Введение в топологию (конспект, 2023 г.)

Общая топология

Топология

Определение 1 *На множестве X задана топология, если задан набор Ω_X его подмножеств, удовлетворяющих условиям*

(i) $\emptyset, X \in \Omega_X$;

(ii) *для любых* $U_1, \ldots, U_n \in \Omega_X$ $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \Omega_X$;

(iii) *для любых* U_α, $\alpha \in A$, $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \Omega_X$ *(здесь A — произвольное множество индексов, в частности, бесконечное).*

Элементы Ω_X называются открытыми множествами. Дополнения к ним $X \setminus U$, $U \in \Omega_X$, нахзываются замкнутыми.

Заметим, что условие (2) достаточно проверять лишь для $n = 2$.
Примеры: дискретная и антидискретная топологии, топологии на двухточечном множестве, естественная топология и топология Зарисского на прямой.
База топологии.

Определение 2 *Базой топологии Ω_X назвается такое подмножество $\mathcal{B} \subset \Omega_X$, что любое $U \in \Omega_X$ можно представить в виде объединения множеств из $\mathcal{B}$, т.е. $\forall U \in \Omega_X$ $\exists B_\alpha$, $\alpha \in A$, $U = \cup_{\alpha \in A} B_\alpha$.*

Лемма 3 *Пусть $\mathcal{B}$ — набор подмножеств множества X. Предположим, что*

- *для любой точки $x \in X$ существует $B \in \mathcal{B}$, содержащее x;*
- *для любых $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и для любой точки $x \in B_1 \cap B_2$ существует такое $B_3 \in \mathcal{B}$, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ и $x \in B_3$.*

Тогда $\mathcal{B}$ образует базу некоторой топологии на X.

Доказательство. По определению базы, мы должны определить Ω_X как всевозможные объединения множеств из $\mathcal{B}$ и проверить, что выполняется определение топологии.
(1) $\emptyset$ — это объединение множеств в "пустом количестве", $\cup_{\alpha \in \emptyset} B_\alpha$. Проверим, что $X \in \Omega_X$: для каждой точки $x \in X$ возьмем содержащее ее множество $B_x \in \mathcal{B}$, тогда $X = \cup_{x \in X} B_x$.
(2) Если $U_\gamma = \cup_{\alpha \in A} B_{\gamma,\alpha}$, $B_{\gamma,\alpha} \in \mathcal{B}$, то $\cup_\gamma U_\gamma = \cup_{\gamma,\alpha} B_{\gamma,\alpha}$ есть объединение множеств из базы $\mathcal{B}$.
(3) Пусть $U_1 = \cup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ $U_2 = \cup_{\alpha \in A} B_\alpha$, тогда $U_1 \cap U_2 = \cup_{\gamma \in \Gamma, \alpha \in A} B_\gamma \cap B_\alpha$, и остается проверить, что $B_\gamma \cap B_\alpha \in \Omega_X$. Пусть $x \in B_1 \cap B_2$. Тогда существует такое $B_x \in \mathcal{B}$, что $B_x \subset B_1 \cap B_2$ и $x \in B_x$, и, очевидно, что $B_1 \cap B_2 = \cup_{x \in B_1 \cap B_2} B_x$. $\square$

Таким образом, топологиюможнно задать более экономным способом, не перечисляя все открытые множества, а лишь элементы базы. Можно сэкономить еще больше.

Определение 4 *Предбазой топологии Ω_X назвается такое подмножество $\mathcal{P} \subset \Omega_X$, что любое $U \in \Omega_X$ можно представить в виде объединения (в любом количестве) конечных пересечений множеств из $\mathcal{P}$.*

Лемма 5 *Пусть $\mathcal{P}$ — набор подмножеств множества X. Предположим, что*

- *для любой точки $x \in X$ существует $P \in \mathcal{P}$, содержащее x;*

Тогда $\mathcal{P}$ образует предбазу некоторой топологии на X.

Доказательство. Достаточно доказать, что всевозможные конечные пересечения множеств из $\mathcal{P}$ образуют базу некоторой топологии. Проверим второй пункт из леммы о базе. Пусть $B_1 = \cap_{i=1}^n P_i$, $B_2 = \cap_{i=n+1}^m P_i$, $x \in B_1 \cap B_2$. Положим $B_3 = \cap_{i=1}^m P_i = B_1 \cap B_2$.

□

Свойство, фигурирующее в этой лемме, лежит в основе следующего определения:

Определение 6 *Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых подмножеств в топологическом пространстве X. Оно называется (открытым) покрытием, если для любой точки $x \in X$ существует подмножество $U_\alpha \in \mathcal{U}$, в котором лежит x.*

Топология на метрическом пространстве

Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ. Открытым шаром $O_r(x)$ радиуса r с центром x называется множество $O_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$.

Лемма 7 *Набор множеств $O_r(x)$, где $r > 0$, $x \in X$, образует базу некоторой топологии.*

Доказательство. Т.к. $x \in O_r(x)$ для любого $r > 0$, остается проверить второе условие леммы о базе. Пусть $x \in O_{r_1}(x_1) \cap O_{r_2}(x_2)$. Тогда $\rho(x, x_1) < r_1$, $\rho(x, x_2) < r_2$. Возьмем $0 < r < \min(r_1 - \rho(x, x_1), r_2 - \rho(x, x_2))$. Нужное нам подмножество есть $O_r(x)$. Действительно, x в нем лежит, а если $y \in O_r(x)$, то $\rho(y, x_i) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, x_i) < (r_i - \rho(x, x_i)) + \rho(x, x_i) = r_i$, поэтому $y \in O_{r_1}(x_1) \cap O_{r_2}(x_2)$.

□

Определение 8 *Топология, задаваемая этой базой, называется метрической топологией (или топологией, согласованной с (или индуцированной) метрикой).*

Разные метрики могут задавать как одну и ту же топологию, так и разные топологии.

Существуют топологии, не индуцированные никакой метрикой — например, двухточечное пространство с не дискретной и не антидискретной топологией.

Часто на линейных пространствах метрика задается нормой. Примеры: $\mathbb{R}^n$, $C[0, 1]$.

Замыкание, внутренность и т.п.

Далее открытые множества, содержащие точку $x \in X$ будем называть (открытыми) окрестностями этой точки.

Определение 9 *Пусть $A \subset X$ — подмножество в топологическом пространстве. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения для A, если для любой ее окрестности U имеем $U \cap A \neq \emptyset$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой A, если существует окрестность V точки x, целиком содержащаяся в A. Множество всех точек прикосновения называется замыканием множества A и обозначается $\overline{A}$; множество всех внутренних точек называется внутренностью множества A и обозначается $Int\ A$.*

Очевидно, что

Лемма 10 *$Int\ A \subset A \subset \overline{A}$; $Int\ A = X \setminus (\overline{X \setminus A})$.*

Более того, как подсказывают названия,

Лемма 11 *$\overline{A}$ замкнуто; $Int\ A$ открыто.*

Доказательство. Ввиду последнего равенства достаточно доказать лишь одно из двух утверждений. Докажем, что $\overline{A}$ замкнуто, или, что то же самое, что $X \setminus \overline{A}$ открыто. Если $x \in X \setminus \overline{A}$, то существует его окрестность U_x, не пересекающаяся с A. Покажем, что она не пересекается и с $\overline{A}$. От противного: пусть $y \in U_x \cap \overline{A}$. Поскольку y является точкой прикосновения, любая ее окрестность пересекается с A — в частности, сама U_x — противоречие. Таким образом, $U_x \subset X \setminus \overline{A}$. Тогда $\cup_{x \in X \setminus \overline{A}} U_x = X \setminus \overline{A}$, т.е. $X \setminus \overline{A}$ открыто как объединение открытых множеств.

□

Лемма 12 *Замыкание $\overline{A}$ множества A равно пересечению всех замкнутых подмножеств, содержащих A.*

Доказательство. Обозначим пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих A, через C. Т.к. пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто, C замкнуто. Т.к. все пересекаемые подмножества содержат A, то и их пересечение тоже содержит A. Поскольку одно из пересекаемых подмножеств есть $\overline{A}$ (оно замкнуто и содержит A), пересекая его с другими замкнутыми подмножествами, мы можем лишь уменьшить C, поэтому $C \subset \overline{A}$. Докажем обратное включение $\overline{A} \subset C$ от противного: пусть имеется точка $x \in \overline{A}$, но $x \notin C$. Поскольку C замкнуто, $U = X \setminus C$ открыто и содержат x, значит, является окрестностью x. Поскольку x — точка прикосновения для A, $U \cap A \neq \emptyset$, т.е. существует $y \in U \cap A$. Про y можно сказать, что $y \in A$ и $y \notin C$ — это противоречит тому, что $A \subset C$.

$\square$

Пусть $A \subset X$ — подмножество в топологическом пространстве. Топология Ω_X на X индуцирует топологию Ω_A на A следующим образом: $\Omega_A = \{U \cap A : U \in \Omega_X\}$. В частности, в индуцированной топологии само A открыто и замкнуто, хотя оно не обязано быть таковым в топологии Ω_X.

