Лемма 13. *Если* $\dim V = n$, *то* V *изоморфно пространству* $\mathbb{K}^n$ *столбцов (строк) из* n *элементов.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, тогда построим отображение $f : V \to \mathbb{K}^n$ следующим образом: если $x = x^i e_i$, то $f(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$. Легко проверить, что это отображение будет изоморфизмом, а следовательно $V \cong \mathbb{K}^n$. □

Следствие 14. *Если* $\dim V = \dim W$, *то* $V \cong W$.

Доказательство. Пусть $\dim V = \dim W = n$, тогда $V \cong \mathbb{K}^n \cong W$. □

Верно и обратное:

Лемма 15. *Если* $V \cong W$, *то* $\dim V = \dim W$. $f: W \to V$

Доказательство. Допустим, что $\dim V < \dim W$, пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в W, тогда вектора $f(e_1), \ldots, f(e_n) \in V$ должны быть линейно независимыми. Действительно, если $\lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = 0$, то, применив к обеим частям этого равенства отображение f^{-1}, получим $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$, откуда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Но их линейная независимость противоречит предположению $\dim V < n$. □

Лемма 16. *Пусть* $\dim V = \dim W$, *а отображение* $f : V \to W$ *удовлетворяет условиям линейности:*

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V$,

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)\ \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ *— базис в* V. *Тогда* f *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ *— базис в* W.

Доказательство. Если f — изоморфизм, то из равенства $\lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = 0$ следует $f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = 0$, откуда заключаем, что $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$, значит, все $\lambda_i = 0$.

Обратно, пусть $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ — базис в W. Для проверки взаимной однозначности отображения f достаточно проверить, что отображение f^{-1} корректно определено. Пусть $w \in W$ имеет разложение по базису $w = w^1 f(e_1) + \ldots + w^n f(e_n)$. Тогда определим отображение $g : W \to V$ равенством $g(w) = w^1 e_1 + \ldots + w^n e_n$. Очевидная проверка показывает, что $g = f^{-1}$. □

Двойственное векторное пространство

Напомним, что линейным функционалом на векторном пространстве V (над полем $\mathbb{K}$) называется отображение $f : V \to \mathbb{K}$, удовлетворяющее условиям линейности

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in V$;
2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

Зададим на множестве V' всех линейных функционалов $f : V \to \mathbb{K}$, операции:

1) $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$, $f_1, f_2 \in V'$;
2) $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$, $f \in V'$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Эти операции превращают V' в линейное пространство. Это пространство называется *двойственным пространством* к V.

Лемма 17. $V \cong V'$. т.е. $\dim V = \dim V'$

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в V. Определим функционалы $\varepsilon^i \in V'$, $i = 1, \dots, n$, равенствами $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$ (δ^i_j — символ Кронекера, т.е. $\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Поскольку $f(x^i e_i) = x^i f(e_i)$, то значение функционала на произвольном векторе полностью определяется значениями функционала на базисных векторах и координатами этого вектора, т.е. функционалы ε^i полностью заданы нашими условиями.

Докажем, что $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ будет базисом в V'. Для этого нужно доказать линейную независимость и максимальность.

1) линейная независимость:

Если $f = \lambda_1 \varepsilon^1 + \ldots + \lambda_n \varepsilon^n = 0$ (равенство нулю в V' означает, что $f(v) = 0$ для любого вектора $v \in V$), то $f(e_i) = \lambda_i = 0$, т.е. все $\lambda_i = 0$. Следовательно эти функционалы линейно независимы.

2) максимальность:

надо показать, что $\forall f \in V'$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ такие что $f = \lambda_i \varepsilon^i$. Возьмем произвольный функционал $f \in V'$, тогда, если $x = x^i e_i$, то $f(x) = x^i f(e_i)$. Возьмем $\lambda_i = f(e_i)$, тогда получим, что

$$f(x) = x^i f(e_i) = x^i \lambda_i \overset{?}{=} \lambda_i x^j \varepsilon^i(e_j) = \lambda_i \varepsilon^i(x^j e_j) = \lambda_i \varepsilon^i(x), \quad f = \lambda_i \varepsilon^i$$

что и требовалось доказать. □

Базис $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ называется *двойственным базисом* к базису $e_1, \dots, e_n$.

