Лекция 1 (22.02.2021)

5.6. **Алгебра Тёплица.** Пусть $\mathbb{T}$ — единичная окружность, $e_n = e^{2\pi int} = z^n$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{T})$, и пусть $H^2 \subset L^2$ — замкнутое подпространство, порожденное всеми e_n с неотрицательными номерами, $n \geq 0$. Обозначим через $M_g : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ оператор умножения на функцию $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, $M_g(f) = gf$, $f \in L^2(\mathbb{T})$. Пусть $P_{H^2} \in \mathbb{B}(H)$ обозначает проектор на H^2.

Определим оператор T_g, где $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, формулой $T_g(f) = P_{H^2}gf$.

Если $g(z) = z$, то оператор T_g может быть отождествлен с оператором одностороннего сдвига в l^2 (если вспомнить, что l^2 и $L^2(\mathbb{T})$ унитарно эквивалентны страндартным образом).

Обозначим через $\|T\|_{ess}$ *существенную* норму оператора T как норму его класса эквивалентности в алгебре Калкина. Легко видеть, что $\|T\|_{ess} \geq \alpha$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое бесконечномерное замкнутое подпространство V, что $\|T\xi\| \geq (\alpha - \varepsilon)\|\xi\|$ для любого $\xi \in V$.

Лемма 5.38. *Пусть $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Тогда $T_{\overline{g}} = T_g^*$ и $\|T_g\|_{ess} = \|T_g\| = \|g\|_\infty$.*

Доказательство. Первое утверждение является простым упражнением, поэтому сразу перейдем ко второму. Очевидно, что $\|T_g\|_{ess} \leq \|T_g\| \leq \|g\|_\infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда, в силу плотности многочленов в $L^2(\mathbb{T})$, найдется такойй многочлен $p(z) = \sum_{k=-N}^{N} a_k z^k$, что $\|p\|_2 = 1$ и $\|gp\|_2 > \|g\|_\infty - \varepsilon$. При любом $n > N$, многочлен $z^n p(z)$ лежит в H^2, и $\|z^n p\|_2 = 1$.

Пусть $gp = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k e_k$. Тогда

$$T_g(z^n p) = P_{H^2}(z^n gp) = \sum_{-n}^{\infty} b_k e_{k+n},$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \|T_g(z^n p)\|_2 = \|gp\|_2 > \|g\|_\infty - \varepsilon,$$

следовательно, $\|T_g\|_{ess} \geq \|g\|_\infty$. □

Положим $H^\infty = H^2 \cap L^\infty(\mathbb{T})$.

Лемма 5.39. *Если $h \in H^\infty$, то H^2 — инвариантное подпространство для оператора M_h. Для любых функций $h \in H^\infty$ и $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ выполнены равенства $T_g T_h = T_{gh}$ и $T_{\overline{h}} T_g = T_{\overline{h}g}$.*

Доказательство. Пусть $h = \sum_{n\geq 0} h_n z^n$. Тогда $M_h z^k = \sum_{n\geq 0} h_n z^{n+k} \in H^2$ для любого $k \geq 0$, поэтому $M_h(H^2) \subset H^2$. Поэтому $T_h f = hf$ для любой функции $f \in H^2$, и, значит, $T_g T_h f = T_g hf = P_{H^2} ghf = T_{gh} f$. □

Лемма 5.40. *Коммутатор $T_z T_g - T_g T_z$ является компактным оператором ранга не больше 1 для любой функции $g \in L^\infty(\mathbb{T})$.*

Доказательство. Поскольку $z \in H^\infty$, имеет место равенство $T_g T_z = T_{gz}$. Посмотрим на оператор $T_z T_g - T_{gz}$: его ограничение на H^2 равно

$$P_{H^2} M_z P_{H^2} M_g P_{H^2} - P_{H^2} M_z M_g P_{H_2} = -P_{H^2} M_z P_{H^2}^{\perp} M_g P_{H^2}.$$

Но оператор $P_{H^2} M_z P_{H^2}^{\perp}$ — ранга 1 (он равен