1.1. **Кривые на плоскости и в пространстве. Длина. Натуральный параметр.** Все функции, как обычные, так и векторнозначные, предполагаются настолько гладкими, насколько это требуется, если не оговорено противное.

Способы задания кривых на плоскости.

Известны следующие способы задания кривой на плоскости:

(i) как график функции, т.е. $y = f(x)$ или $x = f(y)$;

(ii) с помощью неявной функции: как множество решений уравнения $F(x, y) = 0$, где $\operatorname{grad} F \neq 0$;

(iii) параметрически, т.е. с помощью двух функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ от параметра t, где $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) \neq 0$.

Эти способы *локально эквивалентны*, т.е. если кривая задана одним из этих способов, то в некоторой окрестности произвольной точки кривой ее можно задать другим способом.

Действительно, если $y = f(x)$, то можно взять функцию $F(x, y) = f(x) - y$ и параметрические функции $x = t$, $y = f(t)$. Если кривая задана с помощью неявной функции, то по теореме о неявной функции, в окрестности точки, в которой $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, существует такая функция $y = f(x)$, что $F(x, f(x)) = 0$. Наконец, если кривая задана параметрически, то в некоторой окрестности точки, в которой $\frac{dx}{dt} \neq 0$, по теореме об обратной функции существует функция $t = g(x)$, обратная к $x = x(t)$. Тогда $y = y(g(x))$ задает ту же кривую.

Параметрический способ задания кривых наиболее универсален, поскольку он обобщается на случай бóльших размерностей.

Определение 1.1.1. (Гладкой) кривой называется гладкое отображение

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3.$$

Это определение не соответствует интуитивному понятию гладкости: из курса анализа известны бесконечно гладкие функции $x \to f(x)$, равные 0 при $x \leqslant 0$, и положительные при $x > 0$. Тогда кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [-1, 1]$, где $x(t) = f(t)$, $y(t) = f(-t)$, выглядит как угол.

Чтобы избежать таких "гладких"кривых, вводится понятие регулярности.

Определение 1.1.2. Гладкая кривая называется регулярной, если производная $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$ не обращается в 0 ни в одной точке отрезка $[a, b]$.

Если не будет оговорено противное, мы всегда будем рассматривать только регулярные кривые.

Переменную t называют параметром. Если представлять кривые как траектории движения, то параметр играет роль времени. Одну и ту же траекторию можно пробегать с разной скоростью. При этом формально мы будем иметь разные кривые как функции параметра. Чтобы можно было отождествлять совпадающие траектории, введем понятие эквивалентности кривых.

Пусть $\delta : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ — другая кривая, $f : [a, b] \to [c, d]$, $s = f(t)$, — гладкая биективная функция, производная $f' = \frac{df}{dt}$ которой нигде не обращается в 0. Если $\delta(f(t)) = \gamma(t)$, будем говорить, что кривые γ и δ *эквивалентны*. Рефлексивность и транзитивность очевидны, а симметричность следует из теоремы об обратной функции.

Формула $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\delta}{ds}\frac{ds}{dt}$ показывает, что регулярность сохраняется в классе эквивалентности.

Переход от одного параметра к другому в классе эквивалентных кривых называется *репараметризацией*. Несколько злоупотребляя строгостью терминологии, мы будем наывать кривыми классы эквивалентности кривых.

Пусть $\mathbf{r}$ обозначает радиус-вектор, $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Тогда кривая задается вектор-функцией $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Производную по параметру t мы будем обозначать не штрихом, а точкой. В каждой точке кривой вектор $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ является касательным вектором к кривой (известно из курса анализа).

Лемма 1.1.3. *Пусть* $\mathbf{f}$ *— вектор-функция. Тогда*

$$\Big|\int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt\Big| \leqslant \int_a^b |\mathbf{f}(t)|\, dt.$$

Доказательство. Положим $\mathbf{v} = \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt$. Если $\mathbf{v} = 0$, утверждение очевидно. Предположим, что $\mathbf{v} \neq 0$. Тогда неравенство

$$|\mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{v}, \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt \rangle = \int_a^b \langle \mathbf{v}, \mathbf{f}(t) \rangle dt \leqslant \int_a^b |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{f}(t)|\,dt = |\mathbf{v}| \cdot \int_a^b |\mathbf{f}(t)| dt$$

можно сократить на $|\mathbf{v}|$, из чего следует утверждение Леммы.

□

Рассмотрим разбиение $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$. Определим *длину* кривой

$$L = \sup \sum_i |\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)|$$

как супремум по всем разбиениям (т.е. супремум всех длин ломаных, построенных по разбиениям).

Теорема 1.1.4. *$L = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$.*

Доказательство. Покажем сначала, что этот супремум ограничен.

Поскольку $\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{r}}(t)\,dt$, применяя Лемму 1.1.3, получаем, что

$$\sum_i |\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)| = \sum_i \Big| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{r}}(t)\,dt \Big| \leqslant \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt,$$

откуда, переходя к супремуму,

$$L \leqslant \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt.$$

Обозначим через $s(t)$ длину кривой от точки a до точки t. Тогда длина кривой от точки t до точки $t+h$, равная $s(t+h) - s(t)$, может быть оценена сверху интегралом $\int_t^{t+h} |\dot{\mathbf{r}}(\tau)|\,d\tau$ (по только что доказанному), а снизу — длиной отрезка, соединяющего начало и конец, т.е. $|\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)|$. Деля на h, получаем

$$\frac{|\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)|}{h} \leqslant \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leqslant \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\dot{\mathbf{r}}(\tau)|\,d\tau.$$

Пределы справа и слева оба равны $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$, поэтому предел среднего выражения также равен $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$, т.е. получаем $\frac{ds(t)}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|$, откуда следует теорема.

□

Определение 1.1.5. Параметр кривой $\mathbf{r}(t)$ называется натуральным, если $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 1 \ \forall t$.

Следствие 1.1.6 (из теоремы)**.** *Натуральный параметр существует для любой кривой.*

Доказательство. Положим $s = s(t)$ — длина кривой от a до t. Тогда

$$\Big|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\Big| = \Big|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big| \cdot \Big|\frac{dt}{ds}\Big| = \Big|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big| \cdot \frac{1}{\left|\frac{ds}{dt}\right|} = |\dot{\mathbf{r}}| \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} = 1.$$

□

1.2. **Кривые на плоскости. Кривизна.** Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром (гладкая, регулярная — как и обговаривалось ранее; больше мы не будем об этом напоминать).

Лемма 1.2.1. *Если вектор-функция $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ удовлетворяет равенству $|\mathbf{v}(s)| = 1 \ \forall s$, то $\mathbf{v}' \perp \mathbf{v}$ в любой точке s.*

Доказательство. По правилу Лейбница,

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle = 2\langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle,$$

поэтому $\langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle = 0$ (производная константы).

□

Поэтому $\mathbf{r}'' \perp \mathbf{r}'$ (штрихом мы обозначаем производную по натуральному параметру s, в отличие от производной по t).

Имеется два способа дальнейшего рассуждения — ориентированный и неориентированный.

В каждой точке кривой выберем репер плоскости. В качестве первого вектора репера возьмем $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$. В ориентированном случае этот вектор единственным образом дополняется до положительно ориентированного репера вектором нормали $\mathbf{n}$. В неориентированном случае в качестве второго вектора $\mathbf{n}$ репера возьмем вектор единичной длины $\frac{1}{|\mathbf{r}''|}\mathbf{r}''$ (Для этого, правда, надо предположить, что $\mathbf{r}''$ не обращается в ноль! Это мы и будем требовать в дальнейшем от кривой.)

В обоих случаях определим *кривизну* k кривой формулой

$$\mathbf{v}' = k\mathbf{n}.$$

В неориентированном случае получаем, что $k = |\mathbf{v}'| = |\mathbf{r}''|$, в ориентированном случае это же равенство выполняется с точностью до знака, и кривизна может быть как положительной, так и отрицательной.

Отметим, что если $\mathbf{r}'' = 0$, то в неориентированном случае вектор $\mathbf{n}$ не определен. Тем не менее, и в в этом случае можно определить (неориентированную) кривизну как $k = |\mathbf{r}''|$.

Пример. Рассмотрим окружность $x = R\cos\frac{s}{R}$, $x = R\sin\frac{s}{R}$ (проверьте, что параметр s — натуральный). $\mathbf{v} = (-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R})$, $\mathbf{v}' = (-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R})$; $k = |\mathbf{v}'| = \frac{1}{R}$ — кривизна обратно пропорциональна радиусу окружности.

Выведем формулу для кривизны в случае произвольного параметра. Для этого заметим, что k равна (ориентированной) площади $S(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ параллелограмма, построенного на (перпендикулярных) векторах $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}' = \mathbf{r}''$. Вычислим площадь $S(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$ другого параллелограмма, построенного на векторах $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$. Для этого вычислим

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \mathbf{r}'\cdot|\dot{\mathbf{r}}|;$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'\cdot|\dot{\mathbf{r}}|) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}')\cdot|\dot{\mathbf{r}}| + \mathbf{r}'\cdot|\dot{\mathbf{r}}|^{\bullet} = \frac{d}{ds}(\mathbf{r}')\cdot\frac{ds}{dt}\cdot|\dot{\mathbf{r}}| + \mathbf{r}'\cdot|\dot{\mathbf{r}}|^{\bullet} = \mathbf{r}''\cdot|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \mathbf{r}'\cdot|\dot{\mathbf{r}}|^{\bullet}.$$

Последнее слагаемое пропорционально вектору $\mathbf{r}'$, поэтому при вычислении площади $S(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$ егоможно не учитывать: $S(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = S(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}''\cdot|\dot{\mathbf{r}}|^2)$. Тогда

$$S(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = S(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}''\cdot|\dot{\mathbf{r}}|^2) = S(\mathbf{r}'\cdot|\dot{\mathbf{r}}|, \mathbf{r}''\cdot|\dot{\mathbf{r}}|^2) = S(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')\cdot|\dot{\mathbf{r}}|^3,$$

т.е.

$$k = \frac{S(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$

В координатах получаем

$$k = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Если кривая задана как график функции, $y = f(x)$, то $\mathbf{r} = (t, f(t))$, и получаем формулу

$$k = \frac{f''}{(1 + (f')^2)^{3/2}}.$$

Рассмотрим кривую, проходящую через начало координат и касающуюся оси Ox. Если эта кривая задана графиком функции $y = f(x)$, то $f(0) = f'(0) = 0$. Тогда $f''(0) = k$. Окружности $y = g_R(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ касаются кривой в начале координат при любом R. Однако среди них имеется окружность, которая касается кривой "лучше"других. Разложение по формуле Тэйлора дает

$$f(x) - g_R(x) = \frac{1}{2}(f''(0) - g_R''(0))x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}(k - \frac{1}{R})x^2 + o(x^2).$$

Т.е. при $R = 1/k$ получаем совпадение уравнений с точностью до $o(x^2)$. Такая окружность называется *соприкасающейся.*

Формулы Френе на плоскости.

По определению, $\mathbf{v}' = k\mathbf{n}$. Вычислим $\mathbf{n}'$: Поскольку $|\mathbf{n}| = 1$, $\mathbf{n}' \perp \mathbf{n}$. Следовательно, $\mathbf{n}' = \lambda\mathbf{v}$, где λ — пока неизвестный коэффициент. Его можно вычислить из равенства

$$0 = \frac{d}{ds}\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{v}', \mathbf{n}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}'\rangle = k + \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}'\rangle = k + \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}\rangle = k + \lambda,$$

откуда имеем $\lambda = -k$. Объединяя две формулы, можно записать их в векторной форме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{n}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}.$$

Эти формулы называются формулами Френе.

Лемма 1.2.2. *Пусть $k(s) \equiv 0$. Тогда кривая является прямой.*

Доказательство. По предположению, $\mathbf{r}'' = 0$, значит, $\mathbf{r}'$ — постоянный вектор, $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{a}$. Интегрируя это равенство, получаем, что $\mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot t + \mathbf{b}$ для некоторых фиксированных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

□

Восстановление кривой по ее кривизне.

Заметим, что все векторы $\mathbf{v}(s)$ (при всех значениях s) имеют единичную длину, следовательно, если их начала совместить, их концы будут лежать на единичной окружности. Пусть $\alpha(s)$ — угол между векторами $\mathbf{v}(s)$ и $\mathbf{v}(0)$. Он определен неоднозначно (с точностью до 2π), но эти углы можно выбрать так, чтобы функция $\alpha(s)$ была непрерывной (и даже гладкой). Тогда

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{v}(0)\cos\alpha(s) + \mathbf{n}(0)\sin\alpha(s); \tag{1}$$

$$\mathbf{v}'(s) = -\mathbf{v}(0)\sin\alpha(s)\cdot\alpha'(s) + \mathbf{n}(0)\cos\alpha(s)\cdot\alpha'(s),$$

поэтому $k(s) = |\mathbf{v}'(s)| = \pm\alpha'(s)$. Выберем знак $+$. Тогда $\alpha' = k$, $\alpha(s) = \int_0^s k(\sigma)\,d\sigma$. Подставляя это в (1), получаем $\mathbf{v}(s)$ как функцию параметра s (причем этот параметр действительно натуральный, т.к. $|\mathbf{v}(s)| = 1$). Наконец, интегрируя эту функцию, получаем уравнение кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Таким образом, доказана

Теорема 1.2.3. *Пусть $k = k(s)$ — не обращающаяся в 0 функция. Тогда в некоторой окрестности существует кривая (с натуральной параметризацией), для которой эта функция является кривизной.*

На самом деле имеет место также теорема единственности: любые две кривые с одинаковой ненулевой кривизной получаются друг из друга движением плоскости. Общее доказательство мы дадим далее для случая пространственных кривых.

1.3. **Кривые в пространстве. Кривизна. Кручение. Репер Френе. Формулы Френе.**

Свяжем с пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (параметризованной натуральным параметром) так называемый репер Френе. В качестве первого вектора репера возьмем $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$. В предположении, что $\mathbf{r}'' \neq 0$, в качестве второго вектора репера возьмем $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}'|}$. Мы уже знаем, что $\mathbf{v}' \perp \mathbf{v}$. В качестве третьего вектора репера возьмем $\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}]$. Эти три вектора называют касательным вектором, вектором главной нормали и вектором бинормали.

Мы уже знаем, что $\mathbf{v}' = k\mathbf{n}$. Поскольку $\mathbf{n}' \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}$. Коэффициент при $\mathbf{v}$ равен $-k$ (мы уже его считали, дифференцируя $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}\rangle$), поэтому неопределенным остается лишь коэффициент при $\mathbf{b}$. Обозначим этот коэффициент через $\varkappa$. Тогда $\mathbf{n}' = -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}$. Теперь вычислим производную третьего вектора репера, $\mathbf{b}'$:

Запишем его с неопределенными коэффициентами: $\mathbf{b}' = x\mathbf{v} + y\mathbf{n}$ (кстати, почему тут отсутствует $z\mathbf{b}$?) и найдем эти коэффициенты.

$$0 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}\rangle' = \langle \mathbf{b}', \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}'\rangle = x + \langle \mathbf{b}, k\mathbf{n}\rangle = x;$$

$$0 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle' = \langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{n}'\rangle = y + \langle \mathbf{b}, -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}\rangle = y + \varkappa,$$

откуда $x = 0$, $y = -\varkappa$. Запишем это в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Эти формулы называются *формулами Френе.* Коэффициенты k и $\varkappa$ называются соответственно *кривизной* и *кручением* пространственной кривой.

