Лемма 1. *Векторы* $a_1, \dots, a_n$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда* $\det G(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Доказательство. Если векторы $a_1, \dots, a_n$ линейно зависимы, то, без ограничения общности, можно считать, что $a_n = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$. Тогда $\mathrm{Vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{Vol}_{n-1} \Pi(a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot \underbrace{d(a_n, \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle)}_{=0} = 0$, следовательно, по предыдущей теореме, $\det G(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Пусть теперь $\det G(a_1, \dots, a_n) = 0$. Покажем линейную зависимость векторов $a_1, \dots, a_n$. Если $a_1 = 0$, то линейная зависимость очевидна. Предположим, что $a_1 \neq 0$, и рассмотрим последовательность чисел

$$0 \neq \mathrm{Vol}_1 \Pi(a_1), \mathrm{Vol}_2(a_1, a_2,), \dots, \mathrm{Vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Существует такой номер k, что $\mathrm{Vol}_{k-1} \Pi(a_1, \dots, a_{k-1}) \neq 0$, а $\mathrm{Vol}_k \Pi(a_1, \dots, a_k)=0$. Т.к. $0 =$ $\mathrm{Vol}_k \Pi(a_1, \dots, a_k) = \mathrm{Vol}_{k-1} \Pi(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot d(a_k, \langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle)$, то $d(a_k, \langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle) = 0$, т.е. $a_k \in \langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$. Следовательно векторы $a_1, \dots, a_k$, а ,значит, и $a_1, \dots, a_n$, линейно зависимы. □

Пусть V — евклидово или эрмитово пространство, $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ — два базиса в пространстве V, и $C = \begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}$ — матрица перехода от первого базиса к второму. Посмотрим, как связаны матрицы Грама $G = G(a_1, \dots, a_n)$ и $G' = G(b_1, \dots, b_n)$. Поскольку $b_k = c_k^i a_i$ и элементы матрицы G' равны $g'_{ij} = (b_i, b_j) = (c_i^k a_k, c_j^l a_l) = \overline{c_i^k}(a_k, a_l) c_j^l = \overline{c_i^k} g_{kl} c_j^l$, то $G' = \overline{C}^t G C$. Если базис $a_1, \dots, a_n$ был ортонормированным, то $G = E = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix}$ и $G' = \overline{C}^t C$.

Утверждение 2. *Произвольная квадратная матрица* G *является матрицей Грама для некоторого набора линейно независимых векторов тогда и только тогда, когда существует такая невырожденная матрица* C*, что* $G = \overline{C}^t C$.

Доказательство. $e_1, \dots, e_n$

$\Rightarrow$: пусть $G = G(a_1, \dots, a_n)$, выберем в пространстве ортонормированный базис, пусть C — матрица перехода от этого ортонормированного базиса в базис $a_1, \dots, a_n$, тогда $G = \overline{C}^t C$.

$\Leftarrow$: пусть $G = \overline{C}^t C$, тогда C можно считать матрицей перехода от некоторого ортонормированного базиса $a_1, \dots, a_n$ к базису $b_1, \dots, b_n$, и тогда G — это матрица Грама для векторов $b_1, \dots, b_n$. □

Билинейные функции (формы)

Определение 3. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Функция $g : V \times V \to \mathbb{K}$ называется *билинейной функцией*, если она линейна по каждому аргументу, т.е.

$$\begin{aligned} g(a_1 + a_2, b) &= g(a_1, b) + g(a_2, b) && \forall a_1, a_2, b \in V; \\ g(\lambda a, b) &= \lambda g(a, b) && \forall a, b \in V, \lambda \in \mathbb{K}; \\ g(a, b_1 + b_2) &= g(a, b_1) + g(a, b_2) && \forall a, b_1, b_2 \in V; \\ g(a, \lambda b) &= \lambda g(a, b) && \forall a, b \in V, \lambda \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Если выбрать базис $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве V, то билинейную функцию можно записать матрицей $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Причем (если базис зафиксирован), то существует взаимно-однозначное соответствие между квадратными матрицами и билинейными функциями, т.е. любая матрица задает какую-то функцию и разные матрицы задают разные функции.

Пример.

Если $g(a, b) = (a, b)$ — обычное скалярное произведение в евклидовом пространстве, то g будет билинейной функцией, а ее матрица G будет просто матрицей Грама. Поэтому на матрицу билинейной функции можно смотреть как на обобщение матрицы Грама.

Если G — матрица билинейной функции g, то значение этой функции на двух любых векторах восстанавливается по формуле $g(x, y) = g(x^i e_i, y^j e_j) = x^i g(e_i, e_j) y^j = x^i g_{ij} y^j$ или, в матричной форме

$$g(x, y) = (x^1 \ldots x^n) G \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

При замене базиса $e'_k = c^i_k e_i$, где $C = (c^i_k)$ — матрица перехода, матрица билинейной функции изменится следующим образом:

$$g'_{kl} = g(e'_k, e'_l) = g(c^i_k e_i, c^j_l e_j) = c^i_k g(e_i, e_j) c^j_l = c^i_k g_{ij} c^j_l,$$

т.е. $G' = C^t G C$, где G' — матрица той же билинейной функции в новом базисе.