Непрерывное отображение, непрерывность в точке

Определение 13 *Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно в точке $x \in X$, если для любой окрестности V точки $f(x)$ существует такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$. Отображение f непрерывно, если оно непрерывно в любой точке $x \in X$.*

Лемма 14 *Отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.*

Доказательство. $\Leftarrow$: Выберем точку $x \in X$ и проверим непрерывность в ней: возьмем произвольную окрестность V точки $f(x)$. Ее прообраз $U = f^{-1}(V)$ открыт и содержит точку x, при этом $f(U) = V$.
$\Rightarrow$: Пусть $V \subset Y$ открытое. Для любой точки $y \in V$ и любого ее прообраза $x \in f^{-1}(y)$ существует такая окрестность U_x, что $f(U_x) \subset V$. Положим $U = \cup_x U_x$. Оно открыто, и $U = f^{-1}(V)$.

$\square$

Проверку непрерывности можно производить не на всех открытых множествах, а на базе или предбазе топологии:

Лемма 15 *Пусть $\mathcal{B}$ — (пред)база топологии на Y. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого множества из $\mathcal{B}$ открыт.*

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для непрерывности в точке.
Примеры: отображение в точку $f : X \to Y$, при котором $f(x) = y_0 \in Y$ для любого $x \in X$, является непрерывным; композиция непрерывных отображений является непрерывной; вложение подпространства $A \subset X$ в X непрерывно.

Определение 16 *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное взаимно-однозначное отображение. Взаимная однозначность означает существование обратного отображения $f^{-1} : Y \to X$. f называется гомеоморфизмом, если f и f^{-1} непрерывны. Пространства X и Y называются гомеоморфными, если между ними существует гомеоморфизм.*

Гомеоморфность является отношением эквивалентности.
Пример: интервал $(0, 1)$ и прямая гомеоморфны.

Связность

Определение 17 *Пространство X называется несвязным, если его можно представить как объединение двух непересекающихся непустых открытых множеств $X = A \cup B$. В противном случае X называется связным.*

Заметим, что в этом определении A и B одновременно и открыты, и замкнуты. Такие множества называют открыто-замкнутыми.
Пример: двухточечное пространство с дискретной топологией несвязно.
Связные открыто-замкнутые подмножества называются компонентами связности.

Лемма 18 *Отрезок $[0, 1]$ связен.*

Доказательство. От противного: пусть $[0, 1] = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Для определенности считаем, что $0 \in A$. Пусть $t = \inf B$. Это — точка прикосновения для B, и, поскольку B замкнуто, $\overline{B} = B$, значит, $t \in B$. Но B также открыто, поэтому, если $t > 0$, то у t существует окрестность, целиком лежащая в B — противоречие с определением t. Если $t = 0$, то противоречие другое: $0 \in B$ и $0 \in A$ не может выполняться одновременно.

□

Это доказательство можно подправить, чтобы получить следующее утверждение

Лемма 19 *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, X связно. Тогда $f(X) \subset Y$ связно. В частности, связность сохраняется при гомеоморфизмах.*

Определение 20 *(Непрерывным) путем в X называется непрерывное отображение $f : [0, 1] \to X$. Точки $f(0)$ и $f(1)$ называются началом и концом пути.*

Определение 21 *Пространство X называется линейно связным, если для любых $x, y \in X$ существует путь, соединяющий x и y.*

Отрезок, прямая, окружность, плоскость, сфера, и т.п. линейно связны.

Лемма 22 *Линейно связное пространство является связным.*

Доказательство. От противного: пусть $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, выберем точку $x \in A$, $y \in B$ (оба множества непусты). Соединим x и y путем $f : [0, 1] \to X$. Тогда $U = f^{-1}(A)$ и $V = f^{-1}(B)$ непусты (т.к. $0 \in U$, $1 \in V$), не пересекаются, и $[0, 1] = U \cup V$, что противоречит связности отрезка. □

Обратное неверно: из линейной связности связность не следует, как видно из следующего примера. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ состоит из графика функции $y = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$, и отрезка, соединяющего точки оси Oy $(0, -1)$ и $(0, 1)$. Топология на X — индуцированная стандартной топологией плоскости.

Компактность

Определение 23 *Пространство называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.*

Конечное пространство компактно в любой топологии.
Дискретное пространство компактно $\iff$ оно конечно.

Лемма 24 *Замкнутое подпространство компакта компактно.*

Доказательство. Пусть X компактен, $A \subset X$ замкнуто, и пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие A. Тогда $U_0 = X \setminus A$ открытое. Добавим его к покрытию и получим покрытие всего X. Из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ и, возможно, U_0. Тогда $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ есть покрытие A. □

Лемма 25 *Образ компакта компактен.*

Доказательство. Прообраз открытого покрытия — открытое покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие, его образ будет конечным подпокрытием. □

Лемма 26 (Лебега) *X — метрический компакт, $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие, тогда существует такое $r > 0$, что для любого $x \in X$ шар $O_r(x)$ содержится хотя бы в одном U_α.*

Доказательство. Для каждого $x \in X$ найдем такое $\epsilon_x > 0$, что $O_{\epsilon_x}(x)$ содержится в некотором U_α. Рассмотрим покрытие шарами $O_{\epsilon_x/2}(x)$ и выберем из него конечное подпокрытие $O_{\epsilon_{x_i}/2}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда каждая точка x лежит в одном из шаров вида $O_{\epsilon_{x_i}/2}(x_i)$ (это — покрытие), т.е. $d(x, x_i) < \epsilon_{x_i}/2$. Положим $r = \min\{\epsilon_{x_i}/2 : i = 1, \ldots, n\}$. Пусть $y \in O_r(x)$, т.е. $d(x, y) < r$, тогда $d(y, x_i) \leqslant d(y, x) + d(x, x_i) < r + \epsilon_{x_i}/2 < \epsilon_{x_i}$, значит, $y \in O_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$, поэтому весь шар $O_r(x)$ лежит в $O_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$.

□

Отделимость

Имеется много разных свойств отделимости. Мы обсудим самые основные.

Определение 27 *Пространство X обладает свойством отделимости (T_1), если для любых двух точек $x, y \in X$ существуют такие их окрестности U_x и U_y, что $x \notin U_y$ и $y \notin U_x$.*

Лемма 28 *Любая точка T_1-пространства замкнута.*

Доказательство. Пусть $x, y \in X$, U_x, U_y — их окрестности, тогда $\cup_{y \neq x} U_y = X \setminus \{x\}$ — открыто как объединение открытых множеств.

□

Определение 29 *Пространство X хаусдорфово, если для любых двух точек $x, y \in X$ существуют их непересекающиеся окрестности.*

Это свойство часто обозначается (T_2).

Последовательность точек $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к точке x, если любая ее окрестность содержит все точки последовательности, кроме конечного их числа. Такая точка x называется пределом последовательности.

Лемма 30 *Если пространство хаусдорфово, то любая последовательность точек не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Очевидно.

□

Также как для точек, открытое множество, содержащее данное замкнутое множество, мы будем называть его окрестностью.

Определение 31 *Пространство X обладает свойством отделимости (T_3), если для любой точки $x \in X$ и для любого замкнутого множества A, $x \notin A$, существуют непересекающиеся окрестности точки x и множества A.*

Пространство X обладает свойством отделимости (T_4), если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subset X$ существуют их непересекающиеся окрестности.

Пространство, обладающее (T_1) и (T_3), называется регулярным. Пространство, обладающее (T_1) и (T_4), называется нормальным.

Нормальные пространства являются регулярными, а регулярное — хаусдорфовыми.

Лемма 32 *Компактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство. (T_1) следует из (T_2), остается проверить (T_4). Сначала докажем (T_3). Пусть $x \in X$, $A \subset X$ — замкнуто. Для каждого $y \in F$ выберем непересекающиеся окрестности U_y и V_y точек x и y ($x \in U_y$, $y \in V_y$). Тогда $\{V_y : y \in A\}$ — покрытие A. Поскольку замкнутое подмножество компактного пространства компактно, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$. Рассмотрим окрестность $U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ точки x и $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ множества A. Они, очевидно, не пересекаются.

Далее, пусть $A, B \subset X$ — не пересекающиеся замкнутые множества. Для каждой точки $x \in B$ найдем непересекающиеся окрестности U_x точки x и V_x множества A (регулярность мы уже доказали). Окрестности U_x, $x \in B$, составляют покрытие B, выберем конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$, тогда $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}$ и $V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_m}$ будут непересекающимися окрестностями множеств A и B.

□

Лемма 33 *Компактное подмножество A хаусдорфова пространства X замкнуто.*

Доказательство. (а) для любой $x \in X$ существует окрестность W_x множества A и окрестность V точки x, которые не пересекаются (для каждой $y \in A$ найдем U_y и V_y, выберем конечное подпокрытие U_{y_i}, тогда $W_x = \cap_i V_{y_i}$ открыто);

(б) для каждой $x \notin A$ выберем такую окрестность W_x, тогда их объединение $\cup_{x \notin A} W_x$ открыто и является дополнением к A. □

Теорема 34 *Биективное непрерывное отображение компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y — гомеоморфизм.*

Доказательство. Достаточно проверить, что образ замкнутых подмножеств замкнут (непрерывность обратного отображения). Пусть $A \subset X$ замкнуто. Тогда A компактно. Тогда $f(A)$ компактно, и, как компактное подмножество в хаусдорфовом пространстве — замкнуто.