Пусть нам даны базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$ в пространстве V и двойственные к ним базисы $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ и $\widetilde{\varepsilon}^1, \ldots, \widetilde{\varepsilon}^n$ в пространстве V'. Пусть C — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$, найдем матрицу перехода от базиса $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ к $\widetilde{\varepsilon}^1, \ldots, \widetilde{\varepsilon}^n$. Возьмем произвольный функционал $f \in V'$, тогда $f = f_i \varepsilon^i = \widetilde{f}_j \widetilde{\varepsilon}^j$, где f_i и $\widetilde{f}_j$ — это координаты функционала f в базисах $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ и $\widetilde{\varepsilon}^1, \ldots, \widetilde{\varepsilon}^n$ соответственно. Вычислим значение функционала f на векторе $\widetilde{e}_k$ двумя способами. С одной стороны, $f(\widetilde{e}_k) = \widetilde{f}_j \widetilde{\varepsilon}^j(\widetilde{e}_k) = \widetilde{f}_k$, а с другой стороны, $f(\widetilde{e}_k) = f_i \varepsilon^i(c_k^j e_j) = f_i c_k^i$, так как $(\widetilde{e}_1 \ldots \widetilde{e}_n) = (e_1 \ldots e_n)C$. Отсюда получаем, что $\widetilde{f}_k = f_i c_k^i$. Следовательно $(\widetilde{f}_1 \ldots \widetilde{f}_n) = (f_1 \ldots f_n)C$, или (после транспонирования, обозначенного индексом t) $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = (C^{-1})^t \begin{pmatrix} \widetilde{f}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_n \end{pmatrix}$.

Сравнивая эту формулу с формулой изменения координат при замене базиса в линейном пространстве, получаем, что матрицей перехода от базиса $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ к базису $\widetilde{\varepsilon}^1, \ldots, \widetilde{\varepsilon}^n$ является матрица $(C^{-1})^t$, т.е. эти базисы связаны равенством $(\widetilde{\varepsilon}^1 \ldots \widetilde{\varepsilon}^n) = (\varepsilon^1 \ldots \varepsilon^n)(C^{-1})^t$.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Лемма 18. *Пусть C — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$ в линейном пространстве V. Тогда двойственные базисы $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ и $\widetilde{\varepsilon}^1, \ldots, \widetilde{\varepsilon}^n$ к этим базисам связаны равенством $(\widetilde{\varepsilon}^1 \ldots \widetilde{\varepsilon}^n) = (\varepsilon^1 \ldots \varepsilon^n)(C^{-1})^t$; а координаты функционала f в этих двойственных базисах связаны равенством $(\widetilde{f}_1 \ldots \widetilde{f}_n) = (f_1 \ldots f_n)C$.*

Мы доказали, что $V \cong V'$, однако выбор изоморфизма $f : V \to V'$ зависит от выбора базиса в пространстве V. Действительно, пусть $V = \mathbb{R}$, тогда базисом является любое ненулевое число $e \in \mathbb{R}$. Выберем также еще один базис $\widetilde{e} = \lambda e$, $\lambda \neq 0, 1$. Пусть ε — базис в V', двойственный к e, т.е. $\varepsilon(e) = 1$, а $\widetilde{\varepsilon}$ — двойственный базис к $\widetilde{e}$, т.к. $\widetilde{\varepsilon}(\widetilde{e}) = 1$, то $\widetilde{\varepsilon} = \lambda^{-1}\varepsilon$. Изоморфизм $f : V \to V'$, отвечающий базису e, задан следующим образом: $\forall x = \alpha e$, $f(x) = \alpha\varepsilon$. Перейдем к базису $\widetilde{e}$, тогда изоморфизм $\widetilde{f} : V \to V'$ будет задаваться следующим образом: $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(\alpha\lambda^{-1}\widetilde{e}) = \alpha\lambda^{-2}\varepsilon$. Т.е. разные выборы базиса в пространстве V дают разные изоморфизмы!

Канонический изоморфизм между пространством и его вторым двойственным

Рассмотрим пространство, двойственное к двойственному. Оно называется *вторым двойственным* пространством: $V'' = (V')'$. Элементы пространства V'' — это линейные функционалы на пространстве V', т.е. функции, аргументами которых являются элементы множества V'. Очевидно, что $\dim V'' = \dim V' = \dim V$.

