Пересечение и сумма подпространств

Лемма 1. *Пусть даны два линейных подпространства V_1 и V_2 пространства W, тогда $V_1 \cap V_2$ также является линейным подпространством.*

Доказательство. Для доказательства необходимо проверить, что множество $V_1 \cap V_2$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляры. Т.к. множества V_1 и V_2 замкнуты относительно этих операций, то $\forall x, y \in V_1 \cap V_2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ получаем, что $x + y, \lambda x \in V_1$ и $x + y, \lambda x \in V_2$, следовательно, $x + y, \lambda x \in V_1 \cap V_2$. $\square$

Замечание. В отличие от пересечения, объединение подпространств $V_1 \cup V_2$ в общем случае не будет линейным подпространством. Например, если $V_1 = \langle \sqrt{2} \rangle$, а $V_2 = \langle \sqrt{3} \rangle$ над полем $\mathbb{Q}$, то вектор $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ не будет принадлежать $V_1 \cup V_2$.

Определение 2. *Суммой* $V_1 + V_2$ подпространств V_1 и V_2 называется множество всех векторов $v \in W$, которые можно представить в виде суммы $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$, т.е. $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ (линейная оболочка объединения множеств V_1 и V_2).

Лемма 3. *Для любых двух подпространств V_1 и V_2 их сумма $V_1 + V_2$ также будет линейным пространством.*

Доказательство. Возьмем произвольные векторы $a, b \in V_1 + V_2$,

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \qquad a_1, b_1 \in V_1, \quad a_2, b_2 \in V_2.$$

Тогда

$$a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \in V_1 + V_2.$$

Аналогично доказывается, что для $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in V_1 + V_2$, их произведение λa лежит в $V_1 + V_2$. Очевидно, что все условия определения линейного пространства будут выполнены, следовательно $V_1 + V_2$ является линейным пространством. $\square$

Теорема 4. $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_r$ — базис в $V_1 \cap V_2$, $\dim(V_1 \cap V_2) = r$. Т.к. $V_1 \cap V_2 \subset V_1$ и $V_1 \cap V_2 \subset V_2$, то каждом из двух подпространств, V_1 и V_2, этот базис можно дополнить до базиса.

Пусть $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+p}$ — базис в V_1, $\dim V_1 = r + p$; $e_1, \ldots, e_r, e_{r+p+1}, \ldots, e_{r+p+q}$ — базис в V_2, $\dim V_2 = r + q$. Докажем, что $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+p}, e_{r+p+1}, \ldots, e_{r+p+q}$ — базис в $V_1 + V_2$:

1) (линейная независимость). Пусть $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{r+p+q} e_{r+p+q} = 0$, тогда

$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+p} e_{r+p}}_{\in V_1} =$$
$$= \underbrace{-(\lambda_{r+p+1} e_{r+p+1} + \ldots + \lambda_{r+p+q} e_{r+p+q})}_{\in V_2} = v,$$

следовательно, $v \in V_1 \cap V_2$, и его можно разложить по базису подпространства $V_1 \cap V_2$, $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r$, тогда

$$0 = v - v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r + \lambda_{r+p+1} e_{r+p+1} + \ldots + \lambda_{r+p+q} e_{r+p+q},$$

следовательно

$$\lambda_{r+p+1} = \ldots = \lambda_{r+p+q} = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0,$$

т.к. $e_1, \ldots, e_r, e_{r+p+1}, \ldots, e_{r+p+q}$ линейно независимы (это базис V_2). Поэтому $v = 0$. Но тогда

$$v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+p} e_{r+p} = 0,$$

и из линейной независимости системы векторов $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+p}$ (это базис V_1) заключаем, что

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+p} = 0.$$

Итак, все $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, r+p+q$, следовательно $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+p}, e_{r+p+1}, \ldots, e_{r+p+q}$ линейно независимы.

