Метод Лагранжа выделения полных квадратов и нормальный вид симметричной функции

Теорема 12. *1) у любой симметричной билинейной функции на вещественном векторном пространстве существует базис, в котором ее матрица имеет диагональный вид с числами* 0, ± 1 *на диагонали.*

2) у любой симметричной билинейной функции на комплексном векторном пространстве существует базис, в котором ее матрица имеет диагональный вид с числами 0, 1 *на диагонали.*

Доказательство.

Для приведения матрицы симметричной билинейной функции к нормальному виду воспользуемся методом Лагранжа выделения полных квадратов.

Мы установили ранее, что любая симметричная билинейная функция $g(x,y)$ однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме $Q(x) = g(x,x)$. Будем приводить к нормальному виду квадратичную форму $Q(x) = g_{11}(x^1)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + \ldots$.

Возможны три случая:

а) Коэффициент g_{11} при квадрате $(x^1)^2$ не равен нулю. Выделим полный квадрат, содержащий $(x^1)^2$:

$$Q(x) = g_{11}\left((x^1)^2 + \frac{2g_{12}}{g_{11}}x^1x^2 + \ldots + \frac{2g_{1n}}{g_{11}}x^1x^n\right) + \sum_{i,j>1} g_{ij}x^ix^j =$$

$$= g_{11}\left(x^1 + \frac{g_{12}}{g_{11}}x^2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{g_{11}}x^n\right)^2 - \sum_{i,j>1} \frac{g_{1i}g_{1j}}{g_{11}}x^ix^j + \sum_{i,j>1} g_{ij}x^ix^j.$$

Сделав замену координат

$$\begin{cases} \widetilde{x}^1 = x^1 + \frac{g_{12}}{g_{11}}x^2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{g_{11}}x^n, \\ \widetilde{x}^2 = x^2, \\ \ldots \\ \widetilde{x}^n = x^n. \end{cases}$$

без x^1

получим $Q(x) = g_{11}(\widetilde{x}^1)^2 + \ldots$, где многоточие стоит вместо слагаемых, не содержащих переменную $\widetilde{x}^1$.

б) Имеется ненулевое слагаемое вида $g_{ii}(x^i)^2$ с $i > 1$. В этом случае, мы можем сделать другую замену координат:

$$\begin{cases} x^i = \widetilde{x}^1, \\ x^1 = \widetilde{x}^i, \\ x^k = \widetilde{x}^k,\ k \neq 1, i. \end{cases}$$

После этой замены коэффициент $\widetilde{g}_{11} = g_{ii}$ перед $(\widetilde{x}^1)^2$ уже отличен от нуля, что сводит задачу к предыдущему случаю.

в) Все коэффициенты g_{ii} при квадратах координат $(x^i)^2$ равны нулю. Этот случай можно свести к б) линейной заменой координат: сначала мы найдем ненулевое слагаемое в $Q(x)$ вида $2g_{kl}x^kx^l$ (этого нельзя сделать только у формы тождественно равной нулю), а затем сделаем такую замену координат:

$$\begin{cases} x^k = \widetilde{x}^k + \widetilde{x}^l, \\ x^l = \widetilde{x}^k - \widetilde{x}^l, \\ x^m = \widetilde{x}^m,\ m \neq k, l \end{cases}$$

После этой замены (только уже в новых координатах) $x^kx^l = (\widetilde{x}^k)^2 - (\widetilde{x}^l)^2$ и у нас есть на выбор два квадрата $2g_{kl}(\widetilde{x}^k)^2$ и $2g_{kl}(\widetilde{x}^l)^2$.

После выделения полного квадрата $(\widetilde{x}^1)^2$ оставшиеся в $Q(x)$ слагаемые, не содержащие $\widetilde{x}^1$, представляют собой квадратичную форму уже от меньшего числа неизвестных. Применив очевидное индуктивное предположение получим, что $Q(x) = \widetilde{g}_{11}(\widetilde{x}^1)^2 + \widetilde{g}_{22}(\widetilde{x}^2)^2 + \ldots + \widetilde{g}_{nn}(\widetilde{x}^n)^2$. Говоря другими словами, в новом базисе матрица $\widetilde{G}$ квадратичной функции $Q(x)$ будет диагональной с элементами $\widetilde{g}_{11}, \widetilde{g}_{22}, \ldots, \widetilde{g}_{nn}$ на диагонали.