На множестве билинейных функций можно естественным образом определить структуру линейного пространства (над тем же полем $\mathbb{K}$), причем размерность этого пространства будет n^2, где $n = \dim V$. Обозначается оно $B(V)$. Очевидно, что $B(V) \cong Mat(n \times n)$.

Определение 4. *Рангом* билинейной функции называется ранг ее матрицы в произвольном базисе, $\operatorname{rk} g = \operatorname{rk} G$.

Формулы перехода к другому базису показывают, что это определение корректно. Действительно, поскольку матрица перехода C обратима, $\operatorname{rk} C^t GC = \cancel{\operatorname{rk} C^t GC} = \operatorname{rk} G$.

Определение 5. *Левым ядром* билинейной функции $g \in B(V)$ называется множество $G_L = \{a \in V : g(a, b) = 0 \ \forall b \in V\}$. *Правым ядром* билинейной функции называется множество $G_R = \{a \in V : g(b, a) = 0 \ \forall b \in V\}$.

Очевидно, что множества G_L и G_R являются подпространствами в V.

Лемма 6. *Размерности левого и правого ядер совпадают и равны* $\dim G_L = \dim G_R = \dim V - \operatorname{rk} g$.

Доказательство. Запишем в матричной форме условие принадлежности вектора $x = (x^1 \dots x^n)$ левому ядру G_L:

$g(x, y)$

$$x = (x^1 \dots x^n) \in G_L \Leftrightarrow \underbrace{(x^1 \dots x^n) G \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}}_{=g(x,y)} = 0, \ \forall \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим строку $(x^1 \dots x^n)G = (u^1 \dots u^n)$. Для нее должно выполняться $\sum_{i=1}^n u^i y^i = 0$ для любых значений $(y^1 \dots y^n)$, в частности и для набора $y^1{=}0 \dots y^{k-1}{=}0 \ y^k{=}1 \ y^{k+1}{=}0 \dots y^n{=}0)$. Отсюда следует, что $u^k = 0$, а в силу произвольности выбора номера k получаем, что вся строка $(u^1 \dots u^n) = (x^1 \dots x^n)G$ является нулевой. Транспонируем равенство $(x^1 \dots x^n)G = 0$:

$$x = (x^1 \dots x^n) \in G_L \Leftrightarrow G^t \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = 0.$$

$$G \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = 0$$

Находим размерность пространства решений последней системы:

$$\dim G_L = \dim V - \operatorname{rk} G^t = \dim V - \operatorname{rk} G = \dim V - \operatorname{rk} g.$$

Аналогичным образом сопоставляя правому ядру G_R систему однородных уравнений и вычисляя размерность пространства ее решений, завершаем доказательство. □

Определение 7. Билинейная функция g называется *невырожденной*, если $\dim G_L = \dim G_R = 0$ (это условие равносильно тому, что $\det G \neq 0$ или $\operatorname{rk} g = \dim V$).

Примеры:

1) пусть $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем левое и правое ядро: $g(a, b) = (a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = a^1 b^2$. Следовательно, $G_L = \langle e_2 \rangle$ и $G_R = \langle e_1 \rangle$, где e_1, e_2 — базис.

2) билинейная функция может быть невырождена на всем пространстве, но быть вырожденной на подпространстве! Например, пусть $G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, рассмотрим вектор $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и подпространство $V = \langle a \rangle$. Т.к. $g(a, a) = 0$, то для любых двух векторов $b, c \in V$ (т.е. коллинеарных вектору a) $g(c, b) = 0$, т.е. ограничение билинейной функции g на подпространство V вырождено, в то время как сама функция g невырождена, т.к. $\det G \neq 0$. Отметим, что в этом примере левое и правое ядро совпали, потому (как мы увидим далее) что функция симметрична.

$$(1, 1)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

*

Симметричные и кососимметричные билинейные функции

Если $g : V \times V \to \mathbb{K}$ — билинейная функция, то функция $(a, b) \mapsto g(b, a)$, полученная из функции g заменой первого и второго аргументов, также является билинейной функцией. Мы будем ее обозначать g^t, $g^t(a, b) = g(b, a)$.

Определение 8. Билинейная функция g называется *симметричной*, если $g^t = g$, т.е. если $g(b, a) = g(a, b)$; *кососимметричной*, если $g^t = -g$, т.е. если $g(b, a) = -g(a, b)$.

Утверждение 9. *Если билинейная функция симметрична (или кососимметрична), то ее левое и правое ядра совпадают.*

Доказательство. Очевидно (см. определение левого и правого ядер). □

В случае (косо)симметричной билинейной функции g корректно определено ее ядро $\operatorname{Ker} g = G_l = G_R$.

Определение 10. Функция $f : V \to \mathbb{K}$ называется *квадратичной функцией (формой)*, если существует такая билинейная функция g, что $f(a) = g(a, a)$ для любого $a \in V$.