Лемма 1.3.1. *Пусть $\varkappa \equiv 0$. Тогда кривая является плоской.*

Доказательство. По предположению, $\mathbf{b}' = 0$ (следует из формул Френе), поэтому $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ — постоянный вектор (не зависящий от s). Заменив систему координат, можно считать, что $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$. Тогда третья координата векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ тождественно равна 0. Интегрируя $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$, получаем, что третья координата радиус-вектора $\mathbf{r}$ постоянна, т.е. кривая целиком лежит в горизонтальной плоскости.

□

Теорема 1.3.2. *Пусть даны две функции, $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$, причем $k(s) \neq 0$. Тогда существует кривая, для которой эти функции являются кривизной и кручением.*

Если две кривые, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(s)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(s)$, имеют совпадающие кривизну и кручение, то существует движение пространства, переводящее первую кривую во вторую.

Доказательство. Рассотрим формулы Френе как систему дифференциальных уравнений. Для любых начальных данных существует решение $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$. Проитнегрировав $\mathbf{r}' = \mathbf{v}(s)$, получим уравнение кривой.

Остается убедиться, что кривизна и кручение этой кривой совпадают с заданными функциями. Для этого достаточно проверить, что векторы $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ в каждой точке образуют ортонормированный репер. Тогда, в частности, s окажется натуральным параметром, и эти три вектора окажутся репером Френе.

Для этого, пользуясь формулами Френе, вычислим производные от скалярных произведений:

$$\begin{gathered}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle' = 2\langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle = 2k\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle;\\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle' = \langle \mathbf{v}', \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}' \rangle = k\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle - k\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle;\\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle' = \langle \mathbf{v}', \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}' \rangle = k\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle - \varkappa\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle;\\
\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle' = 2\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = -2k\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle + 2\varkappa\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle;\\
\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle' = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}' \rangle = -k\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle + \varkappa\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - \varkappa\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle;\\
\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle' = 2\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle = -2\varkappa\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle.
\end{gathered}$$

Обозначим левые части этих равенств через $x_1, \ldots, x_6$. Тогда эти равенства моно рассматривать как систему дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{rcl}
x_1' & = & 2kx_2\\
x_2' & = & kx_4 - kx_1\\
x_3' & = & kx_5 - \varkappa x_2\\
x_4' & = & -2kx_2 + 2kx_5\\
x_5' & = & -kx_3 + \varkappa x_6 - \varkappa x_4\\
x_6' & = & -2\varkappa x_5
\end{array}$$

Очевидное решение $x_1(s) = x_4(s) = x_6(s) \equiv 1$, $x_2(s) = x_3(s) = x_5(s) \equiv 0$ является единственным при начальных условиях $x_1(0) = x_4(0) = x_6(0) = 1$, $x_2(0) = x_3(0) = x_5(0) = 0$. Поэтому репер $\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ ортонормирован в любой точке.

Оценивая степень произвола при получении решения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, видно, что решение определяется начальными данными системы уравнений Френе, т.е. $\mathbf{v}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)$ и начальными данными системы уравнений $\mathbf{r}' = v$, т.е. начальной точкой $\mathbf{r}(0)$. Поэтому движение протранства, совмещающее начальные точки и начальные реперы Френе двух кривых, совмещает и кривые в целом.

□

Запишем формулу Тэйлора для вектор-функции пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, проходящей через начало координат при $s = 0$.

$$\mathbf{r}(s) = s\mathbf{r}'(0) + \frac{s^2}{2}\mathbf{r}''(0) + \frac{s^3}{6}\mathbf{r}'''(0) + o(s^3).$$

Здесь $\mathbf{r}'(0)$ можно заменить на $\mathbf{v}(0)$. Вычислим оставшиеся коэффициенты. По определению кривизны, $\mathbf{r}''(0) = k(0)\mathbf{n}(0)$.

$$\mathbf{r}'''(0) = k'(0)\mathbf{n}(0) + k(0)\mathbf{n}'(0) = k'(0)\mathbf{n}(0) + k(0)(-k(0)\mathbf{v}(0) + \varkappa(0)\mathbf{b}).$$

Подставляя эти выражения в формулу Тэйлора, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(s) &= s\mathbf{v}(0) + \frac{s^2}{2}k(0)\mathbf{n}(0) + \frac{s^3}{6}(k'(0)\mathbf{n}(0) - k^2(0)\mathbf{v}(0) + k(0)\varkappa(0)\mathbf{b}(0)) + o(s^3) = \\ &= \Big(s - \frac{k^2(0)}{6}s^3\Big)\mathbf{v}(0) + \Big(\frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3\Big)\mathbf{n}(0) + \Big(\frac{k(0)\varkappa(0)}{6}s^3\Big)\mathbf{b}(0) + o(s^3).\end{aligned}$$

Назовем плоскость, проходящую через векторы $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, *соприкасающейся плоскостью* для кривой в точке s. Полученный вариант формулы Тэйлора показывает, что порядок касания кривой с соприкасающейся плоскостью равен 2, т.е. с точностью до s^2, кривая "лежит"в соприкасающейся пооскости.

Геометрическое значение кручения видно из третьей формулы Френе: оно характеризует скорость вращения соприкасающейся плоскости (или, что то же самое, ее нормального вектора $\mathbf{b}$) вокруг вектора $\mathbf{v}$.

Формулы для кривизны и кручения пространственных кривых при произвольном параметре.

К уже выведенным формулам для первых двух производных добавим формулу для третьей:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \cdot |\dot{\mathbf{r}}|; \qquad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'' \cdot |\dot{\mathbf{r}}|^2 + \mathbf{r}' \cdot |\dot{\mathbf{r}}|^{\bullet};$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'') \cdot |\dot{\mathbf{r}}|^2 + \mathbf{r}'' \cdot (|\dot{\mathbf{r}}|^2)^{\bullet} + \frac{d}{dt}(\mathbf{r}') \cdot |\dot{\mathbf{r}}|^{\bullet} + \mathbf{r}' \cdot |\dot{\mathbf{r}}|^{\bullet\bullet} == \mathbf{r}''' \cdot |\dot{\mathbf{r}}|^3 + \alpha\mathbf{r}'' + \beta\mathbf{r}',$$

где коэффициенты α и β нас не интересуют.

Выпишем формулы для площади параллелограмма, построенного на первых двух производных, и объема параллелепипеда, построенного на первых трех производных:

$$S(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = S(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \cdot |\dot{\mathbf{r}}|^3;$$

$$V(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = V(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') \cdot |\dot{\mathbf{r}}|^6.$$

Аналогично случаю плоских кривых, $|S(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')| = k$, откуда

$$k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$

Также легко видеть, что $V(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = \langle[\mathbf{r}', \mathbf{r}''], \mathbf{r}'''\rangle = k^2\varkappa\langle\mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = k\varkappa$, откуда

$$k^2\varkappa = \frac{<\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}>}{|\dot{\mathbf{r}}|^6};$$

$$\varkappa = \frac{<\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}>}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2},$$

где $<\cdot, \cdot, \cdot>$ — смешанное произведение векторов.

2. Поверхности. 1 и 2 квадратичная форма

2.1. **Поверхности.** Как для кривых, для поверхностей в пространстве мы знаем 3 способа их зажания:

(i) как график функции двух переменных, $z = f(x, y)$;

(ii) с помощью неявной функции, $F(x, y, z) = 0$ (предполагается, что $\operatorname{grad} F \neq 0$);

(iii) параметрически (при этом требуется два параметра u, v), $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, т.е. в виде трех функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ (предполагается, что векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ линейно независимы).

Теорема 2.1.1. *Эти три способа локально эквивалентны.*

(Объяснение термина "локально" — такое же, как для кривых.)

Доказательство. Если $z = f(x, y)$, то можно взять $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ и $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$. Ясно, что $\operatorname{grad} F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, -1) \neq 0$ и

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = 2,$$

значит, векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ линейно независимы.

Пусть дана функция $F(x, y, z) = 0$ с условием $\operatorname{grad} F \neq 0$. Для определенности будем считать, что $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ в некоторой окрестности. Тогда, применив теорему о неявной функции, получим (в возможно, меньшей окрестности) такую функцию $z = f(x, y)$, что $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$.

Пусть теперь заданы функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, и векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ линейно независимы. Для определенности будем считать, что матрица $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ невырождена (в некоторой окрестности).

По теореме об обратном отображении, существуют такие функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, что $x \equiv x(u(x, y), v(x, y))$, $y \equiv y(u(x, y), v(x, y))$. Тогда $z = z(u(x, y), v(x, y))$ — дает нам функцию, график которой и есть наша поверхность.

$\square$

Как и в случае кривых, последний способ — наиболее общий. Мы будем называть *поверхностью* вектор-функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, заданную на области $D \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости с координатами u, v.

Поверхность будем называть *регулярной*, если векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ линейно независимы. (Опять аналогия с кривыми.)

Далее мы будем работать только с регулярными поверхностями, так что слово "регулярная"будем обычно пропускать (но подразумевать).

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область на плоскости с координатами s, t, и пусть функции $s = s(u, v)$, $t = t(u, v)$ задают взаимно-однозначное отображение D на G. Предположим, что матрица Якоби $\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix}$ невырождена. В этом случае поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(u, v), t(u, v))$ естественно считать *эквивалентными.* По теореме об обратном отображении это действительно отношение эквивалентности (симметричность; транзитивность и рефлексивность очевидны). По аналогии с кривыми, мы не будем различать поверхности из одного класса эквивалентности, а различные представители одного класса эквивалентности будем называть различными параметризациями одной и той же поверхности.

Пример. Сферу (радиуса 1) можно задать параметрически так:

$$\mathbf{r} = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos v), \quad u \in (0, \pi), v \in [0, 2\pi).$$

Ее же можно задать с помощью *стереографической проекции*:

$$\mathbf{r} = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Пример. Пусть $\mathbf{r} - (0, f(t), g(t))$ — кривая в плоскости Oyz, $f(t) > 0$. Тогда $\mathbf{r} = (f(t) \cos s, f(t) \sin s, g(t))$ — поверхность, полученная вращением кривой вокруг оси Oz.

В дальнейшем нам будет удобно использовать краткие обозначения для частных производных: вместо $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ мы будем писать $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, вместо $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}$ — $\mathbf{r}_{uu}$, $\mathbf{r}_{vv}$ и $\mathbf{r}_{uv}$ соответственно.

При фиксированных значениях u_0 и v_0 вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ задают кривые, лежащие на поверхности. Эти кривые называются *координатными кривыми.* Из определения частных производных следует, что векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ являются касательными векторами к кривым $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ соответственно. Сами переменные u, v называются *координатами* на поверхности. Отображение $\mathbf{r}$ является (локально) взаимно однозначным.

Заметим, что условие регулярности поверхности — линейная независимость векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ — может быть записана как $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \neq 0$.

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(u, v), t(u, v))$ — две параметризации одной поверхности, Тогда

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_s \frac{\partial s}{\partial u} + \mathbf{r}_t \frac{\partial t}{\partial u}; \qquad \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_s \frac{\partial s}{\partial v} + \mathbf{r}_t \frac{\partial t}{\partial v}.$$

Поскольку матрица Якоби невырождена, условие регулярности сохраняется при переходе от одной параметризации к другой, и линейная оболочка векторов $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ совпадает с линейной оболочкой векторов $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_t$. Эта плоскость называется *касательной плоскостью к поверхности.*

Лемма 2.1.2 (только что доказанная)**.** *Определение касательной плоскости не зависит от параметризации.*

Пусть $\gamma : [a, b] \to D \subset \mathbb{R}^2$ — кривая на плоскости с координатами u, v, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — поверхность. Тогда $\mathbf{r} \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ — кривая, лежащая на данной поверхности. Поскольку

$$\frac{d(\mathbf{r} \circ \gamma)}{dt} = \mathbf{r}_u \cdot \dot{u} + \mathbf{r}_v \cdot \dot{v}, \tag{2}$$

из регулярности кривой γ и поверхности вытекает регулярность кривой $\mathbf{r} \circ \gamma$.

Лемма 2.1.3. *Касательная плоскость состоит из всех касательных векторов к кривым, лежащим на поверхности (и из нулевого вектора).*

Доказательство. Из (2) следует, что все касательные векторы к кривым на поверхности лежат в касательной плоскости. Обратно, если $\mathbf{a} = \mathbf{r}_u \cdot a^1 + \mathbf{r}_v \cdot a^2$, то в качестве кривой можно взять $\gamma(t) = (a^1 t, a^2 t)$.

□

2.2. **1-я квадратичная форма.** В касательной плоскости к поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ рассмотрим матрицу Грама

$$G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle & \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle \\ \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u \rangle & \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle \end{pmatrix}.$$

Упражнение. При переходе к другой параметризации $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ матрица Грама изменяется по формуле $\tilde{G} = C^t G C$, где C — матрица Якоби перехода от координат u, v к координатам $\tilde{u}$, $\tilde{v}$. При выполнении этого упражнения удобно пользоваться обозначениями $u^1 = u$, $u^2 = v$, $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_2$. Тогда $G = (g_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$, $\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_1 \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}_i} + \mathbf{r}_2 \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}_i}$, $C = (c^i_j)$, $c^i_j = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}$.

Следствие 2.2.1 (из упражнения)**.** *Матрица G задает в касательной плоскости билинейную функцию.*

Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — векторы касательной плоскости, то они раскладываются по ее базису:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{r}_1 + a^2 \mathbf{r}_2; \qquad \mathbf{b} = b^1 \mathbf{r}_1 + b^2 \mathbf{r}_2.$$

Тогда $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{ij} a^i b^j$ (мы пользуемся тензорными обозначениями, где подразумевается сумма по дважды повторяющимся индексам, если один раз они встречаются как нижние индексы, а другой раз — как верхние).

Определение 2.2.2. Ассоциированная с билинейной функцией g квадратичная форма $g(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ называется *1-й квадратичной формой* поверхности.

Лемма 2.2.3. $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Доказательство. Обе функции — g и скалярное произведение — билинейны, поэтому равенство достаточно проверить на базисных векторах, для которых оно очевидно.

□

Таким образом, длины векторов касательной плоскости и углы между ними можно вычислять с помощью 1-й квадратичной формы.

Следствие 2.2.4. *Длина кривой* $\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{R}^2$ *вычисляется по формуле* $L = \int_a^b \sqrt{g(\dot\gamma,\dot\gamma)}\,dt$.

Если нам надо уточнить, в какой точке происходят вычисления с 1-й квадратичной формой, мы будем указывать точку в качестве индекса, например, G_P будет обозначать 1-ю квадратичную форму в точке P.

Две поверхности, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ и $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}(u,v)$, заданные на одной и той же области D, называются *локально изометричными*, если $G_P = \tilde G_{\tilde P}$, где $P = \mathbf{r}(u,v)$, $\tilde P = \tilde{\mathbf{r}}(u,v)$ — точки обеих поверхностей, отвечающие одним и тем же координатам u,v. В этом случае существует отображение $\tilde{\mathbf{r}}\circ\mathbf{r}^{-1}$ первой поверхности во вторую, которое локально биективно и сохраняет 1-ю квадратичную форму, т.е. расстояния.

Например, плоскость, цилиндр и конус локально изометричны.