Далее изучение вещественного случая будет отличаться от комплексного. "Меняя местами"переменные, т.е. делая преобразования координат как в случае б), мы можем добиться того, что положительные коэффициенты $\widetilde{g}_{ii} > 0$ идут первыми (если они есть конечно), затем отрицательные $\widetilde{g}_{ii} < 0$, и наконец нулевые $\widetilde{g}_{ii} = 0$:

$$\widetilde{g}_{11} > 0, \ldots, \widetilde{g}_{kk} > 0, \widetilde{g}_{k+1,k+1} < 0, \ldots, \widetilde{g}_{k+l,k+l} < 0, \widetilde{g}_{k+l+1,k+l+1} = 0, \ldots, \widetilde{g}_{k+l+s,k+l+s} = 0.$$

Эту диагональную матрицу можно упростить еще больше, сделав следующее преобразование "гомотетии":

$$\begin{cases} x'^1 & = & \sqrt{|\widetilde{g}_{11}|}\widetilde{x}^1, \\ \ldots, & & \\ x'^{k+l} & = & \sqrt{|\widetilde{g}_{k+1,k+1}|}\widetilde{x}^{k+l}, \\ x'^m & = & \widetilde{x}^m, \ k+l \leq m \leq n \end{cases}$$

Окончательно (в системе координат $(x'^1, \ldots, x'^n)$) вид нашей квадратичной формы будет таков:

$$Q(x) = (x'^1)^2 + \ldots + (x'^k)^2 - (x'^{k+1})^2 - \ldots - (x'^{k+l})^2.$$

Данный вид называется **нормальным видом вещественной квадратичной формы** $Q(x)$.

В комплексном же случае нет нужды "сортировать"квадраты координат на положительные и отрицательные, достаточно пустить подряд сначала ненулевые квадраты, а корень можно извлечь непосредственно из $\widetilde{g}_{ii}$:

$$\begin{cases} x'^1 & = & \sqrt{\widetilde{g}_{11}}\widetilde{x}^1, \\ \ldots, & & \\ x'^r & = & \sqrt{\widetilde{g}_{r,r}}\widetilde{x}^r, \\ x'^m & = & \widetilde{x}^m, \ r \leq m \leq n \end{cases}$$

И в системе координат $(x'^1, \ldots, x'^n)$) вид нашей комплексной квадратичной формы (называемый **нормальным видом комплексной квадратичной формы**)будет выглядеть так:

$$Q(x) = (x'^1)^2 + \ldots + (x'^r)^2.$$

Переходя к соответствующей вещественной симметричной билинейной форме, мы заключаем, что для нее существует базис, в котором она имеет нормальный вид

$$g(x, y) = x^1y^1 + \ldots + x^ky^k - x^{k+1}y^{k+1} - \ldots - x^{k+l}y^{k+l}.$$

Аналогично, комплексная билинейная симметрическая функция имеет нормальный вид

$$g(x, y) = x^1y^1 + \ldots + x^ry^r.$$

Очевидно, что число r ненулевых квадратов равняется рангу данной формы. □

Закон инерции квадратичной формы

Теперь обсудим вопрос о единственности нормального вида квадратичной формы (симметричной билинейной функции). Для комплексной билинейной симметричной функции нормальный вид определяется единственным числом — рангом r квадратичной (билинейной) функции, поэтому не зависит от способа приведения к нормальному виду. Оставшиеся ~~два случая похожи друг на друга, поэтому обсудим один из них —~~ случай вещественной симметричной билинейной функции. Нормальный вид ее матрицы

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение три числа: k — количество единиц l — количество минус единиц, s — количество нулей. Видно, что $k + l = \operatorname{rk} g$, $s = \dim W - \operatorname{rk} g$ следовательно, $k + l$ и s не зависят от выбора базиса.

Определение 13. Набор чисел (k, l, s) называется *сигнатурой* вещественной квадратичной функции (симметричной билинейной функции).