2) (максимальность). Возьмем произвольный вектор $a \in V_1 + V_2$, $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in V_1$, $a_2 \in V_2$. Разложим векторы a_1 и a_2 по базисам в соответствующих подпространствах,

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+p} e_{r+p}, \\ a_2 &= \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_r e_r + \mu_{r+p+1} e_{r+p+1} + \ldots + \mu_{r+p+q} e_{r+p+q}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} a &= (\lambda_1 + \mu_1) e_1 + \ldots + (\lambda_r + \mu_r) e_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+p} e_{r+p} + \\ &+ \mu_{r+p+1} e_{r+p+1} + \ldots + \mu_{r+p+q} e_{r+p+q}, \end{aligned}$$

т.е. любой вектор $a \in V_1 + V_2$ есть линейная комбинация системы векторов $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+p}, e_{r+p+1}, \ldots, e_{r+p+q}$, следовательно, эта система векторов является базисом в $V_1 + V_2$, значит, $\dim(V_1 + V_2) = r + p + q$, откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма

Определение 5. Сумма подпространств $V_1 + V_2$ называется *прямой суммой* (обозначение $V_1 \oplus V_2$), если $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Следствие 6. $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

Доказательство. Утверждение следствия очевидно вытекает из предыдущей теоремы. $\square$

Лемма 7. *Следующие утверждения эквиваленты:*

(1) сумма $V_1 + V_2$ прямая;

(2) $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2)$;

(3) разложение любого вектора a вида $a = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, единственно;

(4) если $0 = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, то $v_1 = v_2 = 0$.

Доказательство. То, что (1) $\iff$ (2), вытекает из теоремы о размерностях суммы и пересечения.

(1) $\Rightarrow$ (4): Пусть $0 = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, но $v_1 \neq 0$, а следовательно и $v_2 \neq 0$, тогда получаем, что $v_2 = -v_1$, т.е. $v_2 \in V_1$ и , следовательно $V_1 \cap V_2 \ni v_2 \neq 0$, т.е. сумма не прямая.

(1) $\Leftarrow$ (4): Если сумма не прямая, то $\exists v \in V_1 \cap V_2$, $v \neq 0$, тогда $v \in V_1$, $-v \in V_2$ и $0 = v + (-v)$ — противоречие с 4).

Докажем (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть у некоторого вектора a есть два разложения, $a = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, $v_1, v_1' \in V_1$, $v_2, v_2' \in V_2$, тогда $0 = \underbrace{(v_1 - v_1')}_{\in V_1} + \underbrace{(v_2 - v_2')}_{\in V_2}$. Но тогда $v_1 - v_1' = v_2 - v_2' = 0$.

То, что (4) $\Leftarrow$ (3) очевидно, т.к. (4) — частный случай (3), что верно для любого вектора, верно и для нулевого вектора. $\square$

Понятие прямой суммы можно обобщить на любое конечное число подпространств: сумма $V_1 + \ldots + V_n$ будет прямой, если

$$\forall i = 1, \ldots, n \ \ V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_n) = \{0\}. \tag{1}$$

Если сумма $V_1 + \ldots + V_n$ прямая, то для любого вектора a из этой суммы разложение вида $a = v_1 + \ldots + v_n$, где $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, n$, единственно.

Замечание. Условие (1) более сильное, чем условие $V_i \cap V_j = \{0\}$ $\forall i, j = 1, \ldots, n$. Например, если взять три прямые (вектора, коллинеарные этим прямым), пересекающиеся в одной точке, то сумма любых двух из них будет прямой суммой, но сумма всех трех — нет, т.к. любой вектор третьей прямой можно представить в виде суммы векторов первых двух прямых, следовательно его разложение не будет единственно.