□

Лемма 35 (Урысон) *Если $F_0, F_1 \subset X$ — два непересекающихся замкнутых множества в нормальном пространстве X, то существует непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, равная 0 на F_0 и 1 на F_1.*

Доказательство. Обозначим через D множество двоично-рациональных чисел на отрезке $[0, 1]$, т.е. чисел вида $\frac{m}{2^n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Для каждого $r \in D$ построим открытое множество G_r так, чтобы при $r < r' \in D$ выполнялось $\overline{G}_r \subset G_{r'}$; $F_0 \subset G_0$, $G_1 \subset X \setminus F_1$.

Положим $G_1 = X \setminus F_1$. Нормальность означает, что существуют непересекающиеся открытые окрестности U и V множеств F_0 и F_1. Положим $G_1 = U$. Тогда $\overline{U} \subset X \setminus V$ (т.к. $X \setminus V$ замкнуто и содержит U, а замыкание U — самое маленькое из множеств с этими свойствами). Таким образом, получаем два замкнутых множества $\overline{G}_0$ и $X \setminus G_1$. Их можно отделить окрестностями U' и V'. Положим $G_{1/2} = U'$. Аналогично предыдущему, $\overline{G}_{1/2} \subset G_1$ и $\overline{G}_0 \subset G_{1/2}$. Далее — по индукции для любых $r, r' \in D$ строим $G_{\frac{r+r'}{2}}$.

Определим функцию $f : X \to [0, 1]$ так: если $x \in F_1$, то $f(x) = 1$, а для всех остальных точек положим $f(x) = \inf\{r : x \in G_r\}$. Если $x \in F_0 \subset G_0$, получаем $f(x) = 0$. Остается проверить непрерывность. Непрерывность удобно проверять для некоторой предбазы. Возьмем предбазу на $[0, 1]$, состоящую из полуинтервалов вида $[0, a)$ и $(b, 1]$.

Заметим, что $f^{-1}([0, a)) = \cup_{r<a} G_r$. Включение $\supset$ очевидно. Проверим обратное включение: пусть $f(x) < a$, возьмем $s \in D$, $f(x) < s < a$, тогда $x \in G_s \subset \cup_{r<a} G_r$.

Для второго типа полуинтервалов имеем $f^{-1}((b, 1]) = X \setminus \cap_{r>b} \overline{G}_r$. Заметим, что т.к. $G_r \subset \overline{G}_r \subset G_{r'}$ для любых $r, r' \in D$ если $r < r'$, поэтому $\cap_{r>b} \overline{G}_r = \cap_{r>b} G_r$. Проверим, что $f^{-1}([0, b]) = \cap_{r>b} G_r$. Если $\inf\{s \in D : x \in G_s\} = f(x) \leqslant b$, то $x \in G_s$ для любого $s \in D$, $s > b$, значит, лежит в их пересечении. Обратно, если $x \in \cap_{r>b} G_r$, то $f(x) < s$ для любого $s > b$, откуда $f(x) \leqslant b$.

□

В метрических пространствах ситуация проще. Для подмножества $F \subset X$ в метрическом пространстве X зададим функцию $f(x) = \rho(x, F)$, где под расстоянием $\rho(x, F)$ от точки x до множества F понимают $\inf\{\rho(x, y) : y \in F\}$.

Лемма 36 *Функция f непрерывна.*

Доказательство. Пусть $z \in F$, тогда $\rho(y, F) \leqslant \rho(y, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(x, z)$. Это неравенство верно для любой точки z, поэтому можно в правой части перейти к инфимуму: $\rho(y, F) \leqslant \rho(x, y) + \rho(x, F)$, откуда $\rho(y, F) - \rho(x, F) \leqslant \rho(x, y)$. Меняя точки x и y местами, получаем $|\rho(y, F) - \rho(x, F)| \leqslant \rho(x, y)$.

□

Если F замкнуто, то $\rho(x, F) = 0$ равносильно тому, что $x \in F$.

Теорема 37 *Метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть $F_0, F_1 \subset X$ — два непересекающихся замкнутых множества. Положим $f(x) = \frac{\rho(x,F_0)}{\rho(x,F_0)+\rho(x,F_1)}$. Заметим, что знаменатель отличен от 0: если оба слагаемых равны 0, то $x \in F_0$ и $x \in F_1$, но они не пересекаются. Если $x \in F_0$, то $f(x) = 0$, если $x \in F_1$, то $f(x) = 1$, а также $f(x) \in [0, 1]$ для любого $x \in X$. Непрерывность f очевидна. Для доказательства (T_4) остается взять в качестве окрестностей $U_0 = f^{-1}([0, 1/2))$ и $U_1 = f^{-1}((1/2, 1])$. Проверка (T_1) — простое упражнение.

□

Теорема 38 (Титце) *Пусть X нормально, $Y \subset X$ замкнуто, и $f : Y \to [-1, 1]$ — непрерывная функция. Тогда существует непрерывная функция $h : X \to [-1, 1]$, ограничение которой на Y равно f.*

Доказательство. Строим функцию h индуктивно. Положим $1 = c_0 = \sup\{|f(y)| : y \in Y\} = \|f\|$, $A_0 = f^{-1}([\frac{c_0}{3}, c_0])$, $B_0 = f^{-1}([-1, -\frac{c_0}{3}])$. Множества A_0, B_0 замкнуты (в Y, поэтому и в X) и непересекаются, поэтому по Лемме Урысона существует такая функция $g_0 : X \to [-\frac{c_0}{3}, \frac{c_0}{3}]$, что $g_0 = \frac{c_0}{3}$ на A_0 и $g_0 = -\frac{c_0}{3}$ на B_0. Поэтому $|f(y) - g_0(y)| \leqslant \frac{2c_0}{3}$ для любого $y \in Y$, т.е. $\|f - g_0|_Y\| \leqslant \frac{2c_0}{3}$. По индукции строим функции g_n на X так, чтобы выполнялись условия $\|g_n\| \leqslant \frac{2^n c_0}{3^{n+1}}$ и $\|f - (g_0 + g_1 + \ldots + g_n)|_Y\| \leqslant \frac{2^{n+1} c_0}{3^{n+1}}$. Для этого нужно заменить c_0 на $c_{n-1} = \|f - (g_0 + g_1 + \ldots + g_{n-1})|_Y\|$, а f — на $f - (g_0 + g_1 + \ldots + g_{n-1})|_Y$. Тогда, как и на первом шаге, по Лемме Урысона найдется функция g_n, удовлетворяющая оценкам $\|g_n\| \leqslant \frac{c_{n-1}}{3}$ и $\|f - (g_0 + g_1 + \ldots + g_n)|_Y\| \leqslant \frac{2c_{n-1}}{3}$. Попредположению индукции $c_{n-1} \leqslant \frac{2^n c_0}{3^n}$. Итак, последовательность функций g_n построена. Остается заметить, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ абсолютно и равномерно сходится, т.к. оценивается геометрической прогрессией. Обозначим предел этого ряда через h, а частичные суммы $\sum_{k=0}^{n} g_k$ через h_n. Тогда $\|f - h_n|_Y\| \leqslant \frac{2^n c_0}{3^{n+1}}$, поэтому $f = h|_Y$. А поскольку $\|h_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|g_n\| \leqslant c_0$, получаем, что h принимает значения в $[-1, 1]$.

□

Обозначим через $C(X)$ множество непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X. Это множество имеет структуру алгебры, т.е. согласованные структуры кольца и линейного пространства (над $\mathbb{R}$). Также эта алгебра содержит единицу (и, следовательно, постоянные функции). На этой алгебре имеется норма $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, по отношению к которой $C(X)$ полно, т.е. последовательности Коши имеют предел. Если $A \subset C(X)$ подалгебра, мы говорим, что она разделяет точки X, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует такая непрерывная функция g на X, что $g(x) = 0$, $g(y) = 1$. Ясно, что числа 0 и 1 здесь можно заменить любыми другими, если A содержит константы.

Теорема 39 (Стоуна–Вейерштрасса об аппроксимации) *Пусть X компактное хаусдорфово пространство, $A \subset C(X)$ — подалгебра с единицей, разделяющая точки X. Тогда A плотна в $C(X)$.*

Доказательство. 1. Подмножество $S \subset C(X)$ называется решеткой, если для любых $f, g \in S$ $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in S$. Расширим A до решетки B, включив в нее всевозможные максимумы и минимумы элементов из A. Другими словами, B — минимальная решетка, содержащая A.

2. **Задача из матанализа.** Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен p, что $\max_{x\in[-1,1]} |p(x) - |x|| < \varepsilon$. Это единственная функция, которую придется аппроксимировать многочленами, для доказательства общего случая. Аналогично, для любого $N > 0$ существует многочлен такой p, что $\max_{x\in[-N,N]} |p(x) - |x|| < \varepsilon$.