Локальную изометричность можно определять также для двух разных поверхностей с разными параметризациями. Пусть первая поверхность задана как $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1,u^2)$, а вторая — $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}(\tilde u^1,\tilde u^2)$ на областях D и $\tilde D$ соответственно. Пусть (как в определении репараметризации) имеется гладкое отображение $f : D \to \tilde D$ с невырожденным якобианом (оно (локально) взаимно однозначно по теореме о неявном отображении, и обратное отображение также гладко). Поверхности локально изометричны, если матрицы 1-х квадратичных форм G и $\tilde G$ этих поверхностей связаны соотношением $\tilde G(\tilde u^1(u^1,u^2),\tilde u^2(u^1,u^2)) = C^t(u^1,u^2)G(u^1,u^2)C(u^1,u^2)$, где $C = (\frac{\partial u^i}{\partial\tilde u^j})$, а значения u^i подставляются в соответствии с взаимно однозначным отображением f. *На лекции я забыл написать матрицы перехода* C.

2.2.1. *Вектор нормали. Площадь поверхности.* Рассмотрим вектор $[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]$. По определению векторного произведения, он перпендикулярен касательной плоскости (и ненулевой — из регулярности поверхности). Определим вектор $\mathbf{m}$ *нормали* к поверхности равенством $\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|}$. Вектор $\mathbf{m}$ имеет единичную длину. При заменах координат этот вектор не меняется или меняется на противоположный по знаку — в зависимости от знака якобиана (определителя матрицы Якоби).

Из курса линейной алгебры известно, что квадрат площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a},\mathbf{b}$, равен $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|^2 = \det G(\mathbf{a},\mathbf{b})$, где

$$G(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle & \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle \\ \langle\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle & \langle\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \end{pmatrix}\cdot G\cdot\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

В частности, квадрат площади параллелограмма, построенного на базисных векторах $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, равен $\det G$.

Как известно из курса анализа, площадь S поверхности приближается интегральными суммами площадей параллелограммов, построенных на векторах вида $\mathbf{r}(u_{i+1},v_j) - \mathbf{r}(u_i,v_j)$ и $\mathbf{r}(u_i,v_{j+1}) - \mathbf{r}(u_i,v_j)$, которые, в свою очередь, приближаются площадями параллелограммов, построенных на векторах $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Поэтому

$$S = \iint_D |[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|\,du\,dv = \iint_D \sqrt{\det G}\,du\,dv.$$

По традиции часто для коэффициентов матрицы G первой квадратичной формы используются обозначения $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ (при этом то, что одной и той же буквой G обозначается вся матрица и один из ее элементов, не приводит к серьезной неоднозначности — из контекста обычно понятно, в каком смысле употребляется G). Также часто 1-ю квадратичную форму записывают в виде $G(du,dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$.

Пример. 1-я квадратичная форма для плоскости в прямоугольных и полярных координатах.

В прямоугольных координатах x, y — $\mathbf{r}_x = (1,0)$, $\mathbf{r}_y = (0,1)$, матрица Грама — единичная, 1-я квадратичная форма имеет вид $dx^2 + dy^2$.

В полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ — $\mathbf{r}_r = (\cos\varphi,\sin\varphi)$, $\mathbf{r}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)$, матрица Грама имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$, 1-я квадратичная форма имеет вид $dr^2 + r^2d\varphi^2$.

Видно, что 1-я квадратичная форма имеет различный вид в разных системах координат. Хорошо бы иметь наиболее удобный вид 1-й квадратичной формы — по аналогии с кривыми, где всегда имеется натуральная параметризация. Однако мы далее увидим, что для многих поверхностей не существует системы координат, в которой 1-я квадратичная форма имеет вид суммы квадратов (имеет единичную матрицу). Тем не менее, в одной точке можно даже линейной заменой координат добиться того, чтобы в этой точке матрица 1-й квадратичной формы была единичной. Для этого надо, чтобы в этой точке векторы $\mathbf{r}_u$ и ρ_v были ортогональны и имели единичную длину.

Пример. 1-я квадратичная форма для поверхности заданной как график функции.

Если $x = u$, $y = v$, $z = f(x, y)$, то $\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x)$, $\mathbf{r}_y = (0, 1, f_y)$, $G = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$.

2.2.2. *Метрика.* Опишем свойства 1-й квадратичной формы. Это отображение, заданное на области D плоскости, принимающее значения в симметричных положительно определенных невырожденных 2×2-матрицах. Эти свойства можно положить в основу абстрактного определения.

Определение 2.2.5. *Метрикой* в области D назовем отображение из D в линейное пространство 2×2-матриц (для отображений в линейные пространства имеет смысл говорить о гладкости), которое в каждой точке является симетричной положительно определенной невырожденной матрицей. При замене координат в D это отображение меняется на другое по формуле для матриц билинейных функций.

Любая поверхность задает на D метрику. Обратный вопрос, любую ли метрику можно реализовать как 1-ю квадратичную форму некоторой поверхности, намного сложнее, и мы им заниматься не будем.

2.3. **2-я квадратичная форма.** Определим еще одну билинейную функцию на касательной плоскости к поверхности матрицей $Q = (q_{ij})$, где $q_{ij} = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{m}\rangle$, а $\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j}$.

Лемма 2.3.1. *Матрица Q при заменах координат меняется так же как матрица билинейной функции.*

Доказательство.

$$\tilde{q}_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}^j}\right), \mathbf{m}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}\left(\mathbf{r}_l \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}\right), \mathbf{m}\right\rangle = \left\langle \mathbf{r}_{kl}\frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}\frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} + \mathbf{r}_l \cdot \alpha^l, \mathbf{m}\right\rangle = q_{kl}\frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}\frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}.$$

Нам здесь не вано, чему равны коэффициенты α^l, т.к. $\langle r_l, \mathbf{m}\rangle = 0$. В формулах подразумевается суммирование по тензорному правилу.

□

Определение 2.3.2. Квадратичная форма, ассоциированная с билинейной функцией, заданной матрицей Q, называется *2-й квадратичной формой* поверхности.

Чтобы понять геометрический смысл 2-й квадратичной формы, рассмотрим кривые, лежащие на поверхности, и, в частности, сечения поверхности плоскостями, проходящими через вектор $\mathbf{m}$. Такие сечения называются нормальными плоскими сечениями.

Лемма 2.3.3. *Плоское нормальное сечение является кривой.*

Доказательство. Пусть $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ — точка, через которую проходит сечение, вектор $\mathbf{v}$ — касательный вектор в точке P, через который проходит секущая плоскость. Тогда уравнение секущей плоскости $\mathbf{r} = P + s\mathbf{m} + t\mathbf{v}$, а сечение определяется уравнением $F(u, v, s, t) = \mathbf{r}(u, v) - s\mathbf{m} - t\mathbf{v} - P = 0$.

Заметим, что три вектора $F_u = \mathbf{r}_u$, $F_v = \mathbf{r}_v$, $F_s = -\mathbf{m}$ линейно независимы, поэтому соответствующая матрица Якоби невырождена, и по теореме о неявном отображении существуют функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $s = s(t)$, обращающие уравнение сечения в тождество. Поэтому сечение является кривой, заданной уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$. Остается проверить регулярность. Предположим противное, т.е. $\dot{u} = \dot{v} = 0$ и продифференцируем тождество $F(u(t), v(t), s(t), t) = 0$ по t:

$$0 = \dot{F} = F_u \dot{u} + F_v \dot{v} + F_s \dot{s} - \mathbf{v} = -\mathbf{m}\dot{s} - \mathbf{v}.$$

Это равенство невозможно, т.к. векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{m}$ линейно независимы. Полученное противоречие доказывает регулярность сечения.

$\square$

Рассмотрим произвольную кривую на поверхности, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\gamma(s))$, где s — натуральный параметр. Тогда

$$\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v')' = \mathbf{r}_{uu}(u')^2 + 2\mathbf{r}_{uv}u'v' + \mathbf{r}_{vv}(v')^2 + \mathbf{r}_u u'' + \mathbf{r}_v v''.$$

В скалярном произведении с $\mathbf{m}$ можно не учитывать последние два слагаемых т.к. они ортогональны к $\mathbf{m}$:

$$\langle \mathbf{r}'', \mathbf{m}\rangle = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m}\rangle (u')^2 + 2\langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{m}\rangle u'v' + \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{m}\rangle (v')^2,$$

или, в других обозначениях,

$$\langle \mathbf{r}'', \mathbf{m}\rangle = q_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = q(\gamma', \gamma'),$$

где γ' — единичный касательный вектор к кривой. Если $\mathbf{v}$ — произвольный касательный вектор к кривой, то $\gamma' = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. Переходя от γ' к $\mathbf{v}$, получаем, что

$$q(\gamma', \gamma') = q\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} q(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{q(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{g(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

С другой стороны, $\mathbf{r}'' = k\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — вектор главной нормали к кривой, а k — ее кривизна. Поэтому $\langle \mathbf{r}'', \mathbf{m}\rangle = k\langle \mathbf{n}, \mathbf{m}\rangle = k\cos\theta$, где θ — угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 2.3.4 (формула Менье)**.** *Пусть кривая лежит на поверхности. Пусть* $\mathbf{v}$ *— ее касательный вектор,* $\mathbf{n}$ *— вектор ее главной нормали,* k *— ее кривизна. Тогда* $k\cos\theta = \frac{q(\mathbf{v},\mathbf{v})}{g(\mathbf{v},\mathbf{v})}$*, где* θ *— угол между векторами* $\mathbf{n}$ *и* $\mathbf{m}$*.*

В частности, кривизна всех кривых поверхности с одной и той же соприкасающейся плоскостью (порожденной векторами $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{n}$*) одна и та же.*

Если кривая является нормальным сечением, то векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ коллинеарны, поэтому с точностью до знака получаем $k = \frac{q(\mathbf{v},\mathbf{v})}{g(\mathbf{v},\mathbf{v})}$. Кривизна нормальных сечений называется *нормальной кривизной* и обозначается k_n. Во всех секущих нормальных плоскостях можно выбрать согласованные ориентации так, чтобы равенство $k_n = \frac{q(\mathbf{v},\mathbf{v})}{g(\mathbf{v},\mathbf{v})}$ выполнялось в точности (а не только по абсолютной величине). Тогда можно говорить об ориентированном определении кривизны, и k_n может иметь произвольный знак.

По теореме о приведении пары квадратичных форм, в касательной плоскости к поверхности существует базис e_1, e_2, в котором 1-я квадратичная форма имеет единичную матрицу, а 2-я — диагональную. Поскольку 1-я квадратичная форма задается матрицей Грама, этот базис является ортонормированным. В этом базисе матрица Q 2-й квадратичной формы имеет диагональный вид с собственными значениями λ_1, λ_2. Для определенности предположим, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$.

Определение 2.3.5. Числа λ_1 и λ_2 называются *главными кривизнами* поверхности. Направления векторов e_1, e_2 называются *главными направлениями.* Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то главные направления определены однозначно.

Пусть $\mathbf{v}$ — единичный касательный вектор к поверхности. Тогда $\mathbf{v} = e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi$ для некоторого угла φ. Рассмотрим нормальное сечение плоскостью, проходящей через векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{v}$. По формуле

$$k_n = \frac{q(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{g(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = q(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda_1\cos^2\varphi + \lambda_2\sin^2\varphi.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.3.6 (формула Эйлера)**.** *Кривизна нормального плоского сечения с касательным вектором* $\mathbf{v}$ *вычисляется по формуле* $k_n = \lambda_1\cos^2\varphi + \lambda_2\sin^2\varphi$*.*

Следствие 2.3.7. *Кривизна* k_n *произвольного нормального плоского сечения удовлетворяет соотношению* $\lambda_2 \leqslant k_n \leqslant \lambda_1$*.*

Пусть поверхность задана как график функции, причем система координат выбрана так, чтобы плоскость Oxy касалась поверхности в начале координат. Тогда (только) в начале координат $f_x = f_y = 0$, и G — единичная матрица (но в сколь угодно близких точках это уже не так). В этой же точке $\mathbf{m} = (0,0,1)$, $Q = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$.

Улучшим выбор системы координат, повернув плоскость Oxy так, чтобы ее координатные оси совпали с гоавными направлениями поверхности. Тогда матрица Q должна быть диагональна, и $f_{xx}(0,0) = \lambda_1$, $f_{yy}(0,0) = \lambda_2$.

Запишем формулу Тэйлора для функции f:

$$f(x,y) = \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 \frac{y^2}{2} + o(x^2+y^2)$$

(при нашем выборе системы координат $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$).

С помощью формулы Тэйлора точки поверхности можно классифицировать в зависимости от знаков главных кривизн.

1. Если $\lambda_1\lambda_2 > 0$, то в такой точке матрица Q положительно (или отрицательно) определена, и поверхность (по крайней мере, в некоторой окрестности нашей точки) лежит целиком по одну сторону от своей касательной плоскости. Такие точки называются *эллиптическими.* С точностью до второго порядка, в этой точке поверхность совпадает с эллиптическим параболоидом.

2. Если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то в такой точке матрица Q имеет сигнатуру $(1,1)$ (т.е. один плюс и один минус), и поверхность в любой достаточно малой окрестности нашей точки находится пообе стороны от своей касательной плоскости. Такие точки называются *гиперболическими.* С точностью до второго порядка, в этой точке поверхность совпадает с гиперболическим параболоидом (седлом).

3. Если ровно одна из главных кривизн равна нулю, то в этой точке с точностью до второго порядка поверхность совпадает с параболическим цилиндром. Такие точки называются *параболическими.*

4. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то с точностью до второго порядка поверхность совпадает со своей касательной плоскостью. Такие точки называются *точками уплощения.*

Определение 2.3.8. Величина $K = \lambda_1\lambda_2$ называется *полной, или гауссовой, кривизной*, $H = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ — *средней кривизной* поверхности.

2.4. **Гауссово отображение и геометрический смысл гауссовой кривизны.** Каждой точке P поверхности Π поставим в соответствие конец вектора нормали $\mathbf{m}$, предварительно перенеся его начало в начало координат. Через S обозначим единичную сферу с центом в начале координат. Такое сопоставление задает отображение $P \mapsto \mathbf{m}(P)$, $\Pi \to S$. Это отображение называется *гауссовым.*

Пусть $\Delta\Pi$ — область на поверхности, ΔS — ее образ при гауссовом отображении.

Теорема 2.4.1. *Гауссова кривизна воперхности в точке P удовлетворяет равенству*

$$|K(P)| = \lim_{\Delta\Pi\to P} \frac{|\Delta S|}{|\Delta\Pi|}$$

, где $|\cdot|$ обозначает площадь.

Доказательство. Как мы знаем, $|\Delta\Pi| = \iint_{\Delta\Pi} |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|\, du^1 du^2$. Аналогично, для поверхности, заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{m}(P)$, площадь вычисляется по формуле $|\Delta S| = \iint_{\Delta S} |[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]|\, du^1 du^2$.

В пределе $\Delta\Pi \to P$ отношение площадей равно отошению подинтегральных выражений, т.е. $\frac{|[\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2]|}{|[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2]|}$.

Поскольку вектор $\mathbf{m}$ имеет постоянную длину, его частные производные ортогональны ему, следовательно, лежат в касательной плоскости, и, значит, раскладываются по базису: $\mathbf{m}_i = b_i^j \mathbf{r}_j$, где используются тензорные обозначения, а b_i^j — соответствующие координаты. Тогда

$$|[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]| = |b_1^i b_2^k [\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k]| = |b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1| \cdot |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| = |\det(b_i^j)| \cdot |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|.$$

Таким образом, нам достаточно доказать, что $K = \det(b_i^j)$.

Дифференцируя равенство $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{m} \rangle = 0$, получим

$$0 = \langle \mathbf{r}_{i,j}, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{m}_j \rangle = q_{ij} + \langle \mathbf{r}_i, b_j^k \mathbf{r}_k \rangle = q_{ij} + b_j^k \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k \rangle = q_{ij} + b_j^k g_{ik},$$

т.е. $q_{ij} = -b_j^k g_{ik}$. В матричных терминах, матрица $-Q$ есть произведение матриц (b_j^k) и G, поэтому $\det Q = \det(b_j^k)\det G$, т.е. $\det(b_j^k) = \frac{\det Q}{\det G}$.