Внешняя прямая сумма

Определение 8. *Внешней прямой суммой* двух линейных пространств V_1, V_2 над одним полем $\mathbb{K}$ (не обязательно являющихся подпространствами одного пространства) называется новое линейное пространство $V_1 \oplus V_2$ над полем $\mathbb{K}$, состоящее из всех пар (v_1, v_2), где $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$, с операциями сложения и умножения на скаляры:

1) $(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$,

2) $\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$,

где $v_i, v_i' \in V_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Если при этом отождествить сами пространства V_1 и V_2 с подмножествами внешней прямой суммы следующим образом: $V_1 \leftrightarrow (V_1, 0)$ и $V_2 \leftrightarrow (0, V_2)$, то их можно рассматривать как подпространства пространства $V_1 \oplus V_2$. Такое отождествление позволяет отождествить $\mathbb{K} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}$ с $\mathbb{K}^n$.

Координаты

Определение 9. Пусть дано линейное пространство V и базис $e_1, \ldots, e_n$ этого пространства, тогда любой вектор $x \in V$ можно представить в виде $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ называются *координатами* вектора x в этом базисе.

Корректность определения координат следует из свойств базиса (линейная независимость и максимальность).

Введем некоторые соглашения для записи координат. Индексы у координат мы обычно будем писать не снизу, а сверху, т.е. не x_i, а x^i. Вместо длинной записи суммы $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$, или чуть более короткой $\sum_{i=1}^n x^i e_i$, мы часто будем писать $x^i e_i$, на самом деле подразумевая сумму (но не записывая знак суммирования). Координаты векторов мы часто будем записывать в виде столбцов, т.е. $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$. Также обычно верхний индекс будет соответствовать столбцам, а нижний — строкам.

Замена координат

Пусть нам даны два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$ одного векторного пространства, тогда можно записать следующие равенства:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{e}_1 & = & c_1^1 e_1 + \ldots + c_1^n e_n, \\ \ldots & & \ldots \quad \ldots \\ \widetilde{e}_n & = & c_n^1 e_1 + \ldots + c_n^n e_n, \end{array}$$

которые равносильны одному матричному равенству

$$(\widetilde{e}_1 \ldots \widetilde{e}_n) = (e_1 \ldots e_n) \begin{pmatrix} c_1^1 & \ldots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & \ldots & c_n^n \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & \ldots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & \ldots & c_n^n \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода* от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$.

Лемма 10. *Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — координаты вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$, а $\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n$ — координаты этого же вектора в базисе $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$. Тогда*

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Так как $x^j e_j = x = \widetilde{x}^i \widetilde{e}_i = \widetilde{x}^i e_j c_i^j = (\widetilde{x}^i c_i^j) e_j$, из линейной независимости векторов $e_1, \ldots, e_n$ следует равенство координат: $x^j = \widetilde{x}^i c_i^j \ \forall j$ (подразумевается суммирование по индексу i). □

Изоморфизмы векторных пространств

Определение 11. Пусть даны два линейных пространства V и W над одним полем $\mathbb{K}$. Тогда биективное (т.е. взаимно однозначное) отображение $f : V \to W$ называется *изоморфизмом*, если выполнены следующие условия (условия линейности):

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V$,

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)\ \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

Два линейных пространства V и W называются изоморфными ($V \cong W$), если между ними существует (хотя бы один) изоморфизм.

Лемма 12. *Если $f : V \to W$ — изоморфизм, то обратное отображение $f^{-1} : W \to V$ также будет изоморфизмом.*

Доказательство. Отметим сначала, что отображение f^{-1} существует, поскольку отображение f взаимно однозначно. Докажем только первый пункт, т.е., что $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)\ \forall w_1, w_2 \in W$ (второй пункт доказывается аналогично):

$$f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)) = f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2)) = w_1 + w_2 = f(f^{-1}(w_1 + w_2)),$$

следовательно $f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) = f^{-1}(w_1 + w_2)$, т.к. отображение f взаимно однозначно. $\square$

Изоморфность является отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами

- симметричности (если V изоморфно W, то W изоморфно V),
- рефлексивности (любое пространство изоморфно самому себе) и
- транзитивности (если V изоморфно W и W изоморфно U, то V изоморфно U).

Первые два свойства мы проверили, третье легко проверяется.