3. Пусть $f \in C(X)$, $\varepsilon > 0$, и существует многочлен $q \in B$ с $\|f - q\| < \varepsilon$. Тогда существует такая функция $r \in B$, что $\||f| - r\| < 2\varepsilon$. Действительно, достаточно аппроксимировать $|q|$. Пусть $\max_{x\in X} |q(x)| = N$, и пусть p — многочлен из предыдущего пункта, тогда $r(x) = p(q(x))$ — искомая функция (она лежит в B т.к. B — алгебра, поэтому, наряду с любым элементом, содержит и все многочлены от него).

4. Заметим, что $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}((f + g) + |f - g|)$, $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}((f + g) - |f - g|)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и для любой функции $f \in B$ существует такая функция $p \in A$, что $\|f - p\| < \varepsilon$.

5. Теперь доказательство теоремы сводится к следующему утверждению. Пусть $f \in C(X)$, и для любых $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая $g \in B$, что $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$, $|f(y)-g(y)| < \varepsilon$. Тогда $f \in \overline{B}$.

Пусть $g_{x,y} \in S$ удовлетворяет условиям $|f(x) - g_{x,y}(x)| < \varepsilon$, $|f(y) - g_{x,y}(y)| < \varepsilon$. Положим

$$U_x(y) = \{z \in X : g_{x,y}(z) > f(z) - \varepsilon\}.$$

Тогда $y \in U_x(y)$, т.е. это открытое покрытие X. Выберем конечное подпокрытие $U_x(y_1), \ldots, U_x(y_n)$. Положим

$$h_x = \max\{g_{x,y_1}, \ldots, g_{x,y_n}\}.$$

Т.к. любая точка $z \in X$ лежит в одном из $U_x(y_i)$, получаем, что $h_x(z) \geqslant g_{x,y_i}(z) > f(z)-\varepsilon$. Кроме того, по предположению,

$$h_x(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Теперь определим $V(x) = \{z \in X : h_x(z) < f(z) + \varepsilon\}$. Это — открытая окрестность точки x. Опять из покрытия множествами $V(x)$, $x \in X$, конечное подпокрытие $V(x_j)$. Положим $f_0 = \min\{h_{x_1}, \ldots, h_{x_m}\} \in S$. Произвольная точка z лежит в одном из $V(x_j)$, поэтому $f_0(z) \leqslant h_{x_j} < f(z)+\varepsilon$, а так как $h_x(z) > f(z) - \varepsilon$, то $f_0(z) > f(z) - \varepsilon$. Итак, для любого $z \in X$ $|f(z) - f_0(z)| < \varepsilon$.

□

Следствие 40 (Вейерштрасса об аппроксимации) *Пусть $X = \mathbb{D}^m \subset \mathbb{R}^m$, $P \subset C(X)$ — подмножество полиномиальных функций. Тогда P плотно в $C(X)$.*

Конструкции

Произведение пространств.

Пусть X, Y — топологические пространства. База топологии произведения на $X \times Y$ состоит из множеств вида $U \times V$, где U — открытое подмножество в X, а V — открытое подмножество в Y (если $x \in U_1 \times V_1 \cap U_2 \times V_2$, то $x \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, поэтому это база некоторой топологии). Можно также задать предбазу — как множества вида $U \times Y$ и $X \times V$.

Для произведения имеются два естественных отображения проектирования: $p_X : X \times Y \to X$ и $p_Y : X \times Y \to Y$, заданные формулами $p_X(x, y) = x$, $p_Y(x, y) = y$.

Лемма 41 *Пусть Ω — некоторая топология на $X \times Y$, а $\Omega_{X\times Y}$ — топология произведения. Отображения проктирования непрерывны в топологии $\Omega_{X\times Y}$; если отображения проектированияя непрерывны в топологии Ω, то $\Omega_{X\times Y} \subset \Omega$.*

Доказательство. Т.к. $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ открыто (является элементом базы топологии произведения) для любого открытого множества $U \subset X$, это отображение непрерывно в топологии произведения. Если оба отображения p_X и p_Y непрерывны в топологии Ω, а $U \subset X$ и $V \subset Y$ открыты, то $U \times Y$ и $X \times V$ открыты (т.е. лежат в Ω), но тогда и $U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V)$ открыто, и любые объединения таких множеств тоже открыты, поэтому $\Omega_{X\times Y} \subset \Omega$.

□

Если $Y = X$, то в $X \times X$ имеется множество, называемое диагональю, состоящее из точек вида (x, x), $x \in X$.

Лемма 42 *X хаусдорфово $\Longleftrightarrow$ диагональ в $X \times X$ замкнута.*

Доказательство.

□

Теорема 43 *Пусть X, Y компактны, тогда $X \times Y$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{W_\alpha\}$ — покрытие $X \times Y$. Рассмторим более мелкое покрытие: для каждой точки $z = (x, y) \in X \times Y$ выберем окрестность $U_z \times V_z$ из базы топологии произведения так, чтобы она попадала в какое-нибудь из множеств W_α. Если мы сможем выбрать конечное подпокрытие из покрытия $\{U_z \times V_z : z \in X \times Y\}$, то сможем выбрать и конечное подпокрытие из исходного покрытия.

Пусть $x \in X$. Рассмотрим множество $x \times Y \subset X \times Y$. Оно гомеоморфно Y, поэтому компактно. Выберем конечное подпокрытие из покрытия $\{(x \times Y) \cap (U_z \times V_z) : z \in X \times Y\}$. Оно задается конечным набором точек $z_1(x), \ldots, z_n(x) \in X \times Y$. Положим $U_x = U_{z_1(x)} \cap \cdots \cap U_{z_n(x)}$. Очевидно, что $x \in U_x$, поэтому $\{U_x : x \in X\}$ — покрытие X. Из него можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{x_i}\}$. Тогда $U_{z_j(x_i)}$ — конечное покрытие $X \times Y$.

□

Фактор-топология

Фактор-пространства. Классы эквивалентности. Открытые множества — у которых открыт прообраз.

Лемма 44 *Пусть $f : X \to Y$ непрерывно, R (S) — отношение эквивалентности на X (Y), и если $x_1 \sim x_2$, то $f(x_1) \sim f(x_2)$. Тогда f индуцирует непрерывное отображение $\tilde{f} : X/R \to Y/S$ (замыкающее диаграмму).*

Доказательство. Пусть $a \in X/R$, $p_X(x) = a$, положим $\tilde{f}(a) = p_Y(x)$. Корректность очевидна. Пусть U — открытое множество в Y/S. Тогда $p_X^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U)) = f^{-1}(p_Y^{-1}(U))$ открыто, значит, $\tilde{f}^{-1}(U)$ открыто. □

Лемма 45 *Пусть X регулярно, $A \subset X$ замкнуто, тогда X/A хаусдорфово.*

Склейка: $A \subset X$, $f : A \to Y$, тогда $X \cup_f Y = X \sqcup Y/\sim$, где $a \sim f(a)$, $a \in A$. Цилиндр и конус отображения.

$\mathbb{D}^{n+1}/\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n+1}$.

Действие группы.

$\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$.

Поверхности.

Компактно-открытая топология

X, Y — топологические пространства, $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений. Предбаза: $V_{K,U} = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset U\}$.

Лемма 46 *Если X конечно (с дискретной топологией), то отображение $F : C(X, Y) \to \prod_{x \in X} Y$, $F(f) = (f(x))_{x \in X}$, является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Компактность дискретного множества — конечность. Поэтому предбаза к.-о. топологии состоит из множеств вида $V_{x,U} = \{f \in C(X, Y) : f(x) \subset U\}$. Но это в точности предбаза топологии произведения. □

Лемма 47 *Если X компактно, а Y метрическое (с метрикой d), то формула $d(f, g) = \|f - g\| = \max_{x \in X} d(f(x), g(x))$ задает метрику на $C(X, Y)$, и эта метрика задает на $C(X, Y)$ к.-о. топологию.*

Лемма 48 *Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность непрерывных функций (т.е. отображений из X в $\mathbb{R}$). Ее сходимость в к.-о. топологии равносильна равномерной сходимости на компактных подмножествах.*

Лемма 49 *Пусть X, Y, Z — топологические пространства. Тогда отображение $F : C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$, заданное формулой $\{[F(f)](x)\}(y) = f(x, y)$, корректно определено.*

Доказательство. Надо проверить непрерывность отображения $F(f) : X \to C(Y, Z)$ (то, что $[F(f)](x)$ непрерывно для любого $x \in X$, очевидно). Пусть $L \subset Y$ компактно, $W \subset Z$ открыто; возьмем $V_{L,W} \subset C(Y, Z)$. Пусть $[F(f)](x_0) \in V_{L,W}$, т.е. $f(x_0, L) \subset W$. Для непрерывности в x_0 нужно найти такую окрестность U точки x_0, что $f(U, L) \subset W$. Для каждого $y \in L$ можно найти такие окрестности $U_y \subset X$ и $V_y \subset Y$ точек x_0 и y соответственно, что $f(U_y \times V_y) \subset W$ (т.к. f непрерывно). Пользуясь компактностью L, можно оставить лишь конечное число $U_i \times V_i$ таких окрестностей, покрывающее $x_0 \times L$. Беря $U = \cap_i U_i$, получаем требуемую окрестность. $\square$

Замечание. При дополнительных предположениях на данные пространства указанное отображение является непрерывным, а при более сильных предположениях — гомеоморфизмом.