Заметим, что если f — квадратичная функция, то

$$f(a + b) = g(a + b, a + b) = \overset{f(a)}{g(a, a)} + g(a, b) + g(b, a) + \overset{f(b)}{g(b, b)},$$

следовательно, $g(b, a)+g(a, b) = f(a+b)-f(a)-f(b)$. Если поле $\mathbb{K}$ не характеристики 2 (поля характеристики 2 мы вообще далее не будем рассматривать, поскольку нам часто придется использовать деление пополам), то определим билинейную функцию h равенством $h(a, b) = \frac{1}{2}(g(a, b)+g(b, a))$. Эта функция является симметричной и $h(a, a) = g(a, a) = f(a)$, т.е. ее можно использовать вместо произвольной функции g в определении квадратичной функции.

Таким образом, определение квадратичной функции можно сделать более жестким, а именно потребовать симметричность функции g.

Мы получили, что любая симметричная билинейная функция g задает квадратичную функцию f равенством $f(a) = g(a, a)$, и наоборот, по формуле $g(a, b) = \frac{1}{2}(f(a+b) - f(a) - f(b))$ любая квадратичная функция задает симметричную билинейную функцию. Ясно, что это соответствие взаимно однозначно, когда характеристика поля $\mathbb{K}$ отлична от 2.

Утверждение 11. *Любая билинейная функция допускает единственное разложение в сумму симметричной и кососимметричной билинейных функций.*

Доказательство.

Существование указанного разложения очевидно, т.к. $g(x, y) = \frac{1}{2}(g(x, y) + g(y, x)) + \frac{1}{2}(g(x, y) - g(y, x))$.

Единственность. Сначала убедимся, что если билинейная функция одновременно симметрична и кососимметрична, то она нулевая. Действительно, если $g(a, b) = g(b, a) = -g(b, a)$, то $2g(b, a) = 0$, поэтому (характеристика поля не равна 2) $g(b, a) = 0$ для всех a, b.

Пусть теперь функция g обладает двумя разложениями указанного вида, $g = g_1 + g_2 = h_1 + h_2$, где g_1, h_1 симметричны, а g_2, h_2 кососимметричны. Тогда $0 = (g_1 - h_1) + (g_2 - h_2)$, откуда следует, что как функция $g_2 - h_2$, так и функция $g_1 - h_1$, должна быть одновременно симметричной и кососимметричной, поэтому обе эти функции равны нулю. □

*

Метод Лагранжа выделения полных квадратов и нормальный вид симметричной функции

Теорема 12. *1) у любой симметричной билинейной функции на вещественном векторном пространстве существует базис, в котором ее матрица имеет диагональный вид с числами* 0, ± 1 *на диагонали.*

2) у любой симметричной билинейной функции на комплексном векторном пространстве существует базис, в котором ее матрица имеет диагональный вид с числами 0, 1 *на диагонали.*

Доказательство.

Для приведения матрицы симметричной билинейной функции к нормальному виду воспользуемся методом Лагранжа выделения полных квадратов.

Мы установили ранее, что любая симметричная билинейная функция $g(x,y)$ однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме $Q(x) = g(x,x)$. Будем приводить к нормальному виду квадратичную форму $Q(x) = g_{11}(x^1)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + \ldots$.

Возможны три случая:

а) Коэффициент g_{11} при квадрате $(x^1)^2$ не равен нулю. Выделим полный квадрат, содержащий $(x^1)^2$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= g_{11}\Big((x^1)^2 + \frac{2g_{12}}{g_{11}}x^1x^2 + \ldots + \frac{2g_{1n}}{g_{11}}x^1x^n\Big) + \sum_{i,j>1} g_{ij}x^ix^j = \\ &= g_{11}\Big(x^1 + \frac{g_{12}}{g_{11}}x^2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{g_{11}}x^n\Big)^2 - \sum_{i,j>1}\frac{g_{1i}g_{1j}}{g_{11}}x^ix^j + \sum_{i,j>1} g_{ij}x^ix^j. \end{aligned}$$

Сделав замену координат

$$\begin{cases} \widetilde{x}^1 = x^1 + \frac{g_{12}}{g_{11}}x^2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{g_{11}}x^n, \\ \widetilde{x}^2 = x^2, \\ \ldots \\ \widetilde{x}^n = x^n. \end{cases}$$

получим $Q(x) = g_{11}(\widetilde{x}^1)^2 + \ldots$, где многоточие стоит вместо слагаемых, не содержащих переменную $\widetilde{x}^1$.

б) Имеется ненулевое слагаемое вида $g_{ii}(x^i)^2$ с $i > 1$. В этом случае, мы можем сделать другую замену координат:

$$\begin{cases} x^i &= \widetilde{x}^1, \\ x^1 &= \widetilde{x}^i, \\ x^k &= \widetilde{x}^k,\ k \neq 1, i. \end{cases}$$

После этой замены коэффициент $\widetilde{g}_{11} = g_{ii}$ перед $(\widetilde{x}^1)^2$ уже отличен от нуля, что сводит задачу к предыдущему случаю.