С другой стороны, как известно из линейной алгебры, $K = \lambda_1\lambda_2$ есть произведение корней обобщенного характеристического многочлена $\det(Q - \lambda G)$. По теореме Виета, K равно отношению свободного члена к коэффициенту при λ^2, т.е. $\det Q$ к $\det G$, откуда следует утверждение теоремы.

□

2.5. **Деривационные формулы.** Смысл деривационных формул, так же как формул Френе, — разложить производные базисных векторов по базису. Начнем с легкой части: мы уже знаем, что $\mathbf{m}_j = b_j^k \mathbf{r}_k$, где коэффициенты b_j^k удовлетворяют равенствам $b_j^k g_{ik} = -q_{ij}$. Для того, чтобы выразить отсюда b_j^k, введем обозначение g^{il} для элементов матрицы G^{-1}, обратной к G. Тогда $b_j^k g_{ik} g^{il} = -q_{ij} g^{il}$. Но $g_{ik} g^{il} = \delta_k^l$, поэтому $b_j^l = -q_{ij} g^{il}$.

Запишем разложение по базису для производных векторов $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + \beta_{ij}\mathbf{m} \tag{3}$$

с неопределенными коэффициентами Γ_{ij}^k и β_{ij}. Последний коэффициент находится из скалярного произведения $q_{ij} = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{m}\rangle = \langle \beta_{ij}\mathbf{m}, \mathbf{m}\rangle = \beta_{ij}$.

Рассмотрим (уже не постоянные) скалярные произведения $\langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_k\rangle = \Gamma_{ij,k}$. Умножая (3) скалярно на $\mathbf{r}_l$, получим

$$\Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ij}^k \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_l\rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl}. \tag{4}$$

Дифференцируя равенство $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_l\rangle = g_{il}$ по u^j, получаем

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l\rangle + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{lj}\rangle. \tag{5}$$

Делая циклическую перестановку индексов i, l, j, получаем

$$\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} = \langle \mathbf{r}_{li}, \mathbf{r}_j\rangle + \langle \mathbf{r}_l, \mathbf{r}_{ji}\rangle, \tag{6}$$

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} = \langle \mathbf{r}_{jl}, \mathbf{r}_i\rangle + \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{il}\rangle. \tag{7}$$

Складывая (5) и (6) и вычитая (7), получаем

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} = 2\langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l\rangle,$$

т.е.

$$\Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\Big).$$

Умножив обе части равенства (4) на g^{ls} и суммируя по l, получаем

$$\Gamma_{ij,l} g^{ls} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} g^{ls} = \Gamma_{ij}^s,$$

откуда получается окончательная формула для коэффициентов Γ_{ij}^s

$$\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ls}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\Big),$$

выражающая их через коэффициенты 1-й квадратичной формы и их первые производные.

Определение 2.5.1. Коэффициенты Γ_{ij}^k называются *символами Кристоффеля.* Формулы, выражающие первые производные базисных векторов как линейные комбинации самих базисных векторов с коэффициентами, зависящими от коэффициентов 1-й и 2-й квадратичных форм и их первых производных, называются *деривационными формулами* Гаусса–Вейнгартена.

Связь между коэффициентами 1-й и 2-й квадратичных форм.

Поскольку для гладких функций смешанные производные равны, коэффициенты 1-й и 2-й квадратичных форм не могут быть произвольными функциями параметров u и v. Кроме того, имеются связи, заданные деривационными формулами. Например, дифференцируя третий раз вторые производные радиус-вектора, получаем

$$\mathbf{r}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k}(\Gamma^s_{ij}\mathbf{r}_s + q_{ij}\mathbf{m});$$

$$\mathbf{r}_{kij} = \frac{\partial \mathbf{r}_{ki}}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma^s_{ki}\mathbf{r}_s + q_{ki}\mathbf{m});$$

Из равенства левых частей следует равенство правых:

$$\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^k}\mathbf{r}_s + \Gamma^s_{ij}\mathbf{r}_{sk} + \frac{\partial q_{ij}}{\partial u^k}\mathbf{m} + q_{ij}\mathbf{m}_k = \frac{\partial \Gamma^s_{ki}}{\partial u^j}\mathbf{r}_s + \Gamma^s_{ki}\mathbf{r}_{sj} + \frac{\partial q_{ki}}{\partial u^j}\mathbf{m} + q_{ki}\mathbf{m}_j.$$

Подставляя сюда деривационные формулы Гаусса–Вейнгартена, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^k}\mathbf{r}_s + \Gamma^s_{ij}(\Gamma^p_{sk}\mathbf{r}_p + q_{sk}\mathbf{m}) + \frac{\partial q_{ij}}{\partial u^k}\mathbf{m} + q_{ij}b^p_k\mathbf{r}_p = \\ &= \frac{\partial \Gamma^s_{ki}}{\partial u^j}\mathbf{r}_s + \Gamma^s_{ki}(\Gamma^p_{sj}\mathbf{r}_p + q_{sj}\mathbf{m}) + \frac{\partial q_{ki}}{\partial u^j}\mathbf{m} + q_{ki}b^p_j\mathbf{r}_p.\end{aligned}$$

В первых слагаемых заменим индекс суммирования s на p и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{\partial \Gamma^p_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^s_{ij}\Gamma^p_{sk} + q_{ij}b^p_k\Big)\mathbf{r}_p + \Big(\Gamma^s_{ij}q_{sk} + \frac{\partial q_{ij}}{\partial u^k}\Big)\mathbf{m} = \\ &= \Big(\frac{\partial \Gamma^p_{ki}}{\partial u^j} + \Gamma^s_{ki}\Gamma^p_{sj} + q_{ki}b^p_j\Big)\mathbf{r}_p + \Big(\Gamma^s_{ki}q_{sj} + \frac{\partial q_{ki}}{\partial u^j}\Big)\mathbf{m}.\end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ — базис, полученное векторное равенство дает три скалярных — коэффициенты при базисных векторах должны быть равны:

$$\frac{\partial \Gamma^p_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^s_{ij}\Gamma^p_{sk} + q_{ij}b^p_k = \frac{\partial \Gamma^p_{ki}}{\partial u^j} + \Gamma^s_{ki}\Gamma^p_{sj} + q_{ki}b^p_j$$

$$\Gamma^s_{ij}q_{sk} + \frac{\partial q_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma^s_{ki}q_{sj} + \frac{\partial q_{ki}}{\partial u^j}.$$

Первая из этих формул называется формулой Гаусса, вторая — Петерсона–Кодацци.

Аналогично, вычисляя $\mathbf{m}_{ij}$ и $\mathbf{m}_{ji}$, можно получить дополнительные соотношения на коэффициенты 1-й и 2-1 квадратичных форм, но оказывается (мы не будем это проверять), что эти дополнительные соотношения вытекают из формул Гаусса и Петерсона–Кодацци. Более того, оказывается никаких других соотношений нет и имеет место утверждение, аналогичное теории кривых. Мы его приведем без доказательства.

Теорема 2.5.2 (Боннэ)**.** *Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^2$ заданы матричнозначные функции $G(u,v)$, $Q(u,v)$ (симметричные, G положительно определенная), коэфициенты которых удовлетворяют уравнениям Гаусса и Петерсона–Кодацци. Тогда существует поверхность, для которой эти матричнозначные функции являются 1-й и 2-й квадратичной формами. Такая поверхность единственна с точностью до движения пространства.*

Теорема Гаусса.

Один из важнейших результатов дифференциальной геометрии — теорема Гаусса. Точную формулировку мы дадим позднее, а пока сформулируем ее неформально: главная кривизна зависит только от коэффициентов 1-й квадратичной формы (и их производных). Сама теорема заключается в явной формуле для главной кривизны, которая не содержит коэффициентов 2-й квадратичной формы. Выведем эту формулу.

Мы уже знаем, что $K = \frac{\det Q}{\det G}$. Наша задача — избавиться от Q.

Запишем формулу Гаусса в следующем виде

$$q_{ij}b^p_k - q_{ki}b^p_j = \frac{\partial \Gamma^p_{ki}}{\partial u^j} + \Gamma^s_{ki}\Gamma^p_{sj} - \frac{\partial \Gamma^p_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^p_{sk}$$

и умножим обе части на g_{pq} (как всегда, по правильно повторяющимся индексам происходит суммирование)

$$q_{ij}b^p_k g_{pq} - q_{ki}b^p_j g_{pq} = \Big(\frac{\partial \Gamma^p_{ki}}{\partial u^j} + \Gamma^s_{ki}\Gamma^p_{sj} - \frac{\partial \Gamma^p_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^p_{sk}\Big)g_{pq}.$$

При выводе деривационных формул мы получили $b_k^p g_{pq} = -q_{kq}$, поэтому левая часть равна $-q_{ij}q_{kq} + q_{ki}q_{jq}$. При $k=1$, $i=1$, $j=2$, $q=2$, получаем в левой части $q_{11}q_{22} - q_{12}^2 = \det Q$. Таким образом,

$$\det Q = \Big(\frac{\partial\Gamma_{11}^p}{\partial u^2} + \Gamma_{11}^s\Gamma_{s2}^p - \frac{\partial\Gamma_{12}^p}{\partial u^1} - \Gamma_{12}^s\Gamma_{s1}^p\Big)g_{p2},$$

$$K = \frac{\det Q}{\det G} = \frac{g_{p2}}{\det G}\Big(\frac{\partial\Gamma_{11}^p}{\partial u^2} - \frac{\partial\Gamma_{12}^p}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^s\Gamma_{s2}^p - \Gamma_{12}^s\Gamma_{s1}^p\Big).$$

Теорема 2.5.3 (Гаусса)**.** *Главная кривизна удовлетворяет полученному равенству. Она зависит только от коэффициентов 1-й квадратичной формы и их первых и вторых производных.*

Таким образом, главная кривизна зависит только от внутренних свойств поверхности, а не от того, как именно эта поверхность вложена в пространстве.

3. Геодезические линии

3.1. **Геодезические линии. Определение и основные свойства.** Рассмотрим на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ кривую $\mathbf{r}(u^1(s), u^2(s))$, параметризованную натуральным параметром. Тогда

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\Big(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\Big) = \frac{d}{ds}\Big(\mathbf{r}_i\cdot\frac{du^i}{ds}\Big) = \mathbf{r}_{ij}\cdot\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + \mathbf{r}_i\cdot\frac{d^2u^i}{ds^2} = \Big(\Gamma_{ij}^k\mathbf{r}_k + q_{ij}\mathbf{m}\Big)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + \mathbf{r}_i\cdot\frac{d^2u^i}{ds^2}.$$

Запишем разложение этого вектора по базису $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \Big(\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + \frac{d^2u^k}{ds^2}\Big)\mathbf{r}_k + q_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\mathbf{m}.$$

Длина вектора $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ является кривизной нашей кривой. Первое слагаемое в правой части называется *вектором геодезической кривизны*, второе — *вектором вынужденной кривизны*. Первое слагаемое лежит в касательной плоскости, второе — ей ортогонально. Первое зависит только от 1-й квадратичной формы, поэтому не зависит от локальных изометрий поверхности (т.е. не меняется при локальных изометриях), второе зависит от 2-й квадратичной формы, т.е. от расположения поверхности в пространстве.

Определение 3.1.1. Криваня на поверхности называется *геодезической линией*, если ее геодезическая кривизна равна нулю.

Другими словами, геодезические линии обладают тем свойством, что вектор $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ главной нормали такой линии коллинеарен вектору $\mathbf{m}$ нормали к поверхности (причем в каждой точке).

Физическая интерпретация: при движении вдоль геодезичексой линии проекция вектора ускорения на касательную плоскость равна нулю. Т.е. геодезическая — это такая линия, по которой Вы будете двигаться по поверхности, держа руль прямо.

Пример. На плоскости геодезическими линиями являются прямые. На цилиндре и конусе, которые изометричны плоскости, геодезические линии являются образами прямых при изометрии (изгибании), т.к. при изометриях геодезические переходят в геодезические. На сфере сечения плоскостями, проходящими через центр, являются геодезическими.

Пример. На поверхности вращения все меридианы являются геодезическими линиями. Параллели являются геодезическими линиями только в (локально) самых узких и самых широких местах.

Определение геодезической линии эквивалентно тому, что уравнения кривой $u^1 = u^1(s)$, $u^2(s)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} = -\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}, \quad k = 1, 2,$$

относительно *натурального* параметра.

Из теоремы существования и единственности в теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует

Теорема 3.1.2. *Для любых начальных условий $u^i(s_0) = u_0^i$, $\frac{du^i}{ds}|_{s=s_0} = v_0^i$ данная система уравнений имеет единственное решение $u^i = u^i(s)$, $i = 1, 2$.*

Например, при $v_0^1 = v_0^2 = 0$ получаем решение $u^1(s) \equiv u^1(s_0)$, $u^2(s) \equiv u_0^2$, которое не задает никакую кривую (задает точку). Чтобы получить кривую, да еще с натуральным параметром, необходимо предположить, что касательный вектор (v_0^1, v_0^2) в начальной точке имеет единичную длину.

Теорема 3.1.3. *Если касательный вектор (v_0^1, v_0^2) в начальной точке имеет единичную длину, то s является натуральным параметром для решения с таким начальным условием.*

Доказательство. Вспомним, что длина касательных векторов определяется с помощью 1-й квадратичной формы. Т.е. по предположению, $g_{ij}(u^1(s_0), u^2(s_0))v_0^i v_0^j = 1$.

Определим функцию $I(s)$ равенством $I(s) = g_{ij}(u^1(s), u^2(s))\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}$. Если $\gamma(s) = (u^1(s), u^2(s))$ — кривая, то $I(s)$ равно квадару длины касктельного вектора к этой кривой. Вычислим $I(s)$ при условии, что γ удовлетворяет системе уравнений геодезических линий. По предположению, $I(s_0) = 1$. Надо доказать, что $I(s) \equiv 1$ при всех значениях s. Для этого вычислим производную:

$$\frac{dI}{ds} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} + g_{ij}\frac{d^2u^i}{ds^2}\frac{du^j}{ds} + g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{d^2u^j}{ds^2}.$$

Подставим сюда выражения для вторых производных из уравнений геодезических:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{ds} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} - g_{ij}\Gamma^i_{kl}\frac{du^k}{ds}\frac{du^l}{ds}\frac{du^j}{ds} - g_{ij}\Gamma^j_{kl}\frac{du^k}{ds}\frac{du^l}{ds}\frac{du^i}{ds} = \\
&= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} - \Gamma_{kl,j}\frac{du^k}{ds}\frac{du^l}{ds}\frac{du^j}{ds} - \Gamma_{kl,i}\frac{du^k}{ds}\frac{du^l}{ds}\frac{du^i}{ds} = \\
&= (\Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i})\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} - \Gamma_{kl,j}\frac{du^k}{ds}\frac{du^l}{ds}\frac{du^j}{ds} - \Gamma_{kl,i}\frac{du^k}{ds}\frac{du^l}{ds}\frac{du^i}{ds} = 0.
\end{aligned}$$

Мы сначала воспользовались равенством $g_{ij}\Gamma^j_{kl} = \Gamma_{kl,j}$, затем равенством $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}$, после чего получили одинаковые суммы, с точностью до переобозначения индексов суммирования.