Например, если X и Y компактны, а Z — метрическое, то F — изометрия. Действительно, если $f, g \in C(X \times Y, Z)$, то $d(f, g) = \sup_{(x,y)\in X\times Y} d(f(x, y), g(x, y))$, а $d(F(f), F(g)) = \sup_{x\in X} \sup_{y\in Y} d(f(x, y), g(x, y))$, что одно и то же.

Гомотопии

Гомотопия. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемость.

Свойство продолжения гомотопии

Подпространство $A \subset X$ называется *ретрактом*, если существует такое отображение $r : X \to X$, что $r(X) = A$ и $r|_A = \mathrm{id}_A$.

Оно называется *деформационным ретрактом*, если r гомотопно id_X.

Примеры: $x_0 \times Y \subset X \times Y$; $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Пара (X, A) обладает *свойством продолжения гомотопии*, если любое отображение из $X \times 0 \cup A \times I \subset X \times I$ в произвольное пространство Z продолжается до отображения из $X \times I$ в Z.

Теорема 50 *Пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии $\Longleftrightarrow$ $X \times 0 \cup A \times I$ — ретракт $X \times I$*

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Возьмем $Z = X \times 0 \cup A \times I$ и продолжим тождественное отображение до отображения $X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$. Это отображение и есть ретракция.
$\Longleftarrow$: Пусть $r : X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ — ретракция. Ее композиция с $f : X \times 0 \cup A \times I \to Z$ — требуемое продолжение.

$\square$

Теорема 51 *Если пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии и A стягиваемо, то отображение факторизации $q : X \to X/A$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Стягиваемость A означает существование гомотопии $h : A \times I \to A$, соединяющей тождественное отображение id_A (при $t = 0$) и отображение A в некоторую точку $a_0 \in A$ (при $t = 1$). Зададим отображение $H : X \times 0 \cup A \times I \to X$, $H(x, 0) = x$, $H(a, t) = h(a, t)$, $x \in X$, $a \in A$. По предположению, H продолжается до отображения $F : X \times I \to X$, при этом $F_0 = \mathrm{id}_X$, и $F_t(A) \subset A$ для любого $t \in I$, поэтому корректно определена гомотопия $f_t : X/A \to X/A$, замыкающая коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_t"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "f_t"] & X/A. \end{tikzcd}$$

При $t = 1$ $F_1(A) = a_0$, поэтому корректно определено отображение $g : X/A \to X$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "f_1"] \arrow[ur, "g"] & X/A. \end{tikzcd}$$

Отображения g и q взаимно обратны с точностью до гомотопии: $gq = F_1 \sim F_0 = \mathrm{id}_X$, $qg = f_1 \sim f_0 = \mathrm{id}_{X/A}$.

□

Фундаментальная группа

Пусть (X, x_0) — пространство с отмеченной точкой. Фиксируем на окружности $\mathbb{S}^1$, параметризованной углом $t/2\pi \in [0, 1]$, точку s_0, отвечающую значению $t = 0$.

Непрерывное отображение $\varphi : [0, 1] \to X$ называется *путём*. Непрерывное отображение $\alpha : (\mathbb{S}^1, s_0) \to (X, x_0)$ (переводящее отмеченную точку в отмеченную точку) называется *петлёй*. Петли α_0 и α_1 называются гомотопными, если существует гомотопия α_s, $s \in [0, 1]$, при которой $\alpha_s(s_0) = x_0$ для любого $s \in [0, 1]$. Если петли α и β гомотопны, будем писать $\alpha \sim \beta$. Класс гомотопической эквивалентности петли α будем обозначать $[\alpha]$.

Композицией (произведением) петель α и β называется петля γ, определенная формулой $\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$ Эту композицию будем обозначать $\alpha \cdot \beta$ или просто $\alpha\beta$.

Лемма 52 *Пусть $\alpha_0 \sim \alpha_1$, $\beta_0 \sim \beta_1$, тогда $\alpha_0 \cdot \beta_0 \sim \alpha_1 \cdot \beta_1$.*

Лемма 53 $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \sim (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Доказательство. Пусть $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ — гомеоморфизм, переводящий $[0, 1/2]$ в $[0, 1/4]$, и $[1/2, 3/4]$ в $[1/4, 1/2]$, и пусть φ_s, $s \in [0, 1]$, — гомотопия, соединяющая φ с тождественным отображением отрезка $[0, 1]$. Тогда $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \circ \varphi_t$ — гомотопия, соединяющая $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ с $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

□

Обозначим через ϵ постоянную петлю, $\epsilon(t) = x_0$ при всех $t \in [0, 1]$. Тогда аналогичным образом доказывается

Лемма 54 $\alpha \cdot \epsilon \sim \alpha \sim \epsilon \cdot \alpha$ *для любой петли* α.

Для петли α обозначим $\bar{\alpha}$ петлю, заданную формулой $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ (т.е. пробегаемую в обратном направлении).

Лемма 55 $\alpha \cdot \bar{\alpha} \sim \bar{\alpha} \cdot \alpha \sim \epsilon$ *для любой петли* α.

Доказательство. Гомотопия между $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ и ϵ задается формулой

$$\alpha_s(t) = \begin{cases} \alpha(2t(1-s)), & t \in [0, 1/2]; \\ \alpha(2(1-t)(1-s)), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

□

$\pi_1(X, x_0)$ — определение, индуцирование гомоморфизмов отображениями, гомотопии, сохраняющие отмеченные точки.

Лемма 56 *Отображение $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ индуцирует гомоморфизм групп $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ по формуле $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Если $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ гомотопны с сохранением отмеченных точек, то $f_* = g_*$. Если $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, то $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Зависимость от отмеченной точки (связность)

$\phi_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$, $\phi_\delta\phi_\gamma^{-1}([\alpha]) = [\delta\bar\gamma\alpha\gamma\bar\delta] = [\beta]^{-1}[\alpha][\beta]$, поэтому если $\pi_1(X, x_0)$ абелева, то изоморфизм единственный.

Лемма 57 *Пусть $F_s : X \to Y$ — гомотопия, соединяющая отображения $f, g : X \to Y$, и пусть $\gamma(s) = F_s(x_0)$ — путь, соединяющий точки $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Тогда $f_* = \phi_\gamma \circ g_*$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что петли $f \circ \alpha$ и $\bar\gamma\alpha\gamma$ гомотопны. Рассмотрим цилиндр $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ в качестве $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Тодждественная петля нижнего основания гомотопна последовательному прохождению пути из $(1, 0, 0)$ в $(1, 0, 1)$, тождественной петли верхнего основания и обратного пути из $(1, 0, 1)$ в $(1, 0, 0)$, Взяв композицию с F_s, получаем требуемую гомотопию. ☐

Следствие 58 *Если $f : X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ — изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $g : Y \to X$ — гомотопически обратное отображение. Тогда $g_*f_* = \phi_\gamma$ для некоторого пути γ. Поэтому f_* — мономорфизм, а g_* — эпиморфизм. Меняя местами f_* и g_*, получаем требуемое. ☐

π_1 для стягиваемых пространств, для сфер, для окружности.

Приложения фундаментальной группы окружности

1. Граница диска не является ретрактом диска. $\pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{D}^2) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ нулевое.

Теорема 59 (Брауэр) *Непрерывное отображение диска в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Если вектор, соединяющий x с $f(x)$ ненулевой для любого $x \in \mathbb{D}^2$, то с его помощью можно определить ретракцию диска на его границу. ☐

2. Основная теорема алгебры: любой многочлен над полем $\mathbb{C}$, отличный от константы, имеет корень.

Доказательство. Пусть многочлен $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ не имеет корней, и $n \geqslant 1$. Для каждого $r \geqslant 0$ определим петлю $\phi_r : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\phi_r(t) = \frac{p(re^{2\pi it})}{p(r)}$ (нет корней $\Rightarrow$ $\phi_r(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, 1]$). Рассматривая r как параметр, видим, что петли ϕ_{r_1} и ϕ_{r_2} гомотопны. Поскольку при $r = 0$ петля постоянная, при любом r петля ϕ_r гомотопна постоянной, т.е. $[\phi_r] = 0$ в $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$.