в) Все коэффициенты g_{ii} при квадратах координат $(x^i)^2$ равны нулю. Этот случай можно свести к б) линейной заменой координат: сначала мы найдем ненулевое слагаемое в $Q(x)$ вида $2g_{kl}x^kx^l$ (этого нельзя сделать только у формы тождественно равной нулю), а затем сделаем такую замену координат:

$$\begin{cases} x^k &= \widetilde{x}^k + \widetilde{x}^l, \\ x^l &= \widetilde{x}^k - \widetilde{x}^l, \\ x^m &= \widetilde{x}^m,\ m \neq k, l \end{cases}$$

После этой замены (только уже в новых координатах) $x^kx^l = (\widetilde{x}^k)^2 - (\widetilde{x}^l)^2$ и у нас есть на выбор два квадрата $2g_{kl}(\widetilde{x}^k)^2$ и $2g_{kl}(\widetilde{x}^l)^2$.

После выделения полного квадрата $(\widetilde{x}^1)^2$ оставшиеся в $Q(x)$ слагаемые, не содержащие $\widetilde{x}^1$, представляют собой квадратичную форму уже от меньшего числа неизвестных. Применив очевидное индуктивное предположение получим, что $Q(x) = \widetilde{g}_{11}(\widetilde{x}^1)^2 + \widetilde{g}_{22}(\widetilde{x}^2)^2 + \ldots + \widetilde{g}_{nn}(\widetilde{x}^n)^2$. Говоря другими словами, в новом базисе матрица $\widetilde{G}$ квадратичной функции $Q(x)$ будет диагональной с элементами $\widetilde{g}_{11}, \widetilde{g}_{22}, \ldots, \widetilde{g}_{nn}$ на диагонали.

Далее изучение вещественного случая будет отличаться от комплексного. "Меняя местами"переменные, т.е. делая преобразования координат как в случае б), мы можем добиться того, что положительные коэффициенты $\widetilde{g}_{ii} > 0$ идут первыми (если они есть конечно), затем отрицательные $\widetilde{g}_{ii} < 0$, и наконец нулевые $\widetilde{g}_{ii} = 0$:

$$\widetilde{g}_{11} > 0, \ldots, \widetilde{g}_{kk} > 0, \widetilde{g}_{k+1,k+1} < 0, \ldots, \widetilde{g}_{k+l,k+l} < 0, \widetilde{g}_{k+l+1,k+l+1} = 0, \ldots, \widetilde{g}_{k+l+s,k+l+s} = 0.$$

Эту диагональную матрицу можно упростить еще больше, сделав следующее преобразование "гомотетии":

$$\begin{cases} x'^1 & = & \sqrt{|\widetilde{g}_{11}|}\widetilde{x}^1, \\ \ldots, & & \\ x'^{k+l} & = & \sqrt{|\widetilde{g}_{k+1,k+1}|}\widetilde{x}^{k+l}, \\ x'^m & = & \widetilde{x}^m,\ k+l \le m \le n \end{cases}$$

Окончательно (в системе координат $(x'^1, \ldots, x'^n)$) вид нашей квадратичной формы будет таков:

$$Q(x) = (x'^1)^2 + \ldots + (x'^k)^2 - (x'^{k+1})^2 - \ldots - (x'^{k+l})^2.$$

Данный вид называется **нормальным видом вещественной квадратичной формы** $Q(x)$.

В комплексном же случае нет нужды "сортировать"квадраты координат на положительные и отрицательные, достаточно пустить подряд сначала ненулевые квадраты, а корень можно извлечь непосредственно из $\widetilde{g}_{ii}$:

$$\begin{cases} x'^1 & = & \sqrt{\widetilde{g}_{11}}\widetilde{x}^1, \\ \ldots, & & \\ x'^r & = & \sqrt{\widetilde{g}_{r,r}}\widetilde{x}^r, \\ x'^m & = & \widetilde{x}^m,\ r \le m \le n \end{cases}$$

И в системе координат $(x'^1, \ldots, x'^n)$) вид нашей комплексной квадратичной формы (называемый **нормальным видом комплексной квадратичной формы**)будет выглядеть так:

$$Q(x) = (x'^1)^2 + \ldots + (x'^r)^2.$$

Переходя к соответствующей вещественной симметричной билинейной форме, мы заключаем, что для нее существует базис, в котором она имеет нормальный вид

$$g(x, y) = x^1y^1 + \ldots + x^ky^k - x^{k+1}y^{k+1} - \ldots - x^{k+l}y^{k+l}.$$

Аналогично, комплексная билинейная симметрическая функция имеет нормальный вид

$$g(x, y) = x^1y^1 + \ldots + x^ry^r.$$

Очевидно, что число r ненулевых квадратов равняется рангу данной формы. □

*

Закон инерции квадратичной формы

Теперь обсудим вопрос о единственности нормального вида квадратичной формы (симметричной билинейной функции). Для комплексной билинейной симметричной функции нормальный вид определяется единственным числом — рангом r квадратичной (билинейной) функции, поэтому не зависит от способа приведения к нормальному виду. Оставшиеся два случая похожи друг на друга, поэтому обсудим один из них — случай вещественной симметричной билинейной функции. Нормальный вид ее матрицы

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение три числа: k — количество единиц l — количество минус единиц, s — количество нулей. Видно, что $k+l = \operatorname{rk} g$, $s = \dim W - \operatorname{rk} g$ следовательно, $k+l$ и s не зависят от выбора базиса.