Если форма Q невырождена, то $s = 0$, и для определения k и l достаточно знать хотя бы одно из них или их разность. Поэтому в случае невырожденной функции сигнатурой часто называют число $k - l$.

Теорема 14 (Закон инерции квадратичной формы)**.** *Число k положительных квадратов, также как и число l отрицательных квадратов в нормальном виде вещественной квадратичной формы $Q(x)$ не зависят от способа приведения формы $Q(x)$ к нормальному виду.*

Доказательство. Пусть функция $Q(x)$ имеет нормальный вид в двух разных базисах: $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l}, e_{k+l+1}, \ldots, e_{k+l+s}$ и $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_{k'}, \widetilde{e}_{k'+1}, \ldots, \widetilde{e}_{k'+l'}, \widetilde{e}_{k'+l'+1}, \ldots, \widetilde{e}_{k'+l'+s}$, причем, как мы уже знаем, $s' = s$ и $k' + l' = k + l$. Рассмотрим в W подпространства

$$V_+ = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle, \ V_- = \langle e_{k+1}, \ldots, e_{k+l} \rangle, \ V_0 = \langle e_{k+l+1}, \ldots, e_{k+l+s} \rangle$$

и

$$\widetilde{V}_+ = \langle \widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_{k'} \rangle, \ \widetilde{V}_- = \langle \widetilde{e}_{k'+1}, \ldots, \widetilde{e}_{k'+l'} \rangle, \ \widetilde{V}_0 = \langle \widetilde{e}_{k'+l'+1}, \ldots, \widetilde{e}_{k'+l'+s'} \rangle.$$

Если $x \in V_+$ и $x \neq 0$, то $Q(x) > 0$ (неравенство строгое, так как ограничение функции $Q(x)$ на V_+ невырождено). Действительно, если $x = x^1 e_1 + \ldots + x^k e_k$, то $Q(x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 > 0$. Аналогично, если $x \in V_- \oplus V_0$, то $Q(x) \leqslant 0$. Такая же ситуация имеет место с подпространствами $\widetilde{V}_+$, $\widetilde{V}_-$ и $\widetilde{V}_0$.

Пусть $k > k'$, тогда $\dim V_+ = k$, $\dim(\widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0) = \dim \widetilde{V}_- + \dim \widetilde{V}_0 = l' + s = \dim W - k'$. Следовательно,

k $\quad$ $\dim W - k'$ $\quad$ k'

$$\dim V_+ + \dim(\widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0) = k + \dim W - \cancel{l'} > \dim W,$$

значит, пересечение этих подпространств нетривиально, $V_+ \cap (\widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0) \neq \{0\}$. Возьмем произвольный ненулевой вектор их этого пересечения, $x \in V_+ \cap (\widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0)$. Т.к. $x \in V_+$, $x \neq 0$, то $Q(x) > 0$, но, с другой стороны, т.к. $x \in \widetilde{V}_- \oplus \widetilde{V}_0$, то $Q(x) \leqslant 0$. Получили противоречие. Случай $k < k'$ рассматривается аналогично. $\square$

Теорема Якоби. Критерий Сильвестра

Сигнатура и нормальный вид симметричной билинейной (или квадратичной) функции могут быть определены и без нахождения в явном виде замены координат.

Напомним, что угловым Δ_k минором порядка k квадратной матрицы G называется минор, составленный из первых k строк и k столбцов.

Теорема 15 (Якоби). *Пусть G — матрица симметричной билинейной функции g в некотором базисе. Пусть все угловые миноры Δ_k до порядка $r = \operatorname{rk} G$ отличны от 0. Тогда существует базис, в котором функция g имеет вид $g(x,y) = \Delta_1 x^1 y^1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x^2 y^2 + \ldots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} x^r y^r$, где Δ_i — i-й угловой минор.*

