимые вектора. Поэтому для доказательства того, что эта система векторов действительно является базисом Λ_p достаточно доказать ее линейную независимость.

Пусть линейная комбинация этих тензоров равна нулю,

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_p} \lambda_{i_1,\ldots,i_p} \varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p} = 0.$$

Перепишем эту сумму в виде

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_p} \lambda_{i_1,\ldots,i_p} \left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \underbrace{\varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_{\sigma(p)}}} \right) = 0. \tag{5}$$

Подчеркнутые элементы — это элементы базиса в пространстве Θ_p^0 и они линейно независимы. Отсюда будет следовать равенство нулю всех коэффициентов, если только все эти подчеркнутые элементы будут различны. Докажем, что все базисные элементы, встречающиеся в этой сумме, различны. Распишем эту сумму подробнее

$$\ldots + \lambda_{i_1,\ldots,i_p} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_{\sigma(p)}} + \ldots + \lambda_{j_1,\ldots,j_p} \sum_{\rho \in S_p} \varepsilon^{j_{\rho(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_{\rho(p)}} + \ldots.$$

Допустим, что существуют такие $\sigma, \rho \in S_p$ и индексы $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_p$, что $\varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{i_{\sigma(p)}} = \varepsilon^{j_{\rho(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_{\rho(p)}}$, т.е. $i_{\sigma(1)} = j_{\rho(1)}, \ldots, i_{\sigma(p)} = j_{\rho(p)}$. Перейдем к перестановке $\tau = \rho\sigma^{-1}$, тогда $i_1 = j_{\tau(1)}, \ldots, i_p = j_{\tau(p)}$. Но индексы i и j у нас упорядочены по возрастанию, следовательно, τ — тождественная перестановка. Значит, $\sigma = \rho$ и тогда $i_1 = j_1, \ldots, i_p = j_p$. Следовательно, все слагаемые в (5) различны, значит все коэффициенты в (5) равны нулю, что и доказывает линейную независимость системы тензоров $\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_p}$, $i_1 < \ldots < i_p$, и то, что она является базисом в Λ_p. $\square$

$\dim \Lambda_p = C_n^p$

Связь между линейной зависимостью и тривиальностью внешнего произведения

Рассмотрим пространство Λ_1. Оно совпадает с Θ_1^0 и с V', поэтому его элементами являются ковекторы или линейные функции на V.

Теорема 9. *Пусть $\varphi^1, \ldots, \varphi^p \in \Lambda_1 = V'$, тогда $\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^p = 0$ тогда и только тогда, когда ковекторы $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ линейно зависимы.*