Определение 13. Набор чисел (k, l, s) называется *сигнатурой* вещественной квадратичной функции (симметричной билинейной функции).

Если форма Q невырождена, то $s = 0$, и для определения k и l достаточно знать хотя бы одно из них или их разность. Поэтому в случае невырожденной функции сигнатурой часто называют число $k - l$.

Теорема 14 (Закон инерции квадратичной формы)**.** *Число k положительных квадратов, также как и число l отрицательных квадратов в нормальном виде вещественной квадратичной формы $Q(x)$ не зависят от способа приведения формы $Q(x)$ к нормальному виду.*

Доказательство. Пусть функция $Q(x)$ имеет нормальный вид в двух разных базисах: $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+l}, e_{k+l+1}, \dots, e_{k+l+s}$ и $\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_{k'}, \widetilde{e}_{k'+1}, \dots, \widetilde{e}_{k'+l'}, \widetilde{e}_{k'+l'+1}, \dots, \widetilde{e}_{k'+l'+s}$, причем, как мы уже знаем, $s' = s$ и $k' + l' = k + l$. Рассмотрим в W подпространства

$$V_+ = \langle e_1, \dots, e_k \rangle,\ V_- = \langle e_{k+1}, \dots, e_{k+l} \rangle,\ V_0 = \langle e_{k+l+1}, \dots, e_{k+l+s} \rangle$$

и

$$\widetilde{V}_+ = \langle \widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_{k'} \rangle,\ \widetilde{V}_- = \langle \widetilde{e}_{k'+1}, \dots, \widetilde{e}_{k'+l'} \rangle,\ \widetilde{V}_0 = \langle \widetilde{e}_{k'+l'+1}, \dots, \widetilde{e}_{k'+l'+s'} \rangle.$$

Если $x \in V_+$ и $x \neq 0$, то $Q(x) > 0$ (неравенство строгое, так как ограничение функции $Q(x)$ на V_+ невырождено). Действительно, если $x = x^1 e_1 + \ldots + x^k e_k$, то $Q(x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 > 0$. Аналогично, если $x \in V_- \oplus V_0$, то $Q(x) \leqslant 0$. Такая же ситуация имеет место с подпространствами $\widetilde{V}_+$, $\widetilde{V}_-$ и $\widetilde{V}_0$.

Пусть $k > k'$, тогда $\dim V_+ = k$, $\dim(\widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0) = \dim \widetilde{V}_- + \dim \widetilde{V}_0 = l' + s = \dim W - k'$. Следовательно,

$$\dim V_+ + \dim(\widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0) = k + \dim W - l' > \dim W,$$

значит, пересечение этих подпространств нетривиально, $V_+ \cap (\widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0) \neq \{0\}$. Возьмем произвольный ненулевой вектор их этого пересечения, $x \in V_+ \cap (\widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0)$. Т.к. $x \in V_+$, $x \neq 0$, то $Q(x) > 0$, но, с другой стороны, т.к. $x \in \widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0$, то $Q(x) \leqslant 0$. Получили противоречие. Случай $k < k'$ рассматривается аналогично. $\square$

*

Теорема Якоби. Критерий Сильвестра

Сигнатура и нормальный вид симметричной билинейной (или квадратичной) функции могут быть определены и без нахождения в явном виде замены координат.

Напомним, что угловым Δ_k минором порядка k квадратной матрицы G называется минор, составленный из первых k строк и k столбцов.

Теорема 15 (Якоби)**.** *Пусть G — матрица симметричной билинейной функции g в некотором базисе. Пусть все угловые миноры Δ_k до порядка $r = \operatorname{rk} G$ отличны от 0. Тогда существует базис, в котором функция g имеет вид $g(x,y) = \Delta_1 x^1 y^1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x^2 y^2 + \ldots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} x^r y^r$, где Δ_i — i-й угловой минор.*

Доказательство. Будем искать новый базис в виде

$$\begin{array}{rcl} e'_1 & = & e_1; \\ e'_2 & = & e_2 + c_2^1 e'_1; \\ e'_3 & = & e_3 + c_3^1 e'_1 + c_3^2 e'_2; \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ e'_n & = & e_n + c_n^1 e'_1 + \ldots + c_n^{n-1} e'_{n-1}, \end{array}$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — тот базис, в котором нам дана матрица функции g. Такое преобразование удобно тем, что (также как в обычном процессе ортогонализации) для любого номера k линейные оболочки векторов $e_1, \ldots, e_k$ и векторов $e'_1, \ldots, e'_k$ совпадают. Матрица перехода при таком преобразовании верхнетреугольна, т.е. имеет вид $C = \begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix}$, поэтому ее определитель равен 1. Кроме того, поскольку изменение матрицы G при такой замене координат сводится к элементарным преобразованиям строк и столбцов, определители угловых миноров не изменяются (иначе это можно показать так: если мы ограничимся первыми k координатами и пространством $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, то матрица перехода C_k также будет иметь единичный определитель, и матрица углового минора изменится по формуле $G'_k = C_k^t G_k C_k$, поэтому $\Delta'_k = |C_k^t||G_k||C_k| = \Delta_k$).

