

ПРОГРАММА
курса линейной алгебры и геометрии
(Казахстанский филиал МГУ, 2017/18 уч. года, лекторы – Л.А.Алания, Д.В.Миллионщиков,
В.М.Мануйлов)

1. Линейное (векторное пространство). Линейное подпространство. Линейная оболочка множества векторов. Арифметическое линейное пространство.
2. Линейная зависимость (независимость) системы векторов. Базис, размерность, инвариантность размерности.
3. Системы координат. Матрица перехода между базисами. Закон преобразования координат при заменах базисов,
4. Дополнение произвольной системы линейно независимых векторов до базиса.
5. Пересечение и сумма пары подпространств. Прямая сумма. Внешняя прямая сумма.
6. Изоморфизм линейных пространств. Изоморфность любого конечномерного линейного пространства арифметическому. Задание линейных подпространств однородными линейными уравнениями.
7. Двойственное пространство. Ковектора. Двойственный базис.
8. Закон преобразования двойственных базисов и координат ковекторов при заменах координат. Второе двойственное пространство. Канонический изоморфизм линейного пространства и его второго двойственного.
9. Евклидово пространство. Эрмитово пространство.
10. Неравенство Коши-Буняковского (евклидово и эрмитово). Неравенство треугольника.
11. Ортогонализация по Граму-Шмидту.
12. Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция на подпространство.
13. Расстояние от конца вектора до подпространства. Экстремальное свойство ортогональной проекции.
14. Угол между векторами. Угол между вектором и подпространством.
15. Матрица Грама. Преобразование матрицы Грама при заменах базисов. Необходимые и достаточные условия на матрицу Грама.
16. Метод наименьших квадратов.
17. Параллелепипед. Объем параллелепипеда и матрица Грама. Ориентированный объем параллелепипеда максимальной размерности в положительном ортонормированном базисе.
18. Линейное отображение. Матрица линейного отображения. Ранг линейного отображения. Преобразование при заменах координат.
19. Линейный оператор. Матрица линейного оператора. Определитель и след линейного оператора.
20. Ядро и образ линейного оператора. Инвариантные подпространства. Ограничение оператора на инвариантное подпространство. Оператор на фактор-пространстве.
21. Невырожденные операторы. Критерии невырожденности.
22. Собственные значения и собственные вектора. Инвариантность собственных подпространств.
23. Операторы проектирования. Операторы отражения.
24. Характеристический многочлен оператора. Связь с собственными значениями. Характеристический многочлен ограничения оператора на инвариантное подпространство.
25. Приведение оператора, все собственные значения которого лежат в основном поле и попарно различны, к диагональной форме.
26. Многочлены от операторов. Аннулирующий многочлен оператора.
27. Минимальный многочлен. Единственность, свойства. Связь с собственными значениями.
28. Теорема Гамильтона-Кэли.
29. Разложение по корневым подпространствам.

30. Теорема Жордана о нормальной форме линейного оператора.
31. Теорема о существовании у линейного оператора в вещественном линейном пространстве одномерного или двумерного инвариантного подпространства.
32. Билинейные и полуторалинейные функции. Правое и левое ядро. Невырожденность.
33. Матрица билинейной (полуторалинейной) функции, ее изменение при заменах базиса. (Косо)симметричные и эрмитовы функции.
34. Ортогональное дополнение относительно (косо)симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение.
35. (Косо)симметричные билинейные и эрмитовы полуторалинейные функции в малых размерностях. Теорема о приведении к нормальному виду (косо)симметричных билинейных функций над полями \mathbf{R} и \mathbf{C} , эрмитовых полуторалинейных функций.
36. Теорема инерции. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра.
37. Квадратичные функции в линейных пространствах, их связь с билинейными. Их канонический вид. Псевдоэвклидово и симплектическое скалярное произведение.
38. Операторы, сохраняющие обобщенное скалярное произведение. Группы $O(p, q)$, $U(p, q)$, $Sp(2m)$. Их описание в малых размерностях.
39. Теорема о приведении квадратичной функции к каноническому виду в эвклидовом пространстве.
40. Обобщенный характеристический многочлен. Теорема об одновременном приведении одной квадратичной функции к каноническому виду, а другой (положительно определенной) – к нормальному виду.
41. Сопряженный оператор. Инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству.
42. Самосопряженные операторы. Их собственные значения. Теорема о приведении к каноническому виду.
43. Кососимметрические операторы. Их собственные значения. Теорема о приведении к каноническому виду.
44. Унитарные операторы. Их собственные значения. Теорема о приведении к каноническому виду.
45. Ортогональные операторы. Их собственные значения. Теорема о приведении к каноническому виду.
46. Условие одновременной диагонализуемости двух операторов.
47. Неотрицательные операторы. Существование и единственность неотрицательного квадратного корня из неотрицательного оператора.
48. Полярное разложение операторов (доказательство существования только для обратимых операторов).
49. Тензоры. Полилинейные функции. Примеры. Линейные операторы как тензоры. Обратная матрица билинейной функции как тензор.
50. Координатное определение тензоров. Базис в пространстве тензоров.
51. Тензорное произведение тензоров.
52. Симметричные и кососимметричные тензоры. Альтернирование.