1. Доказать, что аксиома отделимости T_1 эквивалентна тому, что все одноточечные множества замкнуты.

2. Доказать, что прямая и окружность не гомеоморфны.

3. Доказать, что плоскость и однополостный гиперболоид не гомеоморфны.

4. Является ли дискретное пространство метрическим (или, точнее, метризуемым)?

5. Доказать, что топологии на аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$, заданные метриками $d(\bar{x}, \bar{y}) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$, $1 \leq p \leq \infty$ ($\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$), совпадают. Что это за метрика при $p = \infty$?

6. Доказать, что вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ компактно.

7. Доказать, что вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ хаусдорфово.

8. Доказать, что вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ удовлетворяет второй аксиоме счётности.

9. Доказать, что вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ не гомеоморфно n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$ при $n \geq 2$.

10. Доказать, что пересечение счетного семейства открытых всюду плотных подмножеств $\mathbb{R}^n$ всюду плотно.

11. Доказать, что замыкание связного подмножества топологического пространства связно.

12. Может ли замыкание линейно связного подмножества топологического пространства быть не линейно связным?

13. Каким аксиомам отделимости удовлетворяет аффинное прямая $\mathbb{R}$ с топологией Зарисского?

14. Имеется ли в аффинной прямой $\mathbb{R}$ с топологией Зарисского счетное всюду плотное множество?

15. Верно ли, что если любая непрерывная функция на топологическом про- странстве X принимает все промежуточные значения (т.е., если она прини- мает какие-то два значения a и b, то она принимает и все значения между a и b), то X связно?

16. Допустим, что для любого семейства замкнутых подмножеств, пересечение которых пусто, найдётся конечное число среди них, пересечение которых пусто. Докажите, что это допущение равносильно компактности.

17. Пространство X — фактор аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$ по подгруппе $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ с соответствующей фактор-топологией. Может ли топология на X индуцироваться метрикой на нем? Если да, определите соответствующую метрику.

18. В топологическом пространстве все открытые множества назвали замкнутыми (и наоборот) и пространство осталось топологическим. Доказать, что оно либо было дискретным, либо нехаусдорфовым.

19. Доказать, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, y) \in X \times X : x = y\} \subset X \times X$ замкнуто в $X \times X$.

20. Построить непрерывное отображение канторова множества на отрезок.

21. Докажите, что пространства $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ (целых, рациональных, ирра- циональных и вещественных чисел соответственно; с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$) попарно не гомеоморфны.

22. Докажите, что для открытых подмножеств евклидовых пространств связность эквивалентна линейной связности.

23. Докажите, что пространство с антидискретной топологией стягиваемо.

24. Доказать, что пространства $O(3) = \{A \in Mat_{\mathbb{R}}(3,3) : A^T A = E\}$ и $GL(3,\mathbb{R}) = \{A \in Mat_{\mathbb{R}}(3,3) : det\, A \neq 0\}$ (как подпространства $Mat_{\mathbb{R}}(3,3)) \cong \mathbb{R}^9$) гомото- пически эквивалентны.

25. Доказать, что $\mathbb{R}P^n \backslash \{pt\}$ (проективное пространство без точки) гомотопически эквивалентно $\mathbb{R}P^{n?1}$.

26. Является ли проективное пространство $\mathbb{R}P^{n?1}$ (как-то вложенное в $\mathbb{R}P^n$) деформационным ретрактом $\mathbb{R}P^n \setminus \{pt\}$ (проективного пространства без точки)?

27. Является ли сфера $\mathbb{S}^{n?1}$ (как-то вложенная в $\mathbb{R}P^n$) деформационным ретрактом $\mathbb{R}P^n \setminus \{pt\}$ (проективного пространства без точки), $n > 2$?

28. Доказать, что пространства $SO(3) = \{A \in Mat_{\mathbb{R}}(3,3) : A^T A = E, det\ A = 1\}$ и $GL_+(3,\mathbb{R}) = \{A \in Mat_{\mathbb{R}}(3,3) : det\, A > 0\}$ (как подпространства $Mat_{\mathbb{R}}(3,3)) \cong \mathbb{R}^9$) гомотопически эквивалентны.

29. Доказать, что пространства $O(n) = \{A \in Mat_{\mathbb{R}}(n,n) : A^T A = E\}$ и $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in Mat_{\mathbb{R}}(n,n) : det\, A \neq 0\}$ (как подпространства $Mat_{\mathbb{R}}(n,n)) \cong R^{n^2}$) гомотопически эквивалентны.

30. Доказать, что пространства $U(n) = \{A \in Mat_{\mathbb{C}}(n,n) : A^T A = E\}$ и $GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in Mat_{\mathbb{C}}(n,n) : det\, A \neq 0\}$ (как подпространства $Mat_{\mathbb{C}}(n,n)) \cong \mathbb{C}^{n^2}$) гомотопически эквивалентны.

31. Сохраняется ли хаусдорфовость при гомотопической эквивалентности?

32. Сохраняется ли связность при гомотопической эквивалентности?

33. Пусть f — отображение аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ в топологическое пространство X. Доказать что отображение f гомотопно отображению в точку.

34. Является ли граница замкнутого кольца на плоскости (области, заключенной между двумя концентрическими окружностями) его ретрактом?

35. Является ли граница замкнутого кольца на плоскости (области, заключен- ной между двумя концентрическими окружностями) его деформационным ретрактом?

36. Верно ли, что $[X, Y \times Z] = [X, Y] \times [X, Z]$? Верно ли, что $[X \times Y, Z] = [X, Z] \times [Y, Z]$? ($[X, Y]$ — множество классов гомотопической эквивалентности отображений из X в Y).

37. Доказать, что в фундаментальной группе сферы с двумя ручками (т.е. поверхности рода 2) содержится свободная группа с двумя образующими.

38. Доказать, что сфера с g ручками (поверхность рода g) без m точек (g и m — натуральные числа) гомотопически эквивалентна букету окружностей. Сколько окружностей в этом букете?

39. Вычислить фундаментальную группу пространства, состоящего из ребер тетраэдра.

40. Пусть $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — отображение, заданное формулой $f(\varphi) = n\varphi$, где φ — координата на окружности. Вычислить отображение $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$.

41. Пусть $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$ — проекция тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1\mathbb{S}^1$ на первую окружность. Вычислить отображение $_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$.

42. Доказать, что для каждого натурального числа n отображение $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, определённое по формуле $z \mapsto z^n$, является накрытием.

43. Какое пространство является пространством универсального накрытия над $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

44. Доказать, что фундаментальная группа пространства $GL(n, \mathbb{C})$ невырожденных комплексных матриц размера $n \times n$ бесконечна.

45. Доказать, что граничная окружность ленты Мёбиуса не является ретрактом самой ленты Мёбиуса.

46. Может ли плоскость с двумя выколотыми точками быть пространством накрытия над тором?

47. Может ли плоскость с двумя выколотыми точками быть пространством накрытия над (бесконечным) цилиндром?

48. Доказать, что фундаментальная группа сферы с $g \geq 2$ ручками не коммутативна.

49. Описать универсальное накрытие над бутылкой Клейна.

50. Найти универсальное накрытие над букетом окружности и (двумерной) сферы.

51. Найти универсальное накрытие над произведением окружности и двумерной сферы.

52. Найти универсальное накрытие над произведением окружности и проективной плоскости.