Коэффициенты c_i^j будем искать следующим образом. Сначала мы их найдем для индексов $j \leqslant r$, где $r = \operatorname{rk} G$. Коэффициент c_2^1 определим из равенства $g(e_1, e'_2) = g(e'_1, e'_2) = 0$. Это равенство дает уравнение $g(e_1, e_2) + c_2^1 g(e_1, e_1) = 0$, которое имеет решение, поскольку по предположению $g(e_1, e_1) = \Delta_1 \neq 0$. Аналогично можно найти c_3^1 и c_3^2 из условия $g(e'_3, e'_1) = g(e'_3, e'_2) = 0$, затем — c_4^1, c_4^2 и c_4^3 и т.п. пока нижний индекс не станет равным r. Действительно, если мы уже нашли векторы $e'_2, \ldots, e'_{k-1}$, то коэффициенты c_k^i для вектора e'_k ищутся из условия $g(e'_k, e'_1) = \ldots = g(e'_k, e'_{k-1}) = 0$, которое дает систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_k^1 g(e'_1, e'_1) + \ldots + c_k^{k-1} g(e'_{k-1}, e'_1) & = & -g(e_k, e'_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots \\ c_k^1 g(e'_1, e'_{k-1}) + \ldots + c_k^{k-1} g(e'_{k-1}, e'_{k-1}) & = & -g(e_k, e'_{k-1}) \end{array} \right. .$$

Эта система имеет решение, так как ее матрица невырождена — ее определитель равен Δ_{k-1} (если бы мы не заменили векторы e_i на e'_i, то матрица системы просто совпадала бы с $k-1$-м угловым минором, а при заменах указанного вида определитель угловых миноров не изменяется). Таким образом, мы можем найти векторы $e'_1, \ldots, e'_r$ нового базиса. При этом матрица функции g примет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} g(e'_1,e'_1) & & & \\ & \ddots & & \star \\ & & g(e'_r,e'_r) & \\ \hline & \star & & \star \end{array}\right),$$

где левый верхний угол — диагональная матрица. Отметим, что ранг этой диагональной матрицы равен r (ранг углового минора не меняется), поэтому все значения $g(e'_i,e'_i)$ отличны от нуля при $1 \leqslant i \leqslant r$.

Оставшиеся векторы $e'_{r+1},\ldots,e'_n$ найдем из условия $g(e'_i,e'_j)=0$, если $i \leqslant r$ а $j > r$. Для этого надо взять $e'_j = e_j - \frac{g(e_j,e'_1)}{g(e'_1,e'_1)}e'_1 - \ldots - \frac{g(e_j,e'_r)}{g(e'_r,e'_r)}e'_r$. Теперь матрица функции g примет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} g(e'_1,e'_1) & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & g(e'_r,e'_r) & \\ \hline & \mathbf{0} & & \star \end{array}\right),$$

а, поскольку ранг этой матрицы равен r, т.е. рангу углового минора порядка r, то правый нижний угол этой матрицы равен нулю. Окончательно, в построенном базисе матрица функции g примет вид

$$G' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} g(e'_1,e'_1) & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & g(e'_r,e'_r) & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right).$$

Поскольку $\Delta'_k = \Delta_k$ для всех $k=1,\ldots,n$, имеем равенства

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \Delta'_1 &= g(e'_1,e'_1); \\ \Delta'_2 = \Delta_2 = g(e'_1,e'_1)g(e'_2,e'_2) &= \Delta_1 g(e'_2,e'_2) \quad \Leftarrow \quad g(e'_2,e'_2) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}; \\ \Delta'_3 = \Delta_3 = \Delta'_2 g(e'_3,e'_3) &= \Delta_2 g(e'_3,e'_3) \quad \Leftarrow \quad g(e'_3,e'_3) = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ \Delta'_r = \Delta_r = \delta'_{r-1} g(e'_r,e'_r) &= \Delta_{r-1} g(e'_r,e'_r) \quad \Leftarrow \quad g(e'_r,e'_r) = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}. \end{aligned}$$

В построенном базисе $e'_1,\ldots,e'_n$ функция g имеет вид

$$\begin{aligned} g(x,y) &= g(e'_1,e'_1)x^1y^1 + \ldots + g(e'_r,e'_r)x^r y^r = \\ &= \delta_1 x^1 y^1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}x^2y^2 + \ldots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}x^r y^r, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Определение 16. Квадратичная форма $Q(x)$ в вещественном пространстве V называется *положительно определенной*, если $Q(x) > 0$ для любого ненулевого $x \in V$ (эквивалентное определение: если ее сигнатура равна $(\dim V, 0, 0)$).