Доказательство. Будем искать новый базис в виде

$$\begin{array}{rcl} e_1' &=& e_1; \\ e_2' &=& e_2 + c_2^1 e_1'; \\ e_3' &=& e_3 + c_3^1 e_1' + c_3^2 e_2'; \\ \ldots && \ldots\ldots\ldots \\ e_n' &=& e_n + c_n^1 e_1' + \ldots + c_n^{n-1} e_{n-1}', \end{array}$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — тот базис, в котором нам дана матрица функции g. Такое преобразование удобно тем, что (также как в обычном процессе ортогонализации) для любого номера k линейные оболочки векторов $e_1, \ldots, e_k$ и векторов $e_1', \ldots, e_k'$ совпадают. Матрица перехода при таком преобразовании верхнетреугольна, т.е. имеет вид $C = \begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix}$, поэтому ее определитель равен 1. Кроме того, поскольку изменение матрицы G при такой замене координат сводится к элементарным преобразованиям строк и столбцов, определители угловых миноров не изменяются (иначе это можно показать так: если мы ограничимся первыми k координатами и пространством $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, то матрица перехода C_k также будет иметь единичный определитель, и матрица углового минора изменится по формуле $G_k' = C_k^t G_k C_k$, поэтому $\Delta_k' = |C_k^t||G_k||C_k| = \Delta_k$).

g'_{12}

Коэффициенты c_i^j будем искать следующим образом. Сначала мы их найдем для индексов $j \leqslant r$, где $r = \operatorname{rk} G$. Коэффициент c_2^1 определим из равенства $g(e_1, e_2') = g(e_1', e_2') = 0$. Это равенство дает уравнение $g(e_1, e_2) + c_2^1 g(e_1, e_1) = 0$, которое имеет решение, поскольку по предположению $g(e_1, e_1) = \Delta_1 \neq 0$. Аналогично можно найти c_3^1 и c_3^2 из условия $g(e_3', e_1') = g(e_3', e_2') = 0$, затем — c_4^1, c_4^2 и c_4^3 и т.п. пока нижний индекс не станет равным r. Действительно, если мы уже нашли векторы $e_2', \ldots, e_{k-1}'$, то коэффициенты c_k^i для вектора e_k' ищутся из условия $g(e_k', e_1') = \ldots = g(e_k', e_{k-1}') = 0$, которое дает систему линейных уравнений

$g'_{13} = 0$
$g'_{23} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_k^1 g(e_1', e_1') + \ldots + c_k^{k-1} g(e_{k-1}', e_1') &=& -g(e_k, e_1') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots \\ c_k^1 g(e_1', e_{k-1}') + \ldots + c_k^{k-1} g(e_{k-1}', e_{k-1}') &=& -g(e_k, e_{k-1}') \end{array} \right. .$$

$g'_{1k} = g'_{2k} = \ldots$
$\ldots = g'_{k-1,k} = 0$

Эта система имеет решение, так как ее матрица невырождена — ее определитель равен Δ_{k-1} (если бы мы не заменили векторы e_i на e_i', то матрица системы просто совпадала бы с $k-1$-м угловым минором, а при заменах указанного вида определитель угловых миноров не изменяется). Таким образом, мы можем найти векторы $e_1', \ldots, e_r'$ нового базиса. При этом матрица функции g примет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} g(e_1', e_1') & & 0 & \\ & \ddots & & \star \\ 0 & & g(e_r', e_r') & \\ \hline & \star & & \star \end{array} \right),$$

$\Delta_1 = g(e'_1, e'_1) =$
$= g'_{11}$

$\Delta_2 = g'_{11} \cdot g'_{22}$

$- - - - - -$

$\Delta_r = g'_{11} \cdot \ldots \cdot g'_{rr}$

где левый верхний угол — диагональная матрица. Отметим, что ранг этой диагональной матрицы равен r (ранг углового минора не меняется), поэтому все значения $g(e'_i, e'_i)$ отличны от нуля при $1 \leqslant i \leqslant r$.

$g'_{ij} = 0$

Оставшиеся векторы $e'_{r+1}, \ldots, e'_n$ найдем из условия $g(e'_i, e'_j) = 0$, если $i \leqslant r$ а $j > r$. Для этого надо взять $e'_j = e_j - \frac{g(e_j, e'_1)}{g(e'_1, e'_1)} e'_1 - \ldots - \frac{g(e_j, e'_r)}{g(e'_r, e'_r)} e'_r$. Теперь матрица функции g примет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} g(e'_1, e'_1) & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & g(e'_r, e'_r) & \\ \hline & \mathbf{0} & & \star \end{array}\right),$$