Таким образом, если $u^i(s)$ — решение системы дифференциальных уравнений геодезических линий, то квадрат длины касательного вектора не меняется, $\frac{dI}{ds} = 0$, значит, $I(s) \equiv 1$, следовательно, параметр s — натуральный.

□

Следствие 3.1.4. *Для любой точки поверхности и любого (ненулевого) касательного вектора в этой точке существует единственная геодезическая линия, проходящая через эту точку и касающаяся этого вектора.*

Следствие 3.1.5. *Любая геодезическая линия на сфере является центральным плоским сечением (окружностью большого круга).*

Доказательство. Действительно, все такие окружности — геодезические. Через каждую точку сферы в направлении любого касательного вектора проходит одна такая окружность. Других геодезических нет благодаря единственности.

□

Однородность системы уравнений геодезических показывает, что если $\gamma = \gamma(s)$ — геодезическая, параметризованная натуральным параметром, а $t = cs$ — ее линейная репараметризация (c постоянно), то $\gamma = \gamma(t)$ также будет удовлетворять системе уравнений геодезических.

Заметим, что определение геодезических линий формулируется в терминах только 1-й квадратичной формы. Поэтому это определение обобщается на случай метрики g_{ij} в области D на плоскости. Все результаты о свойствах геодезических на поверхностях слово в слово переносятся на случай области в плоскости с заданной в ней метрикой.

3.2. **Геодезические параллели. Полугеодезическая система координат.** Пусть γ — кривая на поверхности. Проведем через каждую точку этой кривой геодезическую линию перпендикулярно γ и отложим вдоль каждой такой геодезической сегмент длины w. Соответствующие точки образуют кривую (это требуется проверить), которая называется *геодезической параллелью к γ на расстоянии w*.

Лемма 3.2.1. *Локально на данной поверхности существует такая система координат (v^1, v^2), что кривая γ в ней задается уравнением $v^1 = 0$.*

Доказательство. Как известно, кривая может быть задана как график функции, $u^1 = \varphi(u^2)$, где φ — гладкая функция. Положим $v^1 = u^1 - \varphi(u^2)$, $v^2 = u^2$. Тогда матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d\varphi}{du^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. невырождена. Уравнение $v^1 = 0$ равносильно уравнению $u^1 = \varphi(u^2)$, которое задает кривую. □

Заметим, что параметрически кривая γ задается в этой локальной системе координат как $v^1 = 0$, $v^2 = t$. Точку с координатами $(0, 0)$ обозначим P.

Пусть D — область в плоскости с координатами w^1, w^2, достаточно малая и содержащая начало координат. Определим репараметризацию (еще одну локальную систему координат) поверхности. Точке (w^1, w^2) сопоставим следующую точку поверхности: сначала на кривой γ возьмем точку с координатой w^2 (это координата на кривой), или, что то же самое, точку с координатами $(0, w^2)$ (это координаты точки в системе координат v^1, v^2). Затем отложим вдоль геодезической линии, выходящей из полученной точки, отложим сегмент длины w^1.

Лемма 3.2.2. *Построенное отображение задает параметризацию (локальную систему координат) на поверхности. Геодезические параллели являются кривыми.*

Доказательство. Зависимость v^1, v^2 от w^1, w^2 непрерывная и гладкая (по теореме о гладкой зависимости решений систем дифференциальных уравнений от начальных условий).

Рассмотрим в точке P векторы с координатами $(\frac{\partial v^1}{\partial w^1}, \frac{\partial v^2}{\partial w^1})$ и $(\frac{\partial v^1}{\partial w^2}, \frac{\partial v^2}{\partial w^2})$ (в базисе $\mathbf{r}_{v^1}$, $\mathbf{r}_{v^2}$). Второй из этих векторов — касательный вектор к кривой γ (т.к. w^2 — параметр вдоль этой кривой), а первый — касательный вектор к геодезической линии, ортогональной к γ (т.к. w^1 — параметр вдоль нее). В точке P эти два вектора ортогональны, следовательно, линейно независимы, поэтому матрица, составленная из их координат, невырождена. А это и есть матрица Якоби $\begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial w^1} & \frac{\partial v^1}{\partial w^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial w^1} & \frac{\partial v^2}{\partial w^2} \end{pmatrix}$. Из ее невырожденности в точке P следует невырожденность и в некоторой окрестности (размер этой окрестности и определяет эпитет "достаточно малая"в отношении к области D). Таким образом, (w^1, w^2) — локальная система координат на поверхности. Уравнение кривой γ имеет в ней вид $w^1 = 0$.

Геодезическая параллель к γ на расстоянии w задается в этой системе координат уравнением $w^1 = w$. Поэтому геодезическая параллель является (гладкой регулярной) кривой (конечно, лишь при достаточно малых w). □

Лемма 3.2.3. *Геодезические параллели ортогональны геодезическим линиям.*

Доказательство. При $w^1 = 0$ (т.е. в точках кривой γ) утверждение очевидно: сама кривая γ ортогональна выпущенным из нее геодезическим по построению. Для доказательства ортогональности в произвольной точке вычислим коэффициенты 1-й квадратичной формы.

Сначала заметим, что $g_{11} = g_{11}(w^1, w^2) = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w^1}\right| \equiv 1$, поскольку w^1 — натуральный параметр.

Далее, заметим, что уравнение $w^2 = C$ задает геодезическую линию. Ее же можно записать параметрически $w^1(s) = s$, $w^2(s) = C$. Эти функции задают частное решение системы дифференциальных уравнений геодезических линий

$$\frac{d^2 w^k}{ds^2} = -\Gamma^k_{ij} \frac{dw^i}{ds} \frac{dw^j}{ds}.$$

Подставим эти функции в систему. Т.к. $\frac{dw^1}{ds} = 1$, $\frac{dw^2}{ds} = 0$, то получим для $k = 1, 2$

$$0 = -\Gamma^k_{11}.$$

Но тогда и $\Gamma_{11,s} = \Gamma^k_{11} g_{ks} = 0$.

Поскольку $\Gamma_{11,s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial w^1} + \frac{\partial g_{s1}}{\partial w^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial w^s}\right)$, а $\frac{\partial g_{11}}{\partial w^s} = 0$, получаем $\frac{\partial g_{1s}}{\partial w^1} = 0$, в частности, $\frac{\partial g_{12}}{\partial w^1} = 0$. Т.к. $g_{12}(0, w^2) = 0$, то из равенства производной нулю следует, что $g_{12}(w^1, w^2) = 0$ тождественно.

Координаты касательных векторов к геодезическим линиям имеют координаты $(1,0)$ (т.к. $w^2 = C$), а касательные вектора к геодезическим параллелям (заданным уравнением $w^1 = w$) имеют координаты $(0,1)$, поэтому угол между ними определяется коэффициентом g_{12}, следовательно, они ортогональны.

$\square$

Полученная система координат называется *полугеодезической системой кординат.* В ней матрица 1-й квадратичной формы имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(w^1, w^2) \end{pmatrix}$.

Полугеодезическую систему координат можно еще немного улучшить, если в качестве кривой γ взять геодезическую линию, а в качестве параметра w^2 вдоль нее — натуральный параметр. Такая система координат называется *специальной полугеодезической системой координат.* В такой системе координат дополнительно имеем $g_{22}(0, w^2) = 1$, $\frac{\partial g_{22}}{\partial w^1}(0, w^2) = 0$.

Полугеодезические системы координат существуют не только на поверхностях, но также и в областях плоскости с заданной на них метрикой. Все утверждения обобщаются на этот случай слово в слово.

3.3. **Экстремальное свойство геодезических.** Одно из приложений существования полугеодезической системы координат — следующее свойство экстремальности геодезических линий: они являются кратчайшими кривыми.

Пусть геодезическая γ соединяет точки A и B.

В следующей теореме слова "достаточно малая окрестность"и "достаточно близкие точки"означают, что в соответствующей окрестности существует полугеодезическая система координат, в которой γ являяется одной из геодезических координатных линий.

Теорема 3.3.1. *Пусть γ — геодезическая линия, соединяющая достаточно близкие точки A и B на поверхности, а β — произвольная кривая, соединяющая эти точки и лежащая в достаточно малой окрестности γ. Тогда длины этих кривых, $L(\gamma)$ и $L(\beta)$ связаны неравенством $L(\gamma) \leqslant L(\beta)$.*

Доказательство. Рассмотрим полугеодезическую систему координат, для которой γ — одна из координатных линий. По предположению, эта система координат определена в некоторой окрестности, содержащей точки A и B и кривую β.

Пусть γ задается уравнением $w^2 = 0$, $w^1 = s$ — натуральный параметр, а β задается уравнениями $w^1 = w^1(t)$, $w^2 = w^2(t)$. Тогда

$$L(\beta) = \int_A^B \sqrt{g_{ij}\dot{w}^i\dot{w}^j}dt = \int_A^B \sqrt{(\dot{w}^1)^2 + g_{22}(\dot{w}^2)}dt \geqslant \int_A^B \sqrt{(\dot{w}^1)^2}dt \geqslant \int_A^B \dot{w}^1\,dt = \int_A^B dw^1 = L(\gamma).$$

$\square$

Вообще говоря, не любые две точки поверхности можно соединить геодезической. Например, если из плоскости вырезать круг, то точки по разные стороны круга так соединить отрезком не получится. Кроме того, иногда точки можно соединить несколькими различными геодезическими — например на сфере для двух не диаметрально противоположных точек имеется две различные геодезические, их соединяющие. Тем не менее, локально ситуация проще: любые достаточно близкие точки можно соединить единственной геодезической.

Теорема 3.3.2. *Для любой точки P_0 поверхности Π существует такая окрестность $U \ni P$ что любые точки $P, Q \in U$ можно соединить геодезической, и такое число $c > 0$, что геодезическая, соединяющая P_0 с Q длины не больше c единственна.*

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, определяющую геодезические линии. Начальными данными для нее служат пары (P, a), где P — точка поверхности, $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^2$ — касательный вектор. Для любого $r > 0$ будем рассматривать открытый диск B_r радиуса r в $\mathbb{R}^2$, т.е. $|\mathbf{a}| < r$.

По теореме из курса дифференциальных уравнений известно, что существует такая окрестность V точки P_0 и число τ, что решение системы существует на отрезке $[0, \tau]$ для любых начальных условий из $V \times B_1$, причем зависимость от начальных условий гладкая. Тогда длина такой геодезической не превосходит τ.

Обозначим через $Q(P, \mathbf{a})$ точку $\gamma(\tau)$, где $\gamma = \gamma(t)$ — решение системы с начальными условиями $(P, \mathbf{a})$, вычисленное в точке $t = \tau$. При этом зависимость Q от $(P, \mathbf{a})$ гладкая. Отметим, что параметр вдоль геодезической не натуральный. Если $\tilde{\gamma}$ — решение системы с начальными условиями $(P, \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|})$, то $\tilde{\gamma}(|\mathbf{a}|t) = \gamma(t)$ (достаточно сравнить их производные), и $Q(P, \mathbf{a}) = \tilde{\gamma}(|\mathbf{a}|\tau)$.

Рассмотрим отображение $F : V \times B_r \to \Pi \times \Pi$, определенное формулой $F(P, \mathbf{a}) = (P, Q(P, \mathbf{a}))$.

Если мы докажем, что F взаимно однозначно, то мы сможем определить, при каком начальном условии геодезическая попадет в заданную точку Q.

Заметим, что $F(P_0, 0) = (P_0, P_0)$. Рассмотрим матрицу Якоби. Для этого обозначим локальные координаты поверхности через u^i, а координаты в касательной плоскости к P_0 — через a^i, $i = 1, 2$. Эти координаты связаны друг с другом (a^i — координаты в базисе $(\mathbf{r}_{u^1}, \mathbf{r}_{u^2})$). Для различения координат в $\Pi \times \Pi$, обозначим локалные координаты в первом экземпляре Π через u_1^i, а во втором — через u_2^i. Отображение F задает функции $u_k^i = u_k^i(u^1, u^2, a^1, a^2)$, и матрица Якоби имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^i}{\partial u^j} & \frac{\partial u_1^i}{\partial a^j} \\ \frac{\partial u_2^i}{\partial u^j} & \frac{\partial u_2^i}{\partial a^j} \end{pmatrix}.$$

По определению отображения F, $u_1^i(u^1, u^2, a^1, a^2) = u^i$, поэтому $\left(\frac{\partial u_1^i}{\partial u^j}\right) = E$ — единичная матрица, а $\left(\frac{\partial u_1^i}{\partial a^j}\right) = 0$ — нулевая. Легко видеть, что $\left(\frac{\partial u_2^i}{\partial u^j}\right) = E$, но это не важно. Невырожденность якобиана определяется теперь невырожденностью матрицы $\left(\frac{\partial u_2^i}{\partial a^j}\right)$. Ее можно вычислить в точке $(P_0, 0)$.

По определению, $Q = Q(P_0, \mathbf{a}) = \gamma(\tau) = \tilde{\gamma}(|\mathbf{a}|\tau)$. Пусть s — натуральный параметр. Тогда по формуле Тэйлора

$$\tilde{\gamma}(s) = \tilde{\gamma}(0) + \dot{\tilde{\gamma}}(0)s + o(s) = P + \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}s + o(s) = P + \mathbf{a}t + o(|\mathbf{a}|t),$$

где $s = |\mathbf{a}|t$. Подставляя сюда $t = \tau$, получим

$$Q(P, \mathbf{a}) = \tilde{\gamma}(|\mathbf{a}|\tau) = P + \mathbf{a}\tau + o(|\mathbf{a}|\tau).$$

Поэтому $\left(\frac{\partial u_2^i}{\partial a^j}\right) = \tau E$. Т.к. $\tau > 0$, эта матрица невырождена. Следовательно, по теореме об обратном отображении, найдется такая окрестность $W \subset V$ и радиус $r < 1$, что ограничение отображения F на $W \times B_r$ является взаимно однозначным с его образом в $\Pi \times \Pi$. Тогда существует такая окрестность $U \subset W$ точки P_0, что на $U \times U$ определено обратное отображение F^{-1}. Поэтому для любых точкек P и Q из U существует единственный вектор $\mathbf{a} \in B_r$, для которого геодезическая, выпущенная из P в направлении $\mathbf{a}$ (с параметром, пропорциональным натуральному, с коэффициентом пропорциональности $|\mathbf{a}| < r$) попадет в точку Q при значении параметра равном τ. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения положим $P = P_0$ и заметим, что длина построенной нами выше геодезической, соединяющей P_0 с Q, равна $|\mathbf{a}|\tau < r\tau$. Положим $c = r\tau$. Из взаимной однозначности F следует, что любая другая геодезическая, выходящая из P_0 в направлении другого касательного вектора, имеющего длину $< r$, имеет длину $< c$ и попадет в другую точку, не совпадающую с Q.

□

3.4. **Вычисления в полугеодезической системе координат.** В полугеодезической системе координат $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$. Обозначим g_{22} через G. Тогда $g^{11} = 1$, $g^{12} = 0$, $g^{22} = \frac{1}{G}$. Т.к.

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial w^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial w^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial w^k}\Big),$$

то надо учитывать только те слагаемые, где среди индексов при производных g оба равны 2.

