где левый верхний угол — диагональная матрица. Отметим, что ранг этой диагональной матрицы равен r (ранг углового минора не меняется), поэтому все значения $g_{ii} = g(e'_i, e'_i)$ отличны от нуля при $1 \leqslant i \leqslant r$.

Оставшиеся векторы $e'_{r+1}, \ldots, e'_n$ найдем из условия $g'_{ij} = g(e'_i, e'_j) = 0$, если $i \leqslant r$ а $j > r$. Для этого можно взять $e'_j = e_j - \frac{g(e_j, e'_1)}{g(e'_1, e'_1)} e'_1 - \ldots - \frac{g(e_j, e'_r)}{g(e'_r, e'_r)} e'_r$. Теперь матрица функции g примет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} g'_{11} & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & g'_{rr} & \\ \hline & \mathbf{0} & & \star \end{array}\right),$$

а, поскольку ранг этой матрицы равен r, т.е. рангу углового минора порядка r, то правый нижний угол этой матрицы равен нулю. Окончательно, в построенном базисе матрица функции g примет вид

$$G' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} g'_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & g'_{rr} & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right).$$

Поскольку $\Delta'_k = \Delta_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$, имеем равенства

$$\Delta_1 = \Delta'_1 = g(e'_1, e'_1);$$

$$\Delta'_2 = \Delta_2 = g(e'_1, e'_1) g(e'_2, e'_2) = \Delta_1 g(e'_2, e'_2) \quad \Rightarrow \quad g(e'_2, e'_2) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1};$$

$$\Delta'_3 = \Delta_3 = \Delta'_2 g(e'_3, e'_3) = \Delta_2 g(e'_3, e'_3) \quad \Rightarrow \quad g(e'_3, e'_3) = \frac{\Delta_3}{\Delta_2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta'_r = \Delta_r = \Delta'_{r-1} g(e'_r, e'_r) = \Delta_{r-1} g(e'_r, e'_r) \quad \Rightarrow \quad g(e'_r, e'_r) = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}.$$

В построенном базисе $e'_1, \ldots, e'_n$ функция g имеет вид

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(e'_1, e'_1) x^1 y^1 + \ldots + g(e'_r, e'_r) x^r y^r = \\ &= \Delta_1 x^1 y^1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x^2 y^2 + \ldots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} x^r y^r, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Определение 16. Квадратичная форма $Q(x)$ в вещественном пространстве V называется *положительно определенной*, если $Q(x) > 0$ для любого ненулевого $x \in V$ (эквивалентное определение: если ее сигнатура равна $(\dim V, 0, 0)$).

Теорема 17 (Критерий Сильвестра). *Функция $Q(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда в ее матрице G (в произвольном базисе) все угловые миноры положительны.*

Доказательство. Если все угловые миноры положительны, то по предыдущей теореме функция $Q(x)$ имеет вид $Q(x) = \lambda_1 (x^1)^2 + \ldots + \lambda_n (x^n)^2$, где n — размерность пространства, а $\lambda_i > 0$ при всех $i = 1, \ldots, n$, следовательно, $Q(x)$ положительно определена.

Обратно, предположим, что функция $Q(x)$ положительно определена. Докажем сначала, что все угловые миноры будут ненулевыми. Отметим сразу, что $\det G = \Delta_n \neq 0$, т.к.

$\lambda_1 = \Delta_1, \; \lambda_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \lambda_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$

функция $Q(x)$ невырождена и ее ранг равен n. Поскольку функция $Q(x)$ положительно определена, то и ее ограничения на любые подпространства также будут положительно определенными, а, следовательно, и невырожденными. Т.к. G_k — это матрица ограничения $Q(x)$ на $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, то $\Delta_k \neq 0$ для всех k. Следовательно, все угловые миноры ненулевые. Воспользуемся предыдущей теоремой: чтобы функция $g(x, y) = \lambda_1 x^1 y^1 + \ldots + \lambda_n x^n y^n$ была невырожденной (т.е. чтобы все λ_i были положительными) необходимо, чтобы все Δ_i были положительными. $\square$

Обобщенное ортогональное дополнение

Определение 18. Пусть $V \subset W$, а на W задана (косо)симметричная билинейная функция g, тогда $V^\perp = \{a \in W : g(a, b) = 0 \ \forall b \in V\}$.