Теорема 17 (Критерий Сильвестра). *Функция $Q(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда в ее матрице G (в произвольном базисе) все угловые миноры положительны.*

Доказательство. Если все угловые миноры положительны, то по предыдущей теореме функция $Q(x)$ имеет вид $Q(x) = \lambda_1(x^1)^2 + \ldots + \lambda_n(x^n)^2$, где n — размерность пространства, а $\lambda_i > 0$ при всех $i = 1, \ldots, n$, следовательно, $Q(x)$ положительно определена.

Обратно, предположим, что функция $Q(x)$ положительно определена. Докажем сначала, что все угловые миноры будут ненулевыми. Отметим сразу, что $\det G = \Delta_n \neq 0$, т.к. функция $Q(x)$ невырождена и ее ранг равен n. Поскольку функция $Q(x)$ положительно определена, то и ее ограничения на любые подпространства также будут положительно определенными, а, следовательно, и невырожденными. Т.к. G_k — это матрица ограничения $Q(x)$ на $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, то $\Delta_k \neq 0$ для всех k. Следовательно, все угловые миноры ненулевые. Воспользуемся предыдущей теоремой: чтобы функция $g(x, y) = \lambda_1 x^1 y^1 + \ldots + \lambda_n x^n y^n$ была невырожденной (т.е. чтобы все λ_i были положительными) необходимо, чтобы все Δ_i были положительными. □

Симметрические и кососимметрические билинейные функции на евклидовом пространстве

Приступим к рассмотрению билинейных функций на евклидовом пространстве. Пусть нам задано такое пространство V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Рассмотрим симметричную билинейную функцию g и соответствующую ей квадратичную функцию $Q(x) = g(x, x)$.

Пусть $t \in \mathbb{R}$. Вектор-функция $a(t)$ называется *дифференцируемой*, если все координаты $a^1(t), \ldots, a^n(t)$ векторнозначной функции $a(t)$ дифференцируемы. Легко проверить, что это определение не зависит от выбора базиса, в котором эти координаты записаны (хотя сами координаты от базиса зависят). Производную вектор-функции a обозначим a' или $\frac{da}{dt}$. Рассмотрим числовую функцию $Q(a(t)) = g(a(t), a(t))$.

Лемма 18. $\frac{dQ(a(t))}{dt} = 2g(a(t), \frac{da(t)}{dt})$.

Доказательство. Выберем базис, тогда g_{ij} — коэффициенты матрицы симметричной билинейной функции (= матрицы квадратичной функции), $a^i(t)$ — координаты вектор-функции в этом базисе. Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{dQ(a(t))}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} a^i(t) a^j(t) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{da^i(t)}{dt} a^j(t) + a^i(t) \frac{da^j(t)}{dt} \right) = \\
&= g\left(a(t), \frac{da(t)}{dt} \right) + g\left(\frac{da(t)}{dt}, a(t) \right) = \\
&= 2g\left(a(t), \frac{da(t)}{dt} \right).
\end{aligned}$$

□

Нам понадобится следующее утверждение из курса математического анализа.

Теорема 19. *Непрерывная функция f, заданная на замкнутом ограниченном множестве $S \subset \mathbb{R}^n$ достигает своего максимального значения в некоторой точке $x \in S$.*

Применим это утверждение к функции $f(x) = Q(x)$ на множестве векторов x единичной длины, т.е. $S = \{x \in V : |x| = 1\}$. Итак, существует вектор $a \in S$, на котором функция $Q(x)$ достигает своего максимума на множестве S.

Возьмем вектор $b \in V$, и рассмотрим вектор-функцию $x(t) = \cos ta + \sin tb$.

Лемма 20. *Если $(a, b) = 0$, то $g(a, b) = 0$.*

Доказательство. Так как функция $Q(x)$ достигает максимума при $x = a$, функция $h(t) = Q(x(t))$ достигает максимума при $t = 0$ (т.к. $x(0) = a$). Эта функция дифференцируемая, поэтому $\frac{d}{dt}h(t)|_{t=0} = 0$. По Лемме 18, $0 = g(x(0), \frac{dx}{dt}|_{t=0}) = g(a, b)$ (т.к. $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = b$). □

Теорема 21. *Пусть Q — квадратичная функция на евклидовом пространстве V. Тогда существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица G функции Q имеет диагональный вид.*

Доказательство. Доказываем по индукции по размерности. Если $n = \dim V = 1$, то утверджение очевидно — одномерная матрица есть число. Докажем индукционный переход. Пусть a — вектор единичной длины,на котором функция $Q(x)$ достигает максимума на S. Возьмем его в качестве первого базисного вектора, $e_1 = a$, и дополним его до ортонормированного базиса всего V векторами $e_2, \ldots, e_n$. Поскольку в этом базисе коэффициенты квадратичной функции равны $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, по Лемме 20 получаем, что $g_{1i} = 0 = g_{i,1}$ для $i = 2, \ldots, n$. Обозначим $g_{11} = \lambda_1$. Тогда матрица квадратичной функции Q в указанном базисе имеет вид $G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Матрица G' — матрица квадратичной функции на подпространстве $L = \langle e_2, \ldots, e_n \rangle$, $\dim L = n - 1$. По предположению индукции, в L существует ортонормированный базис, в котором матрица этой функции имеет диагональный вид, $\widetilde{G}' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. □