Получаем, что

$$\Gamma_{11,1} = \Gamma_{11,2} = \Gamma_{12,1} = \Gamma_{21,1} = 0, \quad \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial w^1}, \quad \Gamma_{22,1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial w^1}, \quad \Gamma_{22,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial w^2}.$$

Поднимая индексы, получаем

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial w^1}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial w^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial w^2}.$$

Пример: геодезические на поверхности вращения. Рассмотрим поверхность вращения (вокруг оси Oz). Меридианы являются геодезическими и ортогональны параллелям. Поэтому, взяв в качестве исходной кривой одну из параллелей, мы получим полугеодезическую систему координат, состоящую из параллелей и меридианов. Точнее, координатами являются — $w^2 = \varphi$ (угол вращения) и $w^1 = w$ (длина вдоль меридиана, отсчитываемая от произвольно взятой и зафиксированной параллели). 1-я квадратичная форма имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$. Для вычисления G заметим, что параллель задается уравнением $w = C$, или, параметрически, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = C'$, где ρ — радиус данной параллели. Тогда касательный вектор легко вычисляется, и его длина равна ρ. Поэтому $G = \rho^2$ (вспоминаем геометрический смысл 1-й квадратичной формы). Ясно, что ρ является функцией от параметра w.

Тогда символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2\rho^2}2\rho\rho_w, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}2\rho\rho_w.$$

Подставим эти коэффициенты в уравнения геодезических:

$$w_{ss} = -\Gamma^1_{ij}\frac{dw^i}{ds}\frac{dw^j}{ds} = \rho\rho_w(\varphi_s)^2;$$

$$\varphi_{ss} = -\Gamma^2_{ij}\frac{dw^i}{ds}\frac{dw^j}{ds} = -2\frac{\rho_w}{\rho}w_s\varphi_s = -2\frac{\rho_s\varphi_s}{\rho}.$$

Обозначим через ω угол между геодезической линией и меридианом. В стандартном базисе касательной плоскости касательный вектор a к параллели имеет координаты $(0,1)$, а касательный вектор b к геодезической линии — (w_s, φ_s). Пользуясь 1-й квадратичной формой для вычисления угла, получаем $\sin\omega = \frac{\langle a,b\rangle}{|a|\cdot|b|} = \frac{\rho^2\varphi_2}{\rho} = \rho\varphi_s$ (поскольку s — натуральный параметр, $|b| = 1$).

Теорема 3.4.1 (Клеро)**.** *Вдоль любой геодезической $\rho\sin\omega = Const$.*

Доказательство. Вычислим производную

$$(\rho\sin\omega)_s = (\rho^2\varphi_s)_s = 2\rho\rho_s\varphi_s + \rho^2\varphi_{ss}.$$

Из уравнения геодезических следует, что $\varphi_{ss} = -2\frac{\rho_s\varphi_s}{\rho}$. Подставляя это в формулу для производной, получаем $(\rho\sin\omega)_s = 0$, откуда получаем утверждение теоремы.

□

3.5. **Поверхности постоянной Гауссовой кривизны.** Подставим в формулу для Гауссовой кривизны

$$K = \frac{g_{p2}}{\det G}\Big(\frac{\partial\Gamma^p_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial\Gamma^p_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^s_{11}\Gamma^p_{s2} - \Gamma^s_{12}\Gamma^p_{s1}\Big).$$

формулы, полученные для полугеодезической систеиы координат:

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u^1}; \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1}; \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u^2}; \quad \text{остальные — нули.}$$

Тогда $p = 2$ и

$$\begin{aligned} K &= \frac{g_{22}}{\det G}\Big(\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^s_{11}\Gamma^2_{s2} - \Gamma^s_{12}\Gamma^2_{s1}\Big) = -\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u^1} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} = \\ &= -\frac{\partial\left(\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u^1}\right)}{\partial u^1} - \left(\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u^1}\right)^2 = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial (u^1)^2}\cdot 2G - 2\left(\frac{\partial G}{\partial u^1}\right)^2}{4G^2} - \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial u^1}\right)^2}{4G^2} = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial (u^1)^2}}{2G} + \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial u^1}\right)^2}{4G^2}. \end{aligned}$$

Далее будем писать, как обычно, $u^1 = u$, $u^2 = v$. Тогда

$$K = -\frac{G_{uu}}{2G} + \frac{G_u^2}{4G^2}.$$

Обозначим $\sqrt{G} = f$. Тогда $f_u = \frac{1}{2\sqrt{G}}G_u$,

$$f_{uu} = \frac{G_{uu}\cdot 2\sqrt{G} - 2G_u\cdot\frac{1}{2\sqrt{G}}\cdot G_u}{4G} = \frac{2G_{uu}\cdot G - G_u^2}{4G^{3/2}};$$

$$\frac{f_{uu}}{f} = \frac{G_{uu}}{2G} - \frac{G_u^2}{4G^2},$$

поэтому

$$f_{uu} = -Kf.$$

Здесь f и K — функции переменных u и v. Поэтому это равенство можно рассматривать как обыкновенное дифференцильное уравнение второго порядка с переменной u, а переменная v здесь играет роль параметра. Более того, если мы предположим, что наша система координат — специальная полугеодезическая, то это дас нам начальные условия $f(0,v) = 1$, $f_u(0,v) = 0$, которые определяют единственное решение этого уравнения.

Рассмотрим случай, когда гауссова кривизна постоянна.

1. Пусть $K(u,v) \equiv 0$.

Единственное решение с указанными начальными условиями — $f(u,v) \equiv 1$.

Следствие 3.5.1. *Поверхность с нулевой гауссовой кривизной локально изометрична плоскости.*

Доказательство. Пусть дана поверхность с нулевой гауссовой кривизной. Выберем на ней специальную полугеодезическую систему координат. Тогда 1-я квадратичная форма имеет единичную матрицу (т.е. $G \equiv 1$) — такую же, как у плоскости.

□

2. Пусть $K(u,v) \equiv 1$.

Единственное решение с указанными начальными условиями — $f(u,v) = \cos u$. В этом случае матрица 1-й квадратичной формы имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$.

Следствие 3.5.2. *Поверхность с нулевой гауссовой кривизной локально изометрична плоскости.*

Доказательство. Если на сфере ввести сферические координаты φ, θ (угол θ отсчитывается от оси Oz), то матрица первой квадратичной формы имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix}$. Замена координат $\theta = u$, $\varphi = v$ задает локальную изометрию.

□

Таким образом, поверхности постоянной положительной гауссовой кривизны локально устроены как сферы.

3. Пусть $K(u,v) \equiv -1$.

Единственное решение с указанными начальными условиями — $f(u,v) = \operatorname{ch} u$. В этом случае матрица 1-й квадратичной формы имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 u \end{pmatrix}$.

Далее, мы подробно исследуем случай поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

4. Поверхности постоянной отрицательной кривизны. Геометрия Лобачевского

4.1. **Псевдосфера.** Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ псевдоевклидово скалярное произведение $<\mathbf{x},\mathbf{y}> = x^1y^1 + x^2y^2 - x^3y^3$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $<\mathbf{x},\mathbf{x}> = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = Q$ называется *псевдосферой* радиуса Q. С обычной точки зрения, это двуполостный гипрболоид. Мы будем в основном предполагать, что $Q = 1$.

По аналогии со стереографической проекцией обычной сферы, можно определить стереографическую проекцию половины псевдосферы на плоскость следующим образом. Точка $P(0,0,-1)$ на нижней половине гиперболоида играет роль полюса. Мы соединяем ее прямой с произвольной точкой $M(x,y,z)$ верхней половины, и точка пересечения этой прямой с плоскостью Oxy определяет образ точки M. Это отображения задает биекцию верхней половины гиперболоида и внутренности единичного круга.

Рассмотрим единичный круг отдельно от плоскости Oxy, и введем там координаты u, v, которые совпадают с x, y при отождествлении круга как части плоскости Oxy. Прямая PM задается параметрически как $\mathbf{r} = (xt, yt, -1 + (z+1)t)$ и пересекает плоскость Oxy при $t = \frac{1}{1+z}$. Тогда $u = \frac{x}{1+z}$, $v = \frac{y}{1+z}$. Обозначим $\rho^2 = u^2 + v^2$, $r^2 = x^2 + v^2$. Тогда $\rho = \frac{r}{1+z}$, $\rho(1 + \sqrt{r^2+1}) = r$, $\rho\sqrt{r^2+1} = r - \rho$, $\rho^2(r^2+1) = r^2 + \rho^2 - 2r\rho$, $\rho^2r^2 = r^2 - 2r\rho$, $\rho^2 r = r - 2\rho$, $r = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$. Т.к. $x = r\cos\varphi$,

$u = \rho\cos\varphi$, получаем $x = \frac{2u}{1-\rho^2}$. Анлогично, $y = \frac{2v}{1-\rho^2}$. Подставляя это в уравнение гиперболоида, получаем $z^2 = \frac{4u^2+4v^2}{(1-\rho^2)^2} + 1$, $z^2 = \frac{4\rho^2+1-2\rho^2+4\rho^4}{(1-\rho^2)^2}$, $z = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}$. Итого,

$$\mathbf{r} = \Big(\frac{2u}{1-\rho^2}, \frac{2v}{1-\rho^2}, \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\Big).$$

Лемма 4.1.1. *(u, v) — локальная система координат (при $\rho < 1$).*

Доказательство. Проверим, что векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ линейно независимы. Достаточно проверить невырожденность матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$. Далее — упражнение на вычисление производных и определителей.

□

Нетривиальная идея: Сочтавим матрицу 1-й квадратичной формы, используя псевдоевклидово скалярное произведение. Формально, то, что получится, не является 1-й квадратичной формой (для этого требуется евклидово скалярное произведение), но, как мы скоро увидим, получится метрика.

$$\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \frac{4}{(1-\rho^2)^2}.$$

Аналогично получаем

$$\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle = 0; \qquad \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v\rangle = \frac{4}{(1-\rho^2)^2}.$$

Соответствующая матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \frac{4}{(1-\rho^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-\rho^2)^2} \end{pmatrix}$ и является положительно определенной, т.е. является метрикой в открытом круге $\rho < 1$.

Теорема 4.1.2. *Эта метрика является метрикой постоянной отрицательной гауссовой кривизны.*

Доказательство. Гауссову кривизну можно вычислить и непосредственно, но мы сначала произведем замену координат.

Сначала заменим координаты u, v на полярные координаты ρ, φ. Т.к. $du^2 + dv^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$, $\frac{4(du^2+dv^2)}{(1-\rho^2)^2} = \frac{4(d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2)}{(1-\rho^2)^2}$, поэтому матрица метрики приобретает вид $\begin{pmatrix} \frac{4}{(1-\rho^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\rho^2}{(1-\rho^2)^2} \end{pmatrix}$.

Теперь можно произвести замену так, чтобы получилось $\frac{4}{(1-\rho^2)^2} d\rho^2 = d\chi^2$ (другими словами, чтобы g_{11} стало равным 1). Для этого надо решить дифференциальное уравнение $\frac{2}{1-\rho^2} d\rho = d\chi$. Частное решение легко находится — $\rho = \operatorname{th}\frac{\chi}{2}$. Тогда коэффициент при $d\varphi^2$ (g_{22}) принимает вид $\frac{4\rho^2}{(1-\rho^2)^2} = \operatorname{sh}^2\chi$, и метрика принмает вид $d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\, d\varphi^2$ с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2\chi \end{pmatrix}$.

Гауссова кривизна получется с помощью формулы $K + \frac{(\sqrt{G})_{\chi\chi}}{\sqrt{G}} = 0$, откуда $K = -1$.

□

4.2. **Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.** Рассмотрим центральное плоское сечение псевдосферы. Уравнение секущей плоскости $Ax + By + Cz = 0$ принимает один из двух видов — $Ax + By = 0$ или $z = Ax + By$. В первом случае секущая плоскость проходит через ось Oz и пересекает круг $u^2 + v^2 < 1$ по прямой $Au + Bv = 0$, проходящей через центр круга.

Во втором случае уравнение линии, которая получается при стереографической проекции сечения, $\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} = A\frac{2u}{1-\rho^2} + B\frac{2v}{1-\rho^2}$, $1+u^2+v^2 = 2Au+2Bv$, $(u-A)^2+(v-B)^2 = A^2+B^2-1$. Получаем уравнение окружности с центром в точке (A, B) и радиусом $\sqrt{A^2+B^2-1}$. Сумма квадратов радиусов этой окружности и окружности $u^2 + v^2 = 1$ равна расстоянию между их центрами, откуда легко заметить, что две окружности пересекаются под прямым углом. Естественно, что при стереографической проекции сечению соответствуют только те точки окружности $(u - A)^2 + (v - B)^2 = A^2 + B^2 - 1$, которые находятся внутри круга $u^2 + v^2 < 1$. Рассуждая в противоположном направлении, любой окружности, перпендикулярной к окружности $u^2+v^2=1$, отвечает некоторое центральное плоское сечение.

Окружность $u^2+v^2=1$ в этой ситуации называется *абсолютом.*

Мы доказали следующее утверждение:

Лемма 4.2.1. *При стереографической проекции имеется взаимно-однозначное соответствие между центральными плоскими сечениями и прямыми и окружностями, ортогональными к абсолюту.*

Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского как множество состоит из множества точек $u^2+v^2<1$. Прямыми в этой модели являются прямые, проходящие через центр этого круга (и, следовательно, ортогональные абсолюту), и дуги окружностей, ортогональных к абсолюту. Через любую точку проходит бесконечно много таких "прямых не пересекающих ("параллельных") данную "прямую не проходящую через данную точку.

По аналогии с этой моделью, можно рассмотреть и модель другой неевклидовой геометрии, которая получается с помощью сферы и ее плоских сечений. В такой геометрии параллельных "прямых"вообще не существует, т.к. любые два центральных плоских сечения сферы пересекаются.

Не удивительно, что "прямые"в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского являются геодезическими линиями для соотвтетствующей метрики. Для доказательства этого можно было бы попытаться решить систему уравнений геодезических, но это очень сложно. Мы приведем два доказателсьва "в обход".

Первое доказательство основано на свойствах псевдоевклидова скалярного произведения. Мы сдесь дадим набросок, детали которого легко восполнить. Всю теорию поверхностей можно переписать с евклидова случая на псевдоевклидов. В частности, вектор $\mathbf{m}$ нормали к поверхности можно определить как "ортогональный"ко всем векторам касательной плоскости относительно псевдоевклидова скалярного произведения. В случае псевдосферы уравнение касательной плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0), лежащую на псевдосфере, известно из аналитической геометрии: $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)-z_0(z-z_0)=0$. Оно означает, что любой касательный вектор $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ ортогонален радиус-вектору (x_0, y_0, z_0) точки касания относительно псевдоевклидова скалярного произведения (так же, как любой касательный вектор к сфере ортогонален к радиус-вектору относительно обычного евклидова скалярного произведения).

Так же, как в евклидовом случае, вектор ускорения раскладывается на вектор геодезической кривизны и вектор вынужденной кривизны, и для геодезических линий вектор ускорения коллинеарен вектору нормали к поверхности.

Для линий, которые являются центральными сечениями гиперболоида, так и происходит: нужно расмотреть плоскость сечения и плоскую кривую в ней, и проверить, что радиус-вектор перпендикулярен этой кривой.

4.3. **Группа изометрий.** Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область с координатами u^1, u^2, $F: D \to D$ — гладкое невырожденное взаимно однозначное отображение. Если F — изометрия (сохраняет метрику), то и F^{-1} — изометрия. Также композиция двух изометрий является изометрией. Поэтому множество всех изометрий области D образует *группу.*

Например, группа изометрий плоскости сводится к сдвигам, поворотам и симметриям. Обычно трудно описать *всю* группу изометрий, но лекго проверить, что та или иная группа является подгруппой в группе всех изометрий. Например, легко видеть, что ортогональная группа $O(3)$ состоит из изометрий сферы, но труднее доказать, что других изометрий у сферы нет.

Отметим, что изометричность здесь требуется не локально а во всей области D.