Иногда пишут $\perp_g$ вместо $\perp$, чтобы явно указать, что это определение зависит от (косо)симметричной функции g.

Пример.

Пусть $G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе e_1, e_2 и пусть $a = e_1 + e_2$. Обозначим $V_1 = \langle e_1 \rangle$, $V_2 = \langle e_2 \rangle$, $V_3 = \langle a \rangle$. Тогда $V_1^\perp = V_2$, $V_3^\perp = V_3$. Видно, что ортогональное дополнение $\perp_g$ в случае произвольной билинейной симметричной функции не очень похоже на обычное ортогональное дополнение. Случай кососимметричной билинейной функции выглядит еще более экзотичным.

Напомним, что если билинейная функция g симметрична или кососимметрична, ее правое и левое ядро совпадают. Мы его обозначаем через $\operatorname{Ker} g$.

Лемма 19. $\dim V^\perp \geqslant \dim W - \dim V$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} g \cap V = \{0\}$.

Доказательство. Выберем базис $e_1, \ldots, e_r$ в V. Тогда любой вектор $b \in V$ можно записать в виде $b = b^i e_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда условие $a \in V^\perp$ эквивалентно равенствам $g(a, e_i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Дополним выбранный базис до базиса всего пространства. Тогда на n координат вектора a мы будем иметь систему из r линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g(a, e_1) & = & 0 \\ \cdots\cdots & & \cdots \\ g(a, e_r) & = & 0. \end{array} \right.$$

Размерность пространства решений этой системы (т.е. пространства $V^\perp$) удовлетворяет неравенству $\dim V^\perp \geqslant n - r = \dim W - \dim V$ (здесь стоит неравенство, потому что уравнения этой системы могут быть линейно зависимыми).

Равенство будет достигаться тогда и только тогда, когда ранг этой системы равен в точности r, т.е. все строки линейно независимы. Пусть для некоторых коэффициентов λ_i

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i g(a, e_i) = g(a, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i) = g(a, b) = 0$$

(здесь $b = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in V$). Если ранг системы уравнений меньше r, т.е. если строки линейно зависимы, то это равносильно тому, что для некоторого $b \in V$, $b \neq 0$, равенство $g(a, b) = 0$ выполнено для всех $a \in W$ (т.е. отображение $a \mapsto g(a, b)$ тождественно равно нулю). Но это значит, что $b \in \operatorname{Ker} g$, или, другими словами, $V \cap \operatorname{Ker} g \neq \{0\}$. Но тогда линейная независимость, наоборот, означает, что $V \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$. $\square$

Лемма 20. $V \cap V^\perp = \operatorname{Ker} g_V$, *где* g_V *— ограничение* g *на* V.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $a \in V \cap V^\perp$, тогда $a \in V$ и $g(a, b) = 0$ для любого $b \in V$, поэтому, по определению, $a \in \operatorname{Ker} g_V$.

Возьмем произвольный вектор $c \in \operatorname{Ker} g_V$, тогда $c \in V$ (т.к. g_V определена только на V) и $g(c, b) = 0$ для любого $b \in V$, следовательно, $c \in V^\perp$, поэтому $c \in V \cap V^\perp$. $\square$

Следствие 21. *Если* $\operatorname{Ker} g_V = \{0\}$ *(т.е. ограничение* g *на* V *не вырождено), то* $W = V \oplus V^\perp$.

Доказательство. Т.к. $V \cap V^{\perp} = \{0\}$, то $V + V^{\perp} = V \oplus V^{\perp} \subset W$ (т.е. сумма — прямая), причем $\dim(V \oplus V^{\perp}) = \dim V + \dim V^{\perp} \geqslant \dim V + (\dim W - \dim V) = \dim W$, следовательно, $V \oplus V^{\perp} = W$. $\square$

Лемма 22. *Если ограничения g на V и на $V^{\perp}$ невырождены, то $(V^{\perp})^{\perp} = V$.*

Доказательство. Вложение $V \subset (V^{\perp})^{\perp}$ имеет место независимо от условий на g. Действительно, если $a \in V$, то $g(a, b) = 0$ для любого $b \in V^{\perp}$.