Лемма 22. *Указанный в теореме диагональный вид единственен с точностью до перестановки диагональных элементов.*

Доказательство. Пусть G — матрица квадратичной функции Q в некотором ортонормированном базисе, а $\widetilde{G}$ — ее же матрица в другом ортонормированном базисе. Тогда $\widetilde{G} = C^t G C$, где C — ортогональная матрица перехода, и

$$\det(\widetilde{G} - \lambda E) = \det(C^t G C - \lambda E) = \det(C^t (G - \lambda E) C) = \det(G - \lambda E),$$

поэтому корни многочлена $\det(G - \lambda E)$ не зависят от выбора ортонормрованного базиса. Но если $\widetilde{G} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то эти корни равны $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. □

Определение 23. Этот диагональный вид называется *каноническим видом* билинейной функции. Векторы соответствующего базиса (он тоже называется каноническим базисом) называются главными осями функции Q, и иногда приведение к каноническому виду называют приведением к главным осям.

Например, в трехмерном пространстве уравнение $Q(x) = 1$ задает поверхность второго порядка, а ее уравнение в главных осях имеет вид $\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^3 = 1$.

Пара симметричных билинейных функций

Теорема 24. *Пусть на векторном пространстве V заданы две билинейные симметричные функции g и h, и пусть g положительно определена, т.е. $g(x, x) > 0\ \forall x \neq 0$. Тогда существует базис в V, в котором одновременно матрица функции g имеет нормальный вид, а матрица функции h — канонический (т.е. матрица функции g единична, а матрица функции h — диагональна).*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, что, поскольку функция g положительно определена, то на V с ее помощью можно определить скалярное произведение по формуле $(a, b) := g(a, b)$ (все аксиомы скалярного произведения легко проверяются). Следовательно, на V можно ввести структуру евклидового пространства. При этом в любом ортонормированная базисе (относительно введенного только что скалярного произведения) матрица Грама (она же — матрица функции g) будет единичной. По предыдущей теореме существует ортонормированный базис, в котором матрица функции h имеет канонический вид. □

Покажем, как найти канонический вид функции h и канонический базис. Рассмотрим определитель $\det(H - \lambda G)$, где H — матрица функции h, а G — матрица функции g в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$. Введем скалярное произведение с помощью функции g. Пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ — ортонормированный базис (по отношению к введенному скалярному произведению). Пусть H' и G' — матрицы этих функций в базисе $e'_1, \ldots, e'_n$. Пусть также C — матрица перехода от базиса $e'_1, \ldots, e'_n$ к $e_1, \ldots, e_n$. Тогда $G = C^t G' C$ и $H = C^t H' C$, причем, т.к. базис $e'_1, \ldots, e'_n$ ортонормирован, то $G' = E$. Получим

$$\det(H - \lambda G) = \det(C^t H' C - \lambda C^t E C) = \underbrace{\det C^t}_{\neq 0} \det(H' - \lambda E) \underbrace{\det C}_{\neq 0},$$

следовательно, многочлены $\det(H - \lambda G)$ и $\det(H' - \lambda E)$ отличаются лишь числовым множителем, значит их корни совпадают. Т.к. диагональные элемента канонического вида функции h — это корни многочлена $\det(H' - \lambda E)$, то они будут также корнями уравнения $\det(H - \lambda G)$. Последнее уравнение называется *обобщенным характеристическим уравнением.* для пары симметричных билинейных функций.

Нахождение канонического базиса. Пусть x — собственный вектор матрицы H', отвечающий собственному значению λ. Пусть X — столбец координат этого вектора в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$, а X' — столбец координат этого же вектора в первоначальном базисе $e'_1, \ldots, e'_n$. Чтобы найти X', нужно решить уравнение $(H' - \lambda E)X' = 0$. Т.к. $X' = CX$, то это уравнение равносильно уравнению $(H' - \lambda E)CX = 0$, домножим его слева на C^t и получим $C^t(H' - \lambda E)CX = 0$, т.е. $(H - \lambda G)X = 0$.

Мы только что получили доказательство следующей леммы:

Лемма 25. *Корни многочлена* $\det(H - \lambda G)$ *не зависят от выбора базиса и являются диагональными элементами канонического вида матрицы функции h, а координаты векторов канонического базиса ищутся как решение системы уравнений .$(H - \lambda G)X = 0$.*

Покажем на примере, что требование положительной определенности хотя бы одной из двух функций существенно. Пусть билинейные симметричные функциии g и h заданы матрицами $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ни одна из них не является положительно определенной. Допустим, что существует базис, удовлетворяющий условию теоремы, тогда уравнение $\det(H - \lambda G) = 0$ должно иметь вещественные корни (т.к. эти корни суть диагональные элементы матрицы канонического вида функции h). Но это уравнение не имеет вещественных корней, следовательно, такого базиса не существует.