Лемма 4.3.1. *Пусть F — изометрия, γ — геодезическая. Тогда $F(\gamma)$ — также геодезическая.*

Доказательство. При изометриях сохраняется метрика, а, значит, и длины кривых. Т.е. для любой кривой β, ее длина от точки A до точки B равна длине образа $F(\beta)$ этой кривой от точки $F(A)$ до точки $F(B)$. Но, локально, геодезические являются кратчайшими, поэтому образы геодезических ялвяются локально геодезическими. Из теоремы единственности геодезических с фиксированными начальными условиями следует, что наше утверждение выполнено глобально. $\square$

Сейчас мы опишем некоторые подгруппы группы изометрий модели Пуанкаре.

Напомним, что изометрия — это невырожденная замена координат во внутренности единичного круга, сохраняющая метрику, т.е.$g_{ij}(\tilde{u}^1(u^1,u^2),\tilde{u}^2(u^1,u^2))\frac{\partial\tilde{u}^i}{\partial u^k}\frac{\partial\tilde{u}^j}{\partial u^l} = g_{kl}(u^1,u^2)$, где $g_{11} = g_{22} = \frac{4}{(1-\rho^2)^2}$, $g_{12} = 0$.

Легко заметить, что поворот $\tilde{u} = u\cos\varphi + v\sin\varphi$, $\tilde{v} = -u\sin\varphi + v\cos\varphi$ задает изометрию (достаточно перейти к полярным координатам, чтобы увидеть, что в них метрика не меняется). Таким образом, группа поворотов является подгруппой изометрий модели Пуанкаре.

Для описания другой подгруппы изометрий введем комплексные обозначения, $z = u + iv$, $\overline{z} = x - iy$. Матрица перехода от u, v к $z, \overline{z}$ очевидно невырождена. Рассмотрим преобразования комплексной плоскости вида $w = \frac{z-a}{1-az}$, где $a \in (-1,1)$.

1. Невырожденность. Для этого надо удостовериться в невырожденности замены $z, \overline{z}$ на $w, \overline{w}$. Легко проверяется, что $\frac{\partial w}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial\overline{w}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0 \neq \frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{z}}$.

2. Пусть $|z| = 1$. Тогда

$$|w| = \frac{|z-a||\overline{z}|}{|1-az||\overline{z}|} = \frac{||z|^2 - a\overline{z}|}{|\overline{z}-a||z|^2|} = \frac{|1-a\overline{z}|}{|\overline{z}-a|} = \frac{|1-az|}{|z-a|} = \frac{1}{|w|},$$

следовательно, $|w| = 1$. Поэтому единичная окружность переходит в себя (точнее, в часть себя, но, как мы сейчас увидим, отображение обратимо, поэтому образ единичной окружности совпадает с ней).

3. Групповая структура. Пусть $a, b \in (-1,1)$, $v = \frac{w-b}{1-bw}$. Тогда

$$v = \frac{w-b}{1-bw} = \frac{\frac{z-a}{1-az} - b}{1 - b\frac{z-a}{1-az}} = \frac{z-a-b+abz}{1-az-bz+ab} = \frac{(1+ab)z-(a+b)}{(1+ab)-(a+b)z} = \frac{z - \frac{a+b}{1+ab}}{1 - \frac{a+b}{1+ab}z}.$$

Если $a, b \in (-1,1)$, то $\frac{a+b}{1+ab} \in (-1,1)$ (проверьте!). Обратное отображение получается, если мы выразим z через w.

4. Поскольку $w(0) = \frac{-a}{1} = -a$, образ нуля попадает внутрь единичного круга. По непрерывности, внутренность единичного круга переходит в себя.

5. Изометричность. Заметим, что $dzd\overline{z} = d(u+iv)d(u-iv) = du^2 + dv^2$. Поэтому метрика имеет вид $4\frac{du^2+dv^2}{(1-(u^2+v^2))^2} = 4\frac{dzd\overline{z}}{(1-|z|^2)^2}$. Вместо вычислений с использованием матрицы перехода (матрицы Якоби), удобнее использовать дифференциалы. С учетом того, что $dw = \frac{1-az+(z-a)a}{(1-az)^2}dz = \frac{1-a^2}{(1-az)^2}dz$,

$$\begin{aligned}\frac{dwd\overline{w}}{(1-|w|^2)^2} &= \frac{\frac{1-a^2}{(1-az)^2}dz\frac{1-a^2}{(1-a\overline{z})^2}d\overline{z}}{\left(1-\left|\frac{z-a}{1-az}\right|^2\right)^2} = \frac{(1-a^2)^2dzd\overline{z}}{(|1-az|^2-|z-a|^2)^2} = \frac{(1-a^2)^2dzd\overline{z}}{(1-az-a\overline{z}+a^2|z|^2-|z|^2+az+a\overline{z}-a^2)^2} = \\ &= \frac{(1-a^2)^2dzd\overline{z}}{(1-a^2-|z|^2(1-a^2))^2} = \frac{dzd\overline{z}}{(1-|z|^2)^2}.\end{aligned}$$

Группа, порожденная этими двумя подгруппами, также является группой изометрий. Легко увидеть, что эта подгруппа действует *транзитивно*, т.е. для любых двух точек найдется элемент группы, который переводит первую точку во вторую. Это следует из того, что точку 0 можно перевести в точку $-a$ элементом второй подгруппы, а точку $-a$ можно повернуть на произвольный угол с помощью первой подгруппы.

Теперь мы можем доказать теорему о геодезических на модели Пуанкаре:

Теорема 4.3.2. *Геодезическими на модели Пуанкаре являются интервалы прямых, проходящих через центр, и дуги окружностей, ортогональных к абсолюту.*

Доказательство. Для метрики в координатах χ, φ, выпишем уравнения геодезических. Поскольку $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2\operatorname{sh}^2\chi}2\operatorname{sh}\chi\operatorname{ch}\chi = \operatorname{cth}\chi$, $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}2\operatorname{sh}\chi\operatorname{ch}\chi = -\operatorname{sh}\chi\operatorname{ch}\chi$, а остальные символы Кристоффеля равны нулю, уравнения геодезических принимают вид

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} = \operatorname{sh}\chi\operatorname{ch}\chi\Big(\frac{d\varphi}{ds}\Big)^2; \qquad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -2\operatorname{cth}\chi\frac{d\chi}{ds}\frac{d\varphi}{ds}.$$

Функции $\chi(s) = s$, $\varphi = Const$ задают решение этой системы уравнений (подставьте их!). Поэтому любая прямая, проходящая через начало координат, является геодезической. Заметим, что такие прямые ортогональны к абсолюту, и их можно рассматривать как окружности "бесконечного радиуса".

Рассмотрим, во что перейдет геодезическая $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ под действием преобразования $w = \frac{z-a}{1-az}$. Для этого запишем эту прямую как $z = it$. Тогда $w(t) = \frac{it-a}{1-iat} = \frac{(it-a)(1+iat)}{1+a^2t^2} = \frac{it-a-at^2-ia^2t}{1+a^2t^2}$, и получаются параметрические уравнения $u = -\frac{a(1+t^2)}{1+a^2t^2}$, $v = \frac{(1-a^2)t}{1+a^2t^2}$. Остается проверить, что эти параметрические уравнения задают окружность, ортогональную к абсолюту. Но уравнения таких окружностей, да еще с центром на оси Ou, имеют вид $u^2 - 2Au + v^2 + 1 = 0$, где A — коэффициент. Достаточно подставить параметрические уравнения в формулу $u^2 + v^2 + 1$, чтобы после элементарных преобразований получить выражение, пропорциональное u.

Таким способом можно получить в качестве геодезических линий все окружности, перпендикулярные к абсолюту (т.к. группа действует транзитивно). Но этого уже достаточно, т.к. через любую точку в направлении любого вектора проходит такая окружность (или прямая). □

5. Параллельный перенос

Пусть Π — поверхность, заданная как $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $u = u^1$, $v = u^2$; γ — кривая на Π с параметром t и с касательным вектором $\dot{\gamma} = (\dot{u}^1, \dot{u}^2)$. Пусть кривая γ соединяет точки P и Q, и в точке P задан касательный вектор $\mathbf{a}$. Если мы начнем параллельно сдвигать этот вектор в соседние точки, он перестанет быть касательным к поверхности. Для того, чтобы получить в результате касательный вектор, поступим так: разобьем сегмент кривой от P до Q точками $P = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = Q$ на мелкие сегменты длины Δt, перенесем параллельно вектор $\mathbf{a}$ из P_0 в P_1, после чего спроектируем перенесенный вектор на касательную плоскость в точке P_1; полученный вектор, касательный к поверхности в точке P_1, перенесем в точку P_2, спроектируем на касательную плоскость в этой точке, и т.п. В результате, в точке Q получим касательный вектор к поверхности, зависящий от Δt, после чего устремим Δt к нулю в надежде, что этот предел существует. Так определяется операция параллельного перенесения вектора вдоль кривой.

В точке P_0 имеем $\mathbf{a} = a^i(t_0)\mathbf{r}_i(t_0)$, поэтому в точке P_1 надо этот же вектор разложить по базису $\mathbf{r}_1(t_1), \mathbf{r}_2(t_1), \mathbf{m}(t_1)$. По формуле Тэйлора, $\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_i(t_1) + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}(t_1)(t_0 - t_1) + o(\Delta t) = \mathbf{r}_i(t_1) - \mathbf{r}_{ij}(t_1)\frac{du^j}{dt}(t_1)\Delta t + o(\Delta t) = \mathbf{r}_i(t_1) - \mathbf{r}_{ij}(t_1)\dot{u}^j(t_1) + o(\Delta t) = \mathbf{r}_i(t_1) - (\Gamma^k_{ij}(t_1)\mathbf{r}_k(t_1) + q_{ij}(t_1)\mathbf{m}(t_1))\dot{u}^j(t_1) + o(\Delta t)$. При проектировании на касательную (в точке P_1) плоскость, обнуляется коэффициент при $\mathbf{m}$, поэтому для проекции получаем $a^i(t_1)\mathbf{r}_i(t_1) = a^i(t_0)\big(\mathbf{r}_i(t_1) - \Gamma^k_{ij}(t_1)\mathbf{r}_k(t_1)\dot{u}^j(t_1) + o(\Delta t)\big)$. Тогда

$$(a^i(t_1) - a^i(t_0))\mathbf{r}_i(t_1) = -\Gamma^k_{ij}(t_1)a^i(t_0)\dot{u}^j(t_1)\mathbf{r}_k(t_1) + o(\Delta t).$$

Деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получаем

$$\dot{a}^i\mathbf{r}_i = -\Gamma^k_{ij}a^i\dot{u}^j\mathbf{r}_k,$$

где все величины вычислены в точке t_1. Приравнивая коэффициенты при базисных векторах, получаем уравнение

$$\dot{a}^k + \Gamma^k_{ij}a^i\dot{u}^j = 0.$$

Двигаясь дальше вдоль кривой γ, получаем, что это уравнение должно выполняться в каждой точке кривой.

Определение 5.0.3. Это уравнение (точнее, система уравнений) называется *уравнением параллельного переноса*. Это — система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, поэтому она имеет решение, единственное при заданном начальном условии $\mathbf{a}(t_0) = \mathbf{a}$. Результатом параллельного перенесения вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t_0)$ в точку Q называется решение системы в точке Q.

Пусть a^1, a^2 — гладкие функции от параметра t (т.е. от точек кривой; обычно такие функции определены не только на кривой, но и в ее окрестности, но достаточно, чтобы они были определены на кривой). Тогда можно образовать *векторное поле* $\mathbf{a} = a^i(t)\mathbf{r}_i(t)$, т.е. каждой точке кривой γ сопоставляется (гладким образом) касательный вектор.

Определение 5.0.4. Векторное поле $\mathbf{a}$ называется *параллельным вдоль* γ, если оно удовлетворяет уравнению параллельного переноса, т.е. $\dot{a}^k + \Gamma^k_{ij}a^i\dot{u}^j = 0$, $k = 1, 2$.

Лемма 5.0.5. *Пусть две поверхности соприкасаются по кривой γ. Тогда результат параллельного перенесения вектора вдоль γ не зависит от поверхности.*

Доказательство. По предположению, во всех точках кривой γ обе поверхности имеют совпадающие касательные плоскости. Поэтому операция перенесения и проектирования (с последующим предельным переходом) не зависит от поверхности.

$\square$

Если $\mathbf{a}$ — векторное поле на кривой γ, то его дифференцирование дает

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}(a^i\mathbf{r}_i) = \dot{a}^i\mathbf{r}_i + a^i\mathbf{r}_{ij}\dot{u}^j = \dot{a}^i\mathbf{r}_i + a^i(\Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k + q_{ij}\mathbf{m})\dot{u}^j = \left(\dot{a}^k + \Gamma^k_{ij}a^i\dot{u}^j\right)\mathbf{r}_k + q_{ij}a^i\dot{u}^j.$$

Первая часть, $\left(\dot{a}^k + \Gamma^k_{ij}a^i\dot{u}^j\right)\mathbf{r}_k$, лежит в касательной плоскости и называется *геодезической производной*, она не зависит от расположения поверхности в пространстве. Вторая часть, $q_{ij}a^i\dot{u}^j$, наоборот, определяется этим расположением. Если векторное поле параллельно вдоль кривой, то первая часть обращается в ноль, т.е.

Лемма 5.0.6. *Производная от векторного поля, параллельного вдоль кривой, ортогональна поверхности.*

Лемма 5.0.7. *Пусть* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *— векторные поля, параллельные вдоль кривой* γ*. Тогда величина* $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$ *постоянна вдоль кривой* γ*.*

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \langle\dot{\mathbf{a}},\mathbf{b}\rangle + \langle\mathbf{a},\dot{\mathbf{b}}\rangle.$$

По предыдущей лемме, $\dot{\mathbf{a}}$ ортогонально к касательной плоскости, следовательно, и к вектору $\mathbf{b}$, поэтому $\langle\dot{\mathbf{a}},\mathbf{b}\rangle = 0$. Второе слагаемое равно 0 по той же причине.

$\square$

Следствие 5.0.8. *При параллельном перенесении сохраняются длины и углы.*

Вопрос: Параллельное перенесение определяется как предел повторяющихся операций переноса и проектирования. При проектировании длины векторов уменьшаются. Не противоречит ли это данному следствию? Почему?

Лемма 5.0.9. *Если* γ *— геодезическая, то векторное поле* $\dot{\gamma}$ *параллельно вдоль* γ*.*

Доказательство. Если $\mathbf{a} = \dot{\gamma}$, то $a^i = \dot{u}^i$, $\dot{a}^i = \ddot{u}^i$. Подставляя это в уравнение параллельного переноса, получаем уравнение геодезических, которому удовлетворяет γ.

$\square$

Таким образом, при параллельном перенесении вдоль геодезических, угол между переносимым вектором и самой геодезической не меняется.

Примеры.

Как видно, результат параллельного перенесения векторов зависит от пути, вдоль которого происходит перенос. В частности, при перенесении по *замкнутому контуру*, вектор не обязан вернуться в первоначальное состояние. Т.к. речь идет о касательных векторах к поверхности в фиксрованной точке замкнутого контура, положение перенесенного вектора полностью определяется углом поворота (по отношению к начальному положению переносимого вектора).

Теорема 5.0.10 (Леви-Чивита-Гаусса-Боннэ)**.** *Пусть* $\Delta\omega$ *— угол между вектором* $\mathbf{a}$*, заданным в точке* P *замкнутого контура* γ*, и результатом его перенесения вдоль* γ *в исходную точку, удовлетворяет равенству*

$$\Delta\omega = \iint_D K dS,$$

где D *— область поверхности, ограниченная конуром* γ*.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $|\mathbf{a}| = 1$, и что в области D имеется полугеодезическая система координат. Если D слишком велика для этого, то ее следует разбить на несколько меньших областей. При этом надо разрешить, чтобы кривые были кусочно гладкими, а не гладкими.