Докажем совпадение V и $(V^{\perp})^{\perp}$. Поскольку ограничения g на V и $V^{\perp}$ навырождены, имеют место разложения $W = V \oplus V^{\perp} = V^{\perp} \oplus (V^{\perp})^{\perp}$. Поэтому $\dim V = \dim (V^{\perp})^{\perp}$, и из совпадения размерностей пространства $(V^{\perp})^{\perp}$ и его подпространства V следует их совпадение. $\square$

Лемма 23. *Пусть $W = V \oplus V^{\perp}$, $e_1, \ldots, e_r$ — базис в V, $e_{r+1}, \ldots, e_n$ — базис в $V^{\perp}$. Тогда в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица билинейной функции имеет вид* $G = \left(\begin{array}{c|c} \star & 0 \\ \hline 0 & \star \end{array}\right)$.

Доказательство. Поскольку при $i \leqslant r$, $j > r$ (и наоборот, при $i > r$, $j \leqslant r$) $g(e_i, e_j) = 0$, так как векторы e_i, e_j принадлежат различным прямым слагаемым, то в левом нижнем и правом верхнем углах матрицы будут нули. $\square$

Кососимметрические билинейные функции

$g(a,b) = -g(b,a)$

Пусть g — кососимметрическая билинейная функция на пространстве W.

Рассмотрим сначала случай, когда размерность W мала.

1. Т.к. $g(e,e) = -g(e,e)$, то любая кососимметричная функция на одномерном пространстве тождественно равна нулю.

2. В двумерном случае, если g не тождественно равна нулю, то найдутся такие векторы $a, b \in W$, что $g(a,b) = \alpha \neq 0$. Приэтом эти два вектора обязаны быть линейно независимыми: если $b = \lambda a$, то $g(a,b) = \lambda g(a,a) = 0$. Следовательно, они образуют базис в двумерном пространстве W. В этом базисе матрица функции g имеет вид $G = \begin{pmatrix} g(a,a) & g(a,b) \\ g(b,a) & g(b,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. Взяв базис $e_1 = a$, $e_2 = \frac{1}{\alpha} b$, получим в нем матрицу $G' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, у любой кососимметрической функции на двумерном пространстве существует базис, в котором ее матрица имеет один из двух видов — $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 24. *Для любой кососимметричной билинейной функции g на вещественном или комплексном векторном пространстве существует базис, в котором ~~его~~ ее матрица имеет блочно-диагональный вид с блоками $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и (0) на диагонали. Этот вид единственен, с точностью до перестановки блоков.*

Доказательство. Если $g \neq 0$, то найдутся такие линейно независимые векторы $a, b \in W$, что $g(a,b) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $g(a,b) = 1$. Возьмем $V = \langle a, b \rangle \subset W$. Ограничение g_V функции g на V невырождено, т.к. матрица функции g_V равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, следовательно, $W = V \oplus V^\perp$, и $\dim V^\perp = n-2$. В $V^\perp$ по предположению индукции можно выбрать нужный базис. Добавив к нему векторы a и b, получим искомый базис.

Итак, любая кососимметрическая билинейная функция имеет нормальный вид $g(x,y) = x^1y^2 - x^2y^1 + x^3y^4 - x^4y^3 + \ldots + x^{2k-1}y^{2k} - x^{2k}y^{2k-1}$. Единственность следует из того, что число $2k = \operatorname{rk} G$ не зависит от выбора базиса.

$\square$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & & \boxed{0} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Блочно-диаг. вид.

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{0} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \text{по индукции требуемый вид} \end{pmatrix}$$

V

$V^{\perp_g}$

$g(e_i, e_j) = 0$

$i \leq 2,\ j > 2.$

e_1, e_2 – базис V

$e_3, \dots, e_n$ – базис

n блоков

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x^1 \cdots x^n)\, G \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} =$$

$$g(x,y) = (x^1\ x^2)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\y^2\end{pmatrix}$$

$$= (-x^2\ \ x^1)\begin{pmatrix}y^1\\y^2\end{pmatrix}$$

$$= x^1y^2 - x^2y^1$$

$$g(x,y) = \underbrace{x^1y^2 - x^2y^1}_{1\text{ блок}} + \underbrace{x^3y^4 - x^4y^3}_{2\text{ блок.}} + \ldots + \underbrace{x^{2r-1}y^{2r} - x^{2\ldots}}_{r\text{-бло}\ldots}$$

норм. вид кососимм. билин. ф-ии.

$2r$ — ранг G.