а, поскольку ранг этой матрицы равен r, т.е. рангу углового минора порядка r, то правый нижний угол этой матрицы равен нулю. Окончательно, в построенном базисе матрица функции g примет вид

$$G' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} g(e'_1, e'_1) & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & g(e'_r, e'_r) & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right).$$

Поскольку $\Delta'_k = \Delta_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$, имеем равенства

$$\Delta_1 = \Delta'_1 = g(e'_1, e'_1);$$

$$\Delta'_2 = \Delta_2 = g(e'_1, e'_1) g(e'_2, e'_2) = \Delta_1 g(e'_2, e'_2) \quad \Leftarrow \quad g(e'_2, e'_2) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1};$$

$$\Delta'_3 = \Delta_3 = \Delta'_2 g(e'_3, e'_3) = \Delta_2 g(e'_3, e'_3) \quad \Leftarrow \quad g(e'_3, e'_3) = \frac{\Delta_3}{\Delta_2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta'_r = \Delta_r = \Delta'_{r-1} g(e'_r, e'_r) = \Delta_{r-1} g(e'_r, e'_r) \quad \Leftarrow \quad g(e'_r, e'_r) = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}.$$

В построенном базисе $e'_1, \ldots, e'_n$ функция g имеет вид

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(e'_1, e'_1) x^1 y^1 + \ldots + g(e'_r, e'_r) x^r y^r = \\ &= \Delta_1 x^1 y^1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x^2 y^2 + \ldots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} x^r y^r, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Определение 16. Квадратичная форма $Q(x)$ в вещественном пространстве V называется *положительно определенной*, если $Q(x) > 0$ для любого ненулевого $x \in V$ (эквивалентное определение: если ее сигнатура равна $(\dim V, 0, 0)$).

Теорема 17 (Критерий Сильвестра)**.** *Функция $Q(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда в ее матрице G (в произвольном базисе) все угловые миноры положительны.*

Доказательство. Если все угловые миноры положительны, то по предыдущей теореме функция $Q(x)$ имеет вид $Q(x) = \lambda_1 (x^1)^2 + \ldots + \lambda_n (x^n)^2$, где n — размерность пространства, а $\lambda_i > 0$ при всех $i = 1, \ldots, n$, следовательно, $Q(x)$ положительно определена.

$g(x,y)$ $\qquad G=(g_{ij})$ $\qquad g_{ij}=g(e_i,e$

$(e'_1,\dots,e'_n)=(e_1,\dots,e_n)\,C$

$\underline{G'=C^tGC.}$ (если g симметрична)

$\exists$ базис $e'_1,\dots,e'_n$, в к-ром $G'=\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

диаг. 0 или 1 или -1

$$g_{ii}(\tilde{x}^i)^2 \quad \| \quad (x'^i)^2$$

$$(x) = \underline{g_{11}(\tilde{x}^1)^2 + g_{22}(\tilde{x}^2)^2 + \dots + g_{nn}(\tilde{x}^n)^2}$$

$$\| \quad (x'^1)^2$$

$$g_{ii} = 0, \pm 1\ ?$$

$$x^i \to \tilde{x}^i \to x'^i$$

$g_{11} > 0$, то $\boxed{x'^1 = \sqrt{g_{11}}\,\tilde{x}^1}$

$$(x'^1)^2 = g_{11}(\tilde{x}^1)^2$$

$g_{ii} > 0$ - так ~~же~~.

$g_{ii} < 0$

$$x'^i = -\sqrt{-g_{ii}} \cdot \bar{x}^i$$

$$(x'^i)^2 = -g_{ii} (\bar{x}^i)^2$$

$$g_{ii} (\bar{x}^i)^2 = -(x'^i)^2$$

$$Q(x) = (x'^1)^2 + \dots (x'^p)^2 - (x'^{p+1})^2 - \dots - (x'^{p+q})^2.$$

коэф $C = \sqrt{g_{ii}}$

$x'^i = \sqrt{g_{ii}}$

$Q(x) = (x'^1)^2 + \ldots + (x'^r)^2.$

если $g_{ii} \neq 0$, то $(x^i)^2$ присутств. в

С коэф. 1, если $g_{ii} = 0$, то нет

r - кол-во ненулевых g_{ii}.