Определим отображение $\varphi : V \to V''$. Для каждого вектора $x \in V$ функционал $\varphi(x) = \varphi_x$ должен отображать функционалы (элементы множества V') в поле скаляров. Пусть $f \in V'$ Определим значение $\varphi_x(f) = f(x)$. Очевидно, что φ_x — это линейное отображение $V' \to \mathbb{K}$. Кроме того, $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ и $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$. Докажем, что φ есть изоморфизм. Для этого сначала проверим, что из условия $\varphi_x = 0$ следует, что $x = 0$. Условие $\varphi_x = 0$ означает, что для любого функцинала $f \in V'$ $\varphi_x(f) = 0$, т.е. $f(x) = 0$. Но единственный вектор в V, на котором любой функционал равен нулю, есть нулевой вектор, $x = 0$. Действительно, если это неверно, выберем базис $e_1 = x, e_2, \dots, e_n$ в V, тогда для функционала ε^1 имеем $\varepsilon^1(x) = 1 \neq 0$.

Так как $\varphi_x = 0 \iff x = 0$, то для произвольного базиса $e_1, \dots, e_n$ в V векторы $\varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_n}$ линейно независимы. Но, поскольку $\dim V'' = n$, эти векторы составляют базис пространства V'', следовательно φ — изоморфизм. по лемме 16

При построении этого изоморфизма, мы ни разу не использовали базис (базис мы использовали только при доказательстве того, что это изоморфизм), поэтому этот изоморфизм не зависит от выбора базиса в пространстве V, а его конструкция универсальна и годится для любого пространства V! Такие изоморфизмы называются *каноническими.*

Т.к. V и V'' изоморфны *канонически*, то мы можем эти два пространства просто отождествить, и смотреть на пространства V и V' как на двойственные друг к другу (V' — двойственное к V, а $V = V''$ — двойственное к V').

Легко видеть, что базис $\varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_n}$ в V'' — двойственный к базису $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$, если $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ — двойственный базис к $e_1, \dots, e_n$. При отождествлении пространств V и V'', базисы $\varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_n}$ и $e_1, \dots, e_n$ отождествятся, и тогда базисы $e_1, \dots, e_n$ и $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ будут взаимно двойственными.

Пример: двойственное пространство пространства многочленов

Рассмотрим пространство $\mathbb{K}_n[x]$ многочленов степени не выше n с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ от переменной $x \in \mathbb{K}$. Зафиксируем произвольное $x = x_0$, и каждому многочлену $p(x)$ поставим в соответствие число $p(x) \mapsto p(x_0) \in \mathbb{K}$. Каждое x_0 задает свое отображение $ev_{x_0} : \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}$. Т.к.

$$ev_{x_0}(p(x) + q(x)) = p(x_0) + q(x_0) = ev_{x_0}(p(x)) + ev_{x_0}(q(x))$$

и $ev_{x_0}(\lambda p(x)) = \lambda ev_{x_0}(p)x$, то отображение ev_{x_0} линейно для каждого x_0. Таким образом, каждое значение x_0 задает элемент ev_{x_0} двойственного пространства $\mathbb{K}_n[x]'$.

Лемма 19. *Если $x_0, x_1, \dots, x_n$ — попарно различные значения, то $ev_{x_0}, ev_{x_1}, \dots, ev_{x_n}$ будет базисом в двойственном пространстве $\mathbb{K}_n[x]'$.*

Доказательство. Если нам удастся построить базис в пространстве $\mathbb{K}_n[x]$, который будет двойственным к $ev_{x_0}, ev_{x_1}, \dots, ev_{x_n}$, то отсюда будет следовать, что $ev_{x_0}, ev_{x_1}, \dots, ev_{x_n}$ будет двойственным к базису в $\mathbb{K}_n[x]$, т.е. будет базисом в $\mathbb{K}_n[x]'$. Построим такой базис:

Нам нужно найти такие многочлены $p^0(x), p^1(x), \dots, p^n(x)$, что $ev_{x_i}(p^j(x)) = \delta_i^j$, т.е. значение i-й функции ev_{x_i} на всех базисных многочленах, кроме $p^i(x)$, равно 0, а на $p^i(x)$ равно 1. Эти многочлены можно построить, используя, например, интерполяционную формулу Лагранжа:

$$p^i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Докажем, что эти многочлены образуют базис.

1) линейная независимость: $p(x) = \lambda_i p^i(x) = 0$ только, если все $\lambda_i = 0$, т.к. $p(x_i) = \lambda_i\ \forall i$.

2) максимальность: возьмем произвольный многочлен $p(x)$, тогда $p(x) = p(x_i)p^i(x)$, т.е. является линейной комбинацией многочленов $p^i(x)$.

(здесь, согласно тензорным обозначениям, подразумевается суммирование по индексу i).