Пусть u, v — полуеодезическая система координат, в которой 1-я квадратичная форма имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(u,v) \end{pmatrix}$. По определению, базисные векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ ортогональны, и $|\mathbf{r}_u| = 1$, $|\mathbf{r}_v| = \sqrt{G}$.

Обозначим через ω угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}_u$. Векторное поле, параллельное вдоль γ и равное $\mathbf{a}$ в точке P, обозначим $\mathbf{a}(t)$, где t — параметр кривой γ. Впрочем, зависимость от параметра мы обычно явно указывать не будем.

Рассмотрим величину $\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_u \rangle$ как функцию параметра t, и вычислим ее производную двумя способами.

1. По определению, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_u \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r}_u| \cos\omega = \cos\omega$, поэтому

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_u \rangle = -\sin\omega\dot{\omega}.$$

2. Непосредственно дифференцируя, получим

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{r}_u \rangle + \langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{r}}_u \rangle = \langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{r}}_u \rangle,$$

поскольку $\langle \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{r}_u \rangle = 0$ в силу того обстоятельства, что векторное поле $\mathbf{a}$ параллельно вдоль кривой, следовательно, его производная ортогональна касательной плоскости, и, следовательно, вектору $\mathbf{r}_u$.

С помощью деривационных формул (и помня, что $u = u^1$, $v = u^2$, а также, что $\mathbf{m}$ ортогонален к поверхности, следовательно, к $\mathbf{a}$) получаем

$$\langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{r}}_u \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_{1j}\dot{u}^j \rangle = \langle \mathbf{a}, \Gamma^k_{1j}\dot{u}^j\mathbf{r}_k + q_{1j}\dot{u}^j\mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{a}, \Gamma^k_{1j}\dot{u}^j\mathbf{r}_k \rangle = \Gamma^k_{1j}\dot{u}^j\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_k \rangle.$$

Теперь вспомним, что в полугеодезической системе координат из всех символов Кристоффеля Γ^k_{1j} отличен от нуля только $\Gamma^2_{12} = \frac{G_u}{2G}$, поэтому в полученной сумме надо оставить только слагаемые, в которых $k = 2$, $j = 2$:

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_u \rangle = \Gamma^2_{12}\dot{u}^2\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 \rangle = \frac{G_u}{2G}\dot{v}\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_v \rangle = \frac{G_u}{2G}\dot{v}|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r}_v| \sin\omega = \frac{G_u}{2G}\sqrt{G}\sin\omega\,\dot{v}.$$

Сравнивая оба результата, получаем

$$-\sin\omega\,\dot{\omega} = \frac{G_u}{2\sqrt{G}}\sin\omega\dot{v}, \qquad \text{т.е.} \quad -\dot{\omega} = \frac{G_u}{2\sqrt{G}}\,\dot{v}.$$

Записывая это равенство в дифференциалах, получаем

$$d\omega = -\frac{G_u}{2\sqrt{G}}\,dv.$$

Чтобы получить $\Delta\omega$, нужно вычислить интеграл по замкнутому контуру

$$\Delta\omega = \int_\gamma d\omega = -\int_\gamma \frac{G_u}{2\sqrt{G}}\,dv,$$

который удобно свести к интегралу по области D с помощью формулы Грина:

$$\Delta\omega = -\iint_D \left(\frac{G_u}{2\sqrt{G}}\right)_u du\,dv = -\frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{G_{uu}}{\sqrt{G}} - \frac{1}{2}\frac{G_u^2}{\sqrt{G}^3}\right) du\,dv = \iint_D \left(-\frac{1}{2}\frac{G_{uu}}{G} + \frac{1}{4}\frac{G_u^2}{G^2}\right) dS$$

поскольку $dS = \sqrt{G}\,du\,dv$. Но подинтегральное выражение совпадает с формулой для гауссовой кривизны, окуда и следует утверждение теоремы.

□

Следствие 5.0.11. *Гауссова кривизна в точке P равна пределу отношения $\Delta\omega$ к площади куска поверхности при стремлении этого куска поверхности к точке P.*

Теорема Леви-Чивита-Гаусса-Боннэ позволяет переносить векторы без явного решения уравнения параллельного переноса не только вдоль геодезических, но и вдоль произвольных кривых: для этого надо аппроксимировать кривую кусками геодезических, вдоль которых при параллельном перенесении сохраняется угол между переносимым вектором и геодезическими.

Геодезическим треугольником на поверхности называется замкнутый контур, состоящий из трех кусков геодезических линий. В наиболее простом случае — случае поверхностей постоянной кривизны, имеет место следствие:

Следствие 5.0.12. *Сумма углов геодезического треугольника равна $\pi + KS$, где K — (постоянная) гауссова кривизна, а S — площадь этого треугольника.*

Доказательство. Достаточно проследить за изменением углов в вершинах треугольника.

□

6. k-мерные поверхности

6.1. **k-мерные поверхности.** По аналогии с кривыми и поверхностями, рассмотрим три способа задания k-мерных поверхностей в n-мерных пространствах.

1. Аналог графика функции: даны $m = n - k$ функций $x^{k+1} = f^{k+1}(x^1, \dots, x^k), \dots, x^n = f^n(x^1, \dots, x^k)$.

2. Аналог неявной функции: даны m уравнений $F^{k+1}(x^1, \dots, x^n) = 0, \dots, F^n(x^1, \dots, x^n) = 0$, причем ранг матрицы $\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right)$ равен m (т.е. максимален).

3. Параметрическое задание поверхности: имеется k параметров $u^1, \dots, u^k$, и поверхность задается n уравнениями $x^i = \varphi^i(u^1, \dots, u^k)$, $i = 1, \dots, n$, причем требуется, чтобы ранг матрицы $\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}\right)$ был равен k (т.е. максимален).

Лемма 6.1.1. *Эти три способа задания поверхности локально эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство такое же, как в случае 2-мерной поверхности в 3-мерном пространстве (на экзамене нужно уметь рассказать так же подробно). Необходимо воспользоваться теоремами о неявном и об обратном отображении.

□

Пример. Пусть в $\mathbb{R}^4$ поверхность задана уравнениями $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_3^2 + x_4^2 = 1$. Ранг соответствующей матрицы равен 2 в любой точке этой поверхности (проверьте). Эта поверхность 2-мерна, она называется тором и является, как множество, декартовым произведением двух окружностей, каждая в своей двумерной плоскости. На торе можно ввести систему кооринат φ_1, φ_2, для которой легко вычислить метрику, или 1-ю квадратичную форму (вычисляя обычные скалярные произведения производных радиус-вектора). Проверьте, что базис $\mathbf{r}_{\varphi_1}$, $\mathbf{r}_{\varphi_2}$ ортонормирован, поэтому метрика — плоская. Заметим, что обычное вложение тора в $\mathbb{R}^3$ не является плоским.

Пример. Рассмотрим группу $SL_n(\mathbb{R})$ матриц с единичным определителем. Проверьте, что в окрестности любой матрицы из $SL_n(\mathbb{R})$ эта группа является $n^2 - 1$-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^{n^2}$. Сформулируйте и проверьте аналогичное утверждение для $SL_n(\mathbb{C})$.

6.2. **Касательный вектор. Эквивалентность трех определений.** Пусть k-мерная поверхность задана параметрически (т.е. с помощью локальной системы координат): $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^k)$. Как известно из курса анализа, векторы $\mathbf{r}_{u^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ являются касательными к поверхности и составляют линейно независимую систему векторов, порождающую касательную плоскость. Пусть $v^1, \dots, v^k$ — другая локальная система координат. Для того, чтобы векторы $\mathbf{r}_{v^i}$ также образовывали базис касательной плоскости, необходимо и достаточно условие регулярности, т.е. невырожденность матрицы $\left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right)$.

Пусть $\mathbf{a}$ — касательный вектор (в фиксированной точке P поверхности). Тогда $\mathbf{a} = a^i \mathbf{r}_{u^i}$, $\mathbf{a} = \tilde{a}^j \mathbf{r}_{v^j}$. Отсюда, также как в курсе линейной алгебры, заключаем, что $\tilde{a}^j \mathbf{r}_{u^i} \frac{\partial u^i}{\partial v^j} = a^i \mathbf{r}_{u^i}$, т.е. $a^i = \tilde{a}^j \frac{\partial u^i}{\partial v^j}$.

Это позволяет дать тензорное определение касательного вектора:

Определение 6.2.1. Касательный вектор в точке P поверхности — это соответствие, которое каждой локальной системе координат сопоставляет набор чисел a^i (называющихся координатами), причем при переходе от одной локальной системы координат к другой, этот набор чисел меняется по формуле $a^i = \tilde{a}^j \frac{\partial u^i}{\partial v^j}$.

Теперь перейдем к рассмотрению кривых на поверхности. Для задания кривой на поверхности достаточно задать кривую в области D с помощью отображения $\gamma : (\alpha, \beta) \to D$ (тогда кривая на поверхности будет композицией $\mathbf{r} \circ \gamma$). Будем считать, что кривая проходит через точку P (мы отождествляем точку на поверхности и соответствующую ей точку на области D) при нулевом значени параметра: $P = \gamma(0)$. Если $u^1, \dots, u^k$ — локальная система координат, то γ задается функциями $u^1 = u^1(t), \dots, u^k = u^k(t)$.

Определение 6.2.2. Кривые γ_1 и γ_2 называются соприкасающимися в точке P, если $u_1^i(t) - u_2^i(t) = o(t)$, $i = 1, \dots, k$.

Лемма 6.2.3. *Это определение не зависит от локальной системы координат.*

Доказательство. Указание. Воспользуйтесь тем, что $v^j = v^j(P) + C_i^j(P)(u^j - u^j(P)) + o(r)$, где $r^2 = \sum_{i=1}^k (u^i)^2$, $C_i^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i}$.

□

Все кривые, проходящие через P, можно разбить на классы эквивалентности: кривые относятся к одному классу, если они соприкасаются.

Отметим, что здесь не обязательно требовать регулярности кривых. Кривые, не удовлетворяющие условию регулярности в точке P, образуют отдельный класс эквивалентности.

Определение 6.2.4. Касательным вектором в точке P называется класс эквивалентности соприкасающихся кривых.

Лемма 6.2.5. *Два определения касательного вектора эквивалентны.*

Доказательство. Кривой γ сопоставим набор координат $a^i = \dot{u}^i$. Этот набор зависит лишь от класса эквивалентности. При замене координат этот набор чисел ведет себя по правилу замены координат вектора. Обратно, если в системе координат $u^1, \dots, u^k$ задан набор координат a^i, то можно определить кривую формулами $u^i(t) = a^i t$. Эти сопоставления взаимно обратны.

□

Диффернцирования.

Пусть $\mathbf{a}$ — касательный вектор в точке P, $f : D \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Как известно из курса анализа, производная f по направлению вектора $\mathbf{a}$ определяется как $d_{\mathbf{a}} f = \frac{\partial f}{\partial u^i}(P) a^i$. Известно (впрочем, легко проверить), что это определение не зависит от выбора системы координат. Операция вычисления производной по направлению удовлетворяет следующим условиям:

(i) линейность: $d_{\mathbf{a}}(f + \lambda g) = d_{\mathbf{a}} f + \lambda d_{\mathbf{a}} g$;

(ii) правило Лейбница: $d_{\mathbf{a}}(fg) = d_{\mathbf{a}} f \cdot g(P) + f(P) d_{\mathbf{a}} g$.

Таким образом, касательный вектор задает отображение

$$d_{\mathbf{a}} : C^\infty(D) \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющее двум вышеперечисленным условиям.

Определение 6.2.6. Отображение $d : C^\infty(D) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее двум вышеперечисленным условиям, называется дифференцированием в точке P.

Определение 6.2.7. Касательным вектором в точке P называется операция дифференцирования.

Предложение 6.2.8. *Все три определения касательного вектора в точке — эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность первых двух определений уже доказана. Докажем эквивалентность первого (тензорного) и третьего. В одну сторону у нас имеется сопоставление $\mathbf{a} \mapsto d_{\mathbf{a}}$. Обратное сопоставление дает следующая теорема.

□

Теорема 6.2.9. *Каждому дифференцированию d отвечает единственный касательный вектор $\mathbf{a}$, производная по направлению которого совпадает с d, $d = d_{\mathbf{a}}$.*

Доказательство. Легко видеть, что если $f, g \in C^\infty(D)$, $f(P) = g(P) = 0$, то $d(fg) = 0$ по правилу Лейбница. Из него же следует, что $d(1) = d(1 \cdot 1) = d(1) \cdot 1 + 1 \cdot d(1) = 2d(1)$, т.е. $d(1) = 0$, где 1 — функция, тождественно равная 1. По линейности, дифференцирование любой постоянной функции равно нулю.

Для продолжения доказательства нам понадобятся следующие аналоги формулы Тэйлора.

Лемма 6.2.10. *Если $f \in C^\infty(D)$, то $f(u) = f(u_0) + g_i(u)(u^i - u_0^i)$ для некоторых гладких функций g_i.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(u) &= f(u_0) + (f(u) - f(u_0)) = f(u_0) + \int_0^1 \frac{df(u_0 + t(u - u_0))}{dt}\,dt = \\ &= f(u_0) + \int_0^1 \frac{\partial f(u_0 + t(u - u_0))}{\partial u^i}\,dt \cdot (u^i - u_0^i) = f(u_0) + g_i(u)(u^i - u_0^i). \end{aligned}$$

□

Лемма 6.2.11. *Если $f \in C^\infty(D)$, то существуют такие гладкие функции h_{ij}, что $f(u) = f(u_0) + \frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0)(u^i - u_0^i) + h_{ij}(u^i - u_0^i)(u^j - u_0^j)$.*

Доказательство. Заметим, что в предыдущей лемме функции $g_i = \int_0^1 \frac{\partial f(u_0+t(u-u_0))}{\partial u^i}\,dt$ удовлетворяют равенству $g_i(u_0) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0)$ (в этом случае под интегралом — постоянная функция). Применяя предыдущую лемму к функциям $g_i(u)$, получаем $g_i(u) = g_i(u_0) + h_{ij}(u^j - u_0^j)$. Подставля их в формулу из предыдущей леммы, получим требуемое утверждение.

□

Теперь мы готовы доказать теорему. Пусть u_0^i — координаты точки P. Тогда

$$d(f) = d(f(u_0)) + d\Big(\frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0)(u^i - u_0^i)\Big) + d(h_{ij}(u^i - u_0^i)(u^j - u_0^j))$$

(мы воспользовались линейностью). Но $f(u_0)$ — константа, поэтому первое слагаемое равно нулю. Поскольку функции $h_{ij}(u^i - u_0^i)$ и $(u^j - u_0^j)$ обращаются в ноль в точке P, дифференцирование их произведения равно нулю. Остается второе слагаемое, из которого можно вынести постоянные множители:

$$d(f) = d\Big(\frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0)(u^i - u_0^i)\Big) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0) \cdot d(u^i - u_0^i).$$

Обозначим $d(u^i - u_0^i) = a^i$. Тогда $d(f) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0)a^i = d_{\mathbf{a}}f$. Таким образом, мы получили касательный вектор $\mathbf{a}$ с координатами a^i. Правильное их преобразование при заменах координат следует из независимости производной по направлению от системы координат.

□