Q имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

она же — матрица

для g

$$g'(x,y) = x'^1 y'^1 + \ldots + x'^p y'^q - x'^{p+1} y'^{p+1} - \ldots$$

$\operatorname{rk} G' = \operatorname{rk} G$ $\qquad$ $G = (g_{ij})$ симметр

$$G' = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{matrix}}^{r} & \\ & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$r = \operatorname{rk} G'$

...инственность.

$$Q(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2.$$

$$\tilde{x}^1 = x^2$$
$$\tilde{x}^2 = x^1$$

Нормальный вид
квадр. ф-я может иметь в разных
базисах.

д $Q(x)$ = сумма и разн. квадратов

наз. нормальным, соотв. базис

наз. нормальным.

орм. базисов много.

g $\quad G=(g_{ij})$ $\quad r=\mathrm{rk}\,G$

норм. вид $\quad g(x,x)=Q(x)=\underline{(x^1)^2+\ldots+(x}$

единств.

$$g(x,x)=\underbrace{(x^1)^2+\ldots+(x^p)^2-(x^{p+1})^2-\ldots-(x^{p+q})^2}$$

$p+q=r$ не зависит от пор

базиса.

$$Q(x) = (x^1)^2 + \ldots (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^{k+l})^2 =$$

$$= (\tilde{x}^1)^2 + \ldots (\tilde{x}^{k'})^2 - (\tilde{x}^{k'+1})^2 - \ldots - (\tilde{x}^{k'+l'}$$

$$\Downarrow$$

$$k' = k, \; l' = l.$$

$\in V_+ \qquad x = x^1 e_1 + \ldots + x^k e_k \qquad Q(x) > 0$

(строго, если $x \neq 0$)

$\in V_- \oplus V_0 \qquad x = x^{k+1} e_{k+1} + \ldots + x^{k+l} e_{k+l} + x^{k+l+1} e_{k+\ldots} \ldots + x^{k+l+s} e_{k+l+s}$

$(x) = -(x^{k+1})^2 - \ldots - (x^{k+l})^2 \leq 0.$

$$\dim V_+ + \dim(\tilde{V}_- \oplus \tilde{V}_0) > \dim W$$

$$\dim V_+ + \dim(\tilde{V}_- \oplus \tilde{V}_0) = \dim(V_+ + (\tilde{V}_- \oplus \tilde{V}_0)) + \dim(V_+ \cap (\tilde{V}_- \oplus \tilde{V}_0))$$

$$V_+ + (\tilde{V}_- \oplus \tilde{V}_0) \subseteq W \qquad \dim(V_+ + (\tilde{V}_- \oplus \tilde{V}_0)) \leq$$

(a_{ij})

$$\Delta_1 = a_{11}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\ldots$$

Δ_n = определитель всей матрицы.

$$(x) = \Delta_1 (x^1)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}(x^2)^2 + \dots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}(x^r)^2.$$

$G \quad g_{ij} = g(e_i, e_j)$

$e_i' \qquad e_1' = e_1 \qquad g_{12}' = g(e_1', e_2') = 0$

$e_2' = \dots - \qquad G' = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \end{pmatrix}$

$e_2 + c_2^1 e_1$

$0 \qquad 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} g'_{11} & & & & \\ & g'_{22} & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & g'_{rr} & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = g'_{11} \qquad \Delta_2 = g'_{11} \cdot g'_{22} \Rightarrow g'_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

$$\Delta_3 = g'_{11} \cdot g'_{22} \cdot g'_{33} \Rightarrow g'_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots$$

$$g'_{rr} = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}.$$

$$Q(x) = \Delta_1 (x^1)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}(x^2)^2 + \ldots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}(x^r)^2.$$

знаки $\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}$

$$Q(x) = (x^1)^2 + \dots + (x^k)^2 - \underbrace{(x^{k+1})^2 - \dots - (x^{k+l})^2}_{l=0}$$

Q — полож. опр., если $l = 0$, $k = n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}^{k}$$

$g'_{nn} = 0$

$Q(x) = 0$

$0 \neq x = e_n$.

$(0, 0, \dots 0, 1)$

...ом вид — един. матр.