Таким образом, мы доказали, что $p^0(x), p^1(x), \dots, p^n(x)$ — базис в $\mathbb{K}_n[x]$, а значит двойственный к нему базис $ev_{x_0}, ev_{x_1}, \dots, ev_{x_n}$ будет базисом в $\mathbb{K}_n[x]'$. □

$\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad ?$$

$x = x^i e_i$ (подразумевается сумма по i)

$y = y^i e_i$

сумма векторов соотв. сумм. их координат

$$x+y = \underbrace{(x^i+y^i)}_{\text{коорд.}} e_i$$

$V \longrightarrow \mathbb{K}^n$

x^i — коорд. в базисе e_i

$f(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$\tilde{e}_i$ другой базис

$\tilde{f} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$\tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix}$

f и $\tilde{f}$ разли…

изомор…

изоморфи…

обычно бе…

много.

сли f взаимно однозн., то из $f(a)=0$ след. $a=0$.

кр. опр. $f(0)=f(0\cdot a)=0\cdot f(a)=0$.

$$f(v)=g(f(v^i e_i))=g(v^i f(e_i))=v^i \underbrace{g(f(e_i))}$$

$v=v^i e_i$
сумма по i

$g(f(e_i))=e_i$
обрат. по опр.

$$\delta^j_i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\varepsilon^i \in V'$ лин. ф-я на V

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$$

$\varepsilon^i(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n)$

$= \underbrace{x^1 \varepsilon^i(e_1)}_{=0} + \ldots + \underbrace{x^i \varepsilon^i(e_i)}_{= x^i} + \ldots$

$x \in V, \quad x = x^j e_j \quad (= x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n)$

$$\varepsilon^i(x) = \underline{\varepsilon^i(x^j e_j)} = \underbrace{x^j \varepsilon^i(e_j)}_{\text{сумма по } j} = x^i$$

$j = i$ — не 0

$= e_i \qquad f(v) = 0 \qquad f(e_i) = 0$

$= \lambda_1 \varepsilon^1 + \ldots + \lambda_n \varepsilon^n$

$$(e_i) = \underbrace{\lambda_1 \varepsilon^1(e_i)}_{0} + \ldots + \underbrace{\lambda_i \varepsilon^i(e_i)}_{= \lambda_i} + \ldots + \underbrace{\lambda_n \varepsilon^n(e_i)}_{0} = 0$$

i - произв. $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_n x^n =$$

$$x^i = \varepsilon^i($$

$$= \varepsilon^i(x^j e$$

$$\varepsilon^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$= \lambda_1 \varepsilon^1(x) + \ldots + \lambda_n \varepsilon^n(x) =$$

$$= \lambda_1 \varepsilon^1(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n) + \ldots + \lambda_n \varepsilon^n(x^1 e$$

$$\varepsilon^i(x^j e_j)$$

$$= (\lambda_1 \varepsilon^1 + \ldots + \lambda_n \varepsilon^n)(x) = \lambda_i \varepsilon^i$$

самом V $\qquad \underline{\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix}}$. $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \tilde{C}$

V' $\quad f = f_i \varepsilon^i = \tilde{f}_i \tilde{\varepsilon}^i$

координаты f

$$\tilde{\varepsilon}^j(\tilde{e}_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

$$\varepsilon^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\tilde{e}_k = c^j_k e_j = c^1_k e_1 + \ldots +$$

$V \longrightarrow K^n$

не канонические

$V \longrightarrow V'$

т. е. зависят от выбора базиса в

$x \in V$

$x \in V.$

$\varphi_x(\cdot)$

$\varphi_x \in V''$

можем подст. лин. функции

$\varphi_x(f) = f(x)$

$\varphi_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$f \in V'$

$\varphi_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Если $\dim V<\infty$, то все эл-ты V'' им...

вид φ_x для нек-рого $x \in V$.

V состоит из векторов, вектора мы зап...

в виде столбцов координат, коорд. индексир. ...
верх...

V' состоит из лин. ф-ий, коорд. индекс. н...
ни...

V'' — это изо. с V $\quad x \longleftrightarrow \varphi_x$

$= \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}[x]$ без огр степени. $\dim \mathbb{R}[x]$

$\exists$ беск. счётный базис

$1, x, x^2, \dots, x^4, \dots$

$\mathbb{R}[x]'$ $\quad$ $\{ev_x, x \in \mathbb{R}\}$ лин. нез., и их континуум