Выберем $r > \max\{|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|, 1\}$, тогда при $|z| = r$

$$|z|^n = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)|z|^{n-1} > |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0|.$$

Рассмотрим многочлен $p_s(z) = z^n + s(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0)$, $s \in [0, 1]$. При выбранном r многочлен $p_s(z)$ не имеет корней при $|z| = r$, поэтому по той же формуле, что и $\phi_r(t)$, получаем петлю $\phi_r(t, s)$ для каждого $s \in [0, 1]$. Ясно, что петли $\phi_r(t, 0)$ и $\phi_r(t, 1)$ гомотопны. Но $\phi_r(t, 0) = r^n e^{2\pi int}$ представляет элемент $n \in \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, а $[\phi_r(t, 1)] = 0$. ☐

Свободные произведения групп, теорема ван Кампена

Пусть G, H — группы. Рассмотрим множество W всех слов (состоящих из букв — элементов этих групп) одного из следующих видов: $g_1h_1g_2h_2 \cdots g_nh_n$, $g_1h_1g_2h_2 \cdots h_{n-1}g_n$, $h_1g_1h_2g_2 \cdots g_{n-1}nh_n$, $h_1g_1h_2g_2 \cdots h_ng_n$, где $g_i \in G \setminus \{e_G\}$, $h_i \in H \setminus \{e_H\}$, а также пустого слова. Такие слова назовем *приведенными.* Определим умножение двух слов как приписывание одного слова к другому, и последующее приведение, т.е. умножение в одной из двух данных групп, если последняя буква первого слова и первая буква второго слова принадлежат одной и той же группе.

Лемма 60 *W — группа.*

Доказательство. Нейтральный элемент — пустое слово, обратный к слову w — слово, составленное из обратных к буквам, причем в обратном порядке. Остается проверить ассоциативность умножения. Это можно сделать непосредственно, разобрав несколько случаев, а можно более концептуально: для каждого $a \in W$ положим $S_a(w) = aw$ (т.е. слово w умножаем на a слева и приводим, если это требуется). Получаем отображение $S_a : W \to W$. Композиция отображений, очевидно, ассоциативна, поэтому $((S_aS_b)S_c)(w) = (S_a(S_bS_c))(w)$ для любых $a, b, c, w \in W$. При $w = 1$, получаем $(ab)c = a(bc)$. $\square$

Обозначение: $G * H$.

Примеры $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_n$. Абеленизация.

Амальгамированное свободное произведение:

Пусть K — группа, $\alpha : K \to G$, $\beta : K \to H$ — гомоморфизмы. Рассмотрим в $G * H$ нормальную подгруппу N, порожденную всеми элементами вида $\alpha(k)\beta(k^{-1})$, $k \in K$. Положим $G *_K H = G * H/N$.

Теорема 61 (ван Кампен) *Пусть $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ — открытые подмножества, $x_0 \in A \cap B$. Предположим, что A, B и $A \cap B$ линейно связны. Пусть $\alpha : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$, $\beta : \pi_1(A \cap B) \to B$. Тогда $\pi_1(X) \cong \pi_1(A) *_{\pi_1(A\cap B)} \pi_1(B)$.*

Доказательство. Пусть $a : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ и $b : \pi_1(B) \to \pi_1(X)$ — отображения, индуцированные вложениями. Сопоставим слову $g_1h_1 \cdots g_mh_m \in \pi_1(A) * \pi_1(B)$ петлю $a(g_1)b(h_1) \cdots a(g_n)b(h_n)$, $g_j \in \pi_1(A)$, $h_j \in \pi_1(B)$, и аналогично — другим типам слов. Это дает гомоморфизм $f : \pi_1(A) * \pi_1(B) \to \pi_1(X)$.

Покажем сюръективность f. Пусть $\gamma : [0, 1] \to X$ — петля. По лемме Лебега существует разбиение отрезка точками t_i, $i = 1, \ldots, n$ так, что $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ содержится в одном из множеств A или B. Обозначим участок петли γ от точки $\gamma(t_i)$ до точки $\gamma(t_{i+1})$ через γ_i, и соединим каждую точку $\gamma(t_i)$ с x_0 таким путем ρ_i, что если t_i лежит в одном из множеств A, B или $A \cap B$, то и весь путь ρ_i лежит в этом же множестве. Тогда для каждого i композиция $\bar{\rho}_i\gamma_i\rho_i$ является петлей, и $\gamma \sim (\bar{\rho}_1\gamma_1\rho_1) \cdots (\bar{\rho}_n\gamma_n\rho_n)$. Но каждая петля — элемент либо $\pi_1(A)$, либо $\pi_1(B)$, т.е. мы нашли слово, которое f отображает в $[\gamma]$.

Пусть γ — петля в $A \cap B$. Тогда $f(\alpha([\gamma])\beta([\gamma]^{-1})) = 1$, поэтому $f(n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Остается показать, что из $f(g) = 1$ следует, что $g \in N$.

$f(g) = 1$ означает, что петля, представляющая g, гомотопна постоянной петле. Пусть $F : [0, 1]^2 \to X$ — соответствующая гомотопия. По лемме Лебега существует такое конечное покрытие квадрата $[0, 1]^2$ квадратами, что образ каждого маленького квадрата целиком лежит либо в A, либо в B (метрику на квадрате надо взять такую, чтобы шары были квадратами). Еще ихмельчая их, можно получить такое разбиение отрезка $[0, 1]$ точками t_i, $i = 1, \ldots, n$, что $F([t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}])$ лежит целиком либо в A, либо в B. Пользуясь линейной связностью X, выберем пути σ_{ij}, соединяющие x_0 с точками $F(t_i, t_j)$ с условием, как и ранее, что если точка $F(t_i, t_j)$ лежит в одном из множеств A, B или $A \cap B$, то и весь путь σ_{ij} лежит в этом же множестве. Злоупотребляя формальностями, мы будет называть путь $F(t, t_j)$, $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ (соотв. $F(t_i, s)$, $t_j \leqslant s \leqslant t_{j+1}$) петлей, подразумевая его композицию с путями $\sigma_{i,j}$ и $\bar{\sigma}_{i+1,j}$ (соотв. с путями $\sigma_{i,j}$ и $\bar{\sigma}_{i,j+1}$).

Петля $F(t, 0)$ представляет элемент g, и может быть записана в виде слова в $\pi_1(A) * \pi_1(B)$. Петля $f(t, 1)$ — постоянная. Между ними имеется конечное число петель $F(t, t_j)$, и мы будем последовательно переходить от петли $F(t, t_j)$ к $F(t, t_{j+1})$. Для каждого такого перехода понадобится еще n переходов. Рассмторим петлю, состоящую из двух участков: $F(t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и постоянного пути $F(1, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t_1$. От этой петли перейдем к петле, состоящей из участков $F(t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant t_{n-1}$, и $F(t_{n-1}, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t_1$. Эти две петли отличаются на квадрате $[t_{n-1}, 1] \times [0, t_1]$, и слова, соответствующие этим петлям, могут отличаться последними двумя буквами. Возможны две ситуации: (а) все 4 буквы (две последние в обоих словах) лежат в одной из групп $\pi_1(A)$ или $\pi_1(B)$ — тогда произведения этих двух букв задают один и тот же элемент этой же группы, т.к. пути, обходязие прямоугольник с разных сторон, гомотопны; (б) эти 4 буквы — из разных групп. Тогда, поскольку весь прямоугольник попадает в одно из множеств A или B, можно сделать так, чтобы все 4 буквы были из одной и той же группы. Например, если $h \in \pi_1(B)$, то $h = \beta(x)$ нужно заменить на $\alpha(x)\beta(x)^{-1}\cdot\beta(x)\in\pi_1(A)$. При этом возникает подслово $\alpha(x)\beta(x)^{-1}\in N$, т.е. соответствующие слова отличаются на слово из N. Передвигаясь так справа налево, и снизу вверх, мы переходим от слова g к пустому слову с помощью приписывания слов из N. Это и значит, что $g\in N$.

□

Следствие 62 *Пусть X есть букет пространств X_α, $\alpha\in\mathcal{A}$. Тогда $\pi_1(X)=*_{\alpha\in\mathcal{A}}\pi_1(_\alpha)$.*

Следствие 63 *$\pi_1(\mathbb{S}^n)$ тривиальна при $n\geqslant 2$.*

Накрытия

Пространство называется локально линейно связным, если любая окрестность любой точки содержит линейно связную окрестность этой точки.

Пример не локально линейно связного пространства - гребень на плоскости: множество $\{(0,t):t\in[0,1]\}\cup\{(s,0):s\in[0,1]\}\cup\{(\frac{1}{n},t):t\in[0,1],n\in\mathbb{N}\}$.

Тройка (Y,p,X), где X и Y – линейно связные и локально линейно связные пространства, а $p:Y\to X$ — непрерывное сюръективное отображение, называется *накрытием*, если у любой точки $x\in X$ существует такая окрестность $U\ni x$, что $p^{-1}(U)=\cup_\alpha V_\alpha$ — объединение непересекающихся открытых множеств в Y, причем $p|_{V_\alpha}:V_\alpha\to U$ — гомеоморфизм для каждого α.

Примеры накрытий и не накрытий.

Лемма 64 *Пусть (Y,p,X) — накрытие. Для любого пути $\gamma:[0,1]\to X$ и для любой такой точки $y\in Y$, что $p(y)=\gamma(0)$, существует единственный путь $\tilde\gamma:[0,1]\to Y$, удовлетворяющий $\tilde\gamma(0)=y$ и $p\circ\tilde\gamma=\gamma$.*

Доказательство. Для каждой точки $\gamma(t)$, $t\in[0,1]$, выберем окрестность U как в определении накрытия, и выберем конечное подпокрытие U_j, $j=1,\dots,m$ пути γ. По лемме Лебега выберем рабиение $[0,1]$ точками t_i, $i=1,\dots,n$, так, чтобы каждый отрезок $[t_i,t_{i+1}]$ отображался бы целиком в одну из U_j. Пусть V — окрестность точки y, гомеоморфно проектирующаяся на окрестность U_1 точки $\gamma(0)$. Гомеоморфизм позволяет однозначно определить $\tilde\gamma$ на отрезке $[0,t_1]$. Повторяя это конечное число раз, получаем $\tilde\gamma$.

□

Следствие 65 *Пусть (Y,p,X) — накрытие, $f:Z\to Y$, $F:Z\times I\to X$ и $p\circ f=F_0$. Тогда существует такое отображение $\tilde F:Z\times I\to Y$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ Z\times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, "\tilde F"] & X \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Для каждой точки $z\in Z$ мы уже умеем поднимать путь $t\mapsto F(z,t)$ в Y. Остается проверить непрерывность, но она очевидна, т.к. окрестности в Y и их проекции в X гомеоморфны.

□

Следствие 66 *Гомоморфизм $p_*:\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(X,p(y_0))$ инъективен, и его образ состоит из тех петель в X, которые поднимаются до петель в Y.*

Доказательство. Пусть γ — петля в Y, и $p \circ \gamma$ — петля в X, гомотопная постоянной. Пусть $F : \mathbb{S}^1 \times I \to X$ — гомотопия, соединяющая $p \circ \gamma$ с постоянной петлей, а $\tilde{F}$ — ее поднятие в Y. Поднятие постоянной петли $\tilde{F}_1$ постоянно, т.е. $\tilde{F}_1(t) = y_0$, а $\tilde{F}_0(t) = \gamma(t)$, где $t \in [0,1]$ — параметр на окружности (отождествляем 0 и 1). Также $\tilde{F}_s(0) = y_0$ для всех $s \in [0,1]$ так как $p(\tilde{F}_s(0)) = F_s(0) = p(y_0)$.

Второе утверждение очевидно.

□

Теорема 67 *Пусть (Y, p, X) — накрытие, $y_0 \in Y$, $x_0 = p(y_0)$ — отмеченные точки, и $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$, где Z линейно связно. Включение $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$ равносильно тому, что существует (и единственно) поднятие $\tilde{f} : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$, т.е. отображение, замыкающее коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Z, z_0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0). \end{tikzcd}$$

Доказательство. Если поднятие $\tilde{f}$ существует, то имеет место включение $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Обратно, пусть это включение имеет место. Выберем путь γ от точки z_0 до точки z. Его можно поднять до пути $\tilde{\gamma}$ от точки y_0 (напомним, что $p(y_0) = x_0 = f(z_0)$) до некоторой точки $y = \tilde{\gamma}(1)$. Положим $\tilde{f}(z) = y$. Если γ' — другой путь от z_0 до z, то мы могли бы вместо y получить другую точку y'. Рассмотрим петлю $\gamma \cdot \bar{\gamma}'$. Тогда путь, составленный из поднятий $\tilde{\gamma}$ и обратного к $\tilde{\gamma}'$ должен быть петлей (а не просто путем) так как класс петли $\gamma\bar{\gamma}'$ попадает в $p_*(\pi_1(Y, y_0))$.

Непрерывность $\tilde{f}$ в точке z можно проверить, беря достаточно малые окрестности V точки $\tilde{f}(z)$. Поскольку f непрерывно, то существует окрестность W точки z, для которой $f(W) \subset U$, где $U = p(V)$. Поскольку $p|_V$ — гомеоморфизм между U и V, получаем, что $\tilde{f}(W) \subset V$.

□

Универсальное накрытие

Пространство X называется *полулокально односвязным*, если для каждой точки $x \in X$ и ее открытой окрестности V имеется такая окрестность $U \subset V$, что любая петля в U может быть стянута в точку в X (т.е. гомотопия может вылезать за пределы U). Это эквивалентно тому, что отображение $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ тривиально.

Пример, когда это не так: Гавайская серьга.

С этого момента до окончания темы про накрытия будем считать, что X не только линейно связно и локально линейно связно, но и *полулокально односвязно*! Такие пространства будем называть "хорошими".

Теорема 68 *Если X — "хорошее" пространство, то существует накрытие $p : \widetilde{X} \to X$ с односвязным $\widetilde{X}$.*

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in X$ и определим $\widetilde{X}$ как множество равенством

$$\widetilde{X} = \{[\gamma] : \gamma \text{ — путь, выходящий из } x_0\}.$$

Отображение p определим как $p([\gamma]) = \gamma(1)$.

Для того, чтобы задать топологию на $\widetilde{X}$, рассмотрим совокупность $\mathcal{U}$ всех открытых подмножеств в X, для которых отображение $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ тривиально. $\mathcal{U}$ составляет базу топологии на X (т.к. X "хорошее").

Для $U \in \mathcal{U}$ и пути γ из x_0 в какую-нибудь точку из U положим

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta] : \eta \text{ — путь в } U, \eta(0) = \gamma(1)\} \subset \widetilde{X}.$$

Лемма 69 *Пусть* $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$. *Тогда* $U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$.

Доказательство. Из $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ следует, что $\gamma' = \gamma \cdot \eta$, где η — путь в U. Тогда элементы множества $U_{[\gamma']}$ имеют вид $\gamma \cdot \eta \cdot \mu$, где μ — тоже путь в U, поэтому принадлежат $U_{[\gamma]}$. Аналогиче=но получаем обратное включение $U_{[\gamma]} \subset U_{[\gamma']}$. $\square$

Лемма 70 *Совокупность множеств* U_γ *может быть базой топологии.*

Доказательство. Нужно проверить, что пересечение двух множеств этой совокупности, содержащее некоторую точку, содержит окрестность этой точки из этой совокупности. Пусть $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ непусто, и пусть γ'' — такой путь, что $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. Тогда $U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]}$ и $V_{[\gamma'']} = V_{[\gamma]}$. Тогда $\gamma''(1) \in U \cap V$. Пусть $W \subset U \cap V$, тогда $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. $\square$

Зададим топологию на $\widetilde{X}$ с помощью этой базы.

Рассмотрим ограничение $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \to X$. Ясно, что его образ лежит в U. Он совпадает с U т.к. U линейно связно. Это ограничение инъективно, т.к. все петли в U гомотопны. Если $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x} = [\gamma]$, и $U \subset X$, то $\widetilde{x} \in U_{[\gamma]}$ и $p(U_{[\gamma]}) = U$, поэтому p непрерывно.

Пусть $[\gamma] \neq [\gamma']$, и пусть $U_{[\gamma]}$ и $U_{[\gamma']}$ пересекаются, т.е. существует такой путь γ'', что $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$. Тогда по лемме 69 $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']} = U_{[\gamma'']}$ — противоречие. Значит, при разных $[\gamma]$ множества $U_{[\gamma]}$ не пересекаются, поэтому $(\widetilde{X}, p, X)$ — накрытие (надо еще проверить линейную связность, что мы сейчас и сделаем).

Для точки $[\gamma] \in \widetilde{X}$ определим путь γ_s, $s \in [0,1]$, формулой

$$\gamma_s(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{при } \ 0 \leqslant t \leqslant s; \\ \gamma(s) & \text{при } \ s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Путь $s \mapsto [\gamma_s]$ — путь в $\widetilde{X}$, являющийся поднятием пути γ в X; он начинается в $[x_0]$ (класс постоянного пути, соответствующего точке x_0) и заканчивается в точке $[\gamma]$. Заметим, что γ здесь произвольное, откуда следует линейная связность $\widetilde{X}$.

Остается проверить, что $\widetilde{X}$ односвязно. Покажем, что $P = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, [x_0]))$ равно 0 в $\pi_1(X, x_0)$. Элементы P — петли в X, которые поднимаются до петель (а не путей) в $\widetilde{X}$. Пусть $[\gamma] \in P$. Подняте γ, как мы видели, начинается в $[x_0]$ и заканчивается в $[\gamma]$. Если это петля, то $[\gamma] = [x_0]$, т.е. γ гомотопна постоянной петле. Значит, P состоит из тривиального элемента.

$\square$

Лемма 71 *Пусть* $(\widetilde{X}, p, X)$ *и* (Y, q, X) *— накрытия,* $\widetilde{X}$ *односвязно. Тогда существует такое отображение* $r : \widetilde{X} \to Y$, *что* $(\widetilde{X}, r, Y)$ *— накрытие, и* $q \circ r = p$.

Доказательство. Это следует из теоремы о поднятии отображений. $\square$

Теорема 72 *Пусть* X *— "хорошее" пространство. Для каждой подгруппы* $H \subset \pi_1(X, x_0)$ *существует такое накрытие* (Y, p, X), *что* $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = H$.

Доказательство. Зададим на $\widetilde{X}$ отношение эквивалентности: $[\gamma] \sim [\gamma']$ если $\gamma(1) = \gamma'(1)$ и $[\bar{\gamma} \cdot \gamma'] \in H$. Пусть $Y = \widetilde{X}/\sim$. Отображение $q : Y \to X$ определим как $q([\gamma]) = \gamma(1)$. Y линейно связно, а так как при дополнительной факторизации мы целиком отождествляем некоторые компоненты связности из прообраза $p^{-1}(U)$, $q^{-1}(U)$ по-прежнему есть объединение множеств, гомеоморфных U, т.е. (Y, q, X) — накрытие.

Для петли γ в (X, x_0) ее поднятие в $\widetilde{X}$ начинается в $[x_0]$ и заканчивается в $[\gamma]$. Тогда образ этого поднятия в Y будет петлей тогда и только тогда, когда $[\gamma] \sim [x_0]$, т.е. $[\gamma] \in H$.

$\square$

Два накрытия над X, $((Y_i, y_i^0), p_i, (X, x_0))$, $i = 1, 2$, называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм f, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(Y_1, y_1^0) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (Y_2, y_2^0) \arrow[dl, "p_2"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

коммутативной.

Теорема 73 *Два накрытия* (Y_i, p_i, X), $i = 1, 2$, *изоморфны тогда и только тогда, когда* $(p_1)_*(\pi_1(Y_1)) = (p_2)_*(\pi_1(Y_2))$.

Доказательство. Если накрытия изоморфны, то образы их фундаментальных групп совпадают. Докажем, что верно обратное. Если $(p_1)_*(\pi_1(Y_1)) = (p_2)_*(\pi_1(Y_2))$, то по теореме о поднятии отображения p_1 можно поднять до отображения $\tilde{p}_1 : Y_1 \to Y_2$. Аналогично поднимаем p_2 до $\tilde{p}_2 : Y_2 \to Y_1$. При этом $p_2\tilde{p}_1 = p_1$, $p_1\tilde{p}_2 = p_2$. Из единственности поднятия следует, что $\tilde{p}_1\tilde{p}_2 = \mathrm{id}$, $\tilde{p}_2\tilde{p}_1 = \mathrm{id}$, что и доказывает изоморфность накрытий.

□

Фундаментальная группа графа

В теории графов графом называется некоторый набор вершин и ребер. Каждое ребро можно считать отрезком $[0, 1]$. Рассмотрим объединение таких отрезков (в количестве, равном числу ребер графа), топологию определим так: мнжество замкнуто, если его пересечение с любым отрезком замкнуто, и профакторизуем по отношению эквивалентности: конец одного ребра отождествляем с концом другого, если эти два ребра имеют общую вершину графа.

Дерево — это связный граф без циклов (= стягиваемый: если дерево локально конечно, то оно гомеоморфно метрическому пространству, в котором длина каждого ребра равна 1; фиксируем одну из вершин, тогда к каждой из нее ведет единственный путь, по нему и строим гомотопию). Подграф максимален, если содержит все вершины графа (но необязательно все ребра).

Лемма 74 *Связный граф содержит максимальное дерево. Любое дерево содержится в максимальном дереве.*

Доказательство. Имеется частичный порядок подграфов по включению. Найдем максимальное дерево в этом смысле. Если есть вершина, которая не входит в это максимальное дерево, то, благодаря связности, соединим ее ребром — получим дерево, большее, чем максимальное. □

Лемма 75 *Пусть* X *— связный граф,* $T \subset X$ *— максимальное дерево. Тогда* $\pi_1(X)$ *есть свободная группа с образующими — ребрами из* $X \setminus T$.

Доказательство. Пара (X, T) удовлетворяет условию продолжения гомотопии (легко видеть, что $T \times I \cup X \times \{0\}$ является ретрактом для $X \times I$ — ретракция строится также, как и для одного ребра и его границы - проектированием). Т.к. T стягиваемо, фактор-отображение $X \to X/T$ есть гомотопическая эквивалентность. Но X/T — букет окружностей. □

Лемма 76 *Любое накрывающее пространство над графом есть граф.*

Доказательство. Накрытие тоже состоит из ребер с некоторым отождествлением. □

Как следствие, получаем

Теорема 77 (Нильсен–Шрайер) *Любая подгруппа свободной группы свободна.*

Применение к парам квадратичных функций

Теорема 78 (из линейной алгебры) *Пусть f, g — квадратичные функции на $\mathbb{R}^n$, g положительно определена (т.е. $g(x) > 0$ для любого $x \neq 0$), тогда существует базис, в котором матрицы обеих функций диагональны.*

Доказательство. Считаем, что g задает скалярное произведение, и тогда в евклидовом пространстве приводим f к каноническому (диагональному) виду. При этом матрица функции g остается единичной. □

Имеет место более сильное утверждение.

Теорема 79 *Пусть для любого $x \neq 0$ значния функций $f(x)$ и $g(x)$ не равны нулю одновременно. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда существует базис, в котором матрицы обеих функций диагональны.*

Доказательство. На самом деле мы будем доказывать, что существуют числа α и β, при которых $\alpha f + \beta g$ положительно определена. Тогда можно применить предыдущую теорему к функциям f и $\alpha f + \beta g$, откуда будет следовать диагональность матриц для них, и, следовательно, для f и g.

Рассмотрим отображение $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}P^1$ из сферы в проективную прямую, заданное формулой $x \mapsto [f(x) : g(x)]$ (напомним, что $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ — однородные координаты в проективном пространстве). Поскольку точки x и $-x$ отображаются в одну и ту же точку проективной прямой, это отображение индуцирует отображение $\varphi : \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^1$. Проективная прямая гомеоморфна окружности, поэтому $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$. При $n \geqslant 3$, накрытие $(\mathbb{S}^{n-1}, p, \mathbb{R}P^{n-1})$, где p — отождествление диаметрально противоположных точек, является универсальным накрытием, поэтому $\pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (группа из двух элементов, для краткости будет писать $\mathbb{Z}_2$).

Легко видеть, что единственный гомоморфизм групп $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ — тривиальный. Рассмотрим универсальное накрытие $(\mathbb{R}^1, p, \mathbb{R}P^1)$ над окружностью (= проективной прямой) и отображение φ в проективную прямую. Поскольку индуцированный отображением φ гомоморфизм фундаментальных групп тривиален, отображение φ поднимается до отображения $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}^1$.

Поскольку $\mathbb{R}P^{n-1}$ связно и компактно, его образ $\tilde{\varphi}(\mathbb{R}P^{n-1})$ есть отрезок. Обозначим его $[a, b]$. Возможны два случая: отображение $p|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}P^1$ сюръективно или нет. Покажем, что первый случай (сюръективность) невозможен. Если $p|_{[a,b]}$ сюръективно, то существует точка $[\alpha : \beta] \in \mathbb{R}P^1$, в которую проектируются как минимум две точки $t_1, t_2 \in [a, b]$. Положим $A_i = \tilde{\varphi}^{-1}(t_i)$, $i = 1, 2$. Если $x \in A_i$, то $\varphi(x) = [f(x) : g(x)] = [\alpha : \beta]$, поэтому $\beta f(x) - \alpha g(x) = 0$, т.е. множества A_1 и A_2 — подмножества в множестве нулей квадратичной функции $h(x) = \beta f(x) - \alpha g(x) = 0$. Заметим, что множество нулей $\{x \in \mathbb{R}P^{n-1} : h(x) = 0\}$ любой квадратичной функции h линейно связно (в размерности $\geqslant 3$). Для этого удобно записать квадратичную функцию в каноническом виде, как сумму и разность квадратов $h(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2$; при $n \geqslant 3$ либо p, либо $n - p$ больше 1; пусть $p > 1$, тогда точку x, для которой $h(x) = 0$ можно во множестве нулей $\{x \in \mathbb{S}^{n-1} : h(x) = 0\}$ соединить путем с точкой $(x_1, \ldots, x_p, \pm 1, 0, \ldots, 0)$; переходя к проективному пространству, точки $(x_1, \ldots, x_p, 1, 0, \ldots, 0)$ и $(-x_1, \ldots, -x_p, -1, 0, \ldots, 0)$ совпадают, и остается заметить, что сфера $\{x \in \mathbb{R}^p : x_1^2 + \ldots + x_p^2 = 1\}$ связна при $p > 1$. Если $s \mapsto x(s)$ — путь, соединяющий точку из A_1 с точкой из A_2, то $\tilde{\varphi}(x(0)) = t_1$, $\tilde{\varphi}(x(1)) = t_2$; $\varphi(x(0)) = \varphi(x(1)) = [\alpha : \beta]$, поэтому найдется значение s_0, для которого $\tilde{\varphi}(x(s_0)) \neq [\alpha : \beta]$, а, значит, $h(x(s_0)) \neq 0$ — противоречие со связностью множества нулей функции h.

Итак, остается второй случай: отображение $p|_{[a,b]}$ не сюръективно, т.е. существует точка $[\alpha : \beta] \in \mathbb{R}P^1$, не лежащая в образе $p([a, b])$, а, значит, и в образе $\varphi(\mathbb{R}P^{n-1})$. Тогда квадратичная функция $h = \beta f - \alpha g$ не обращается в 0 ни при каком $x \neq 0$. Значит, h либо положительно определена, либо отрицательно (в последнем случае остается умножить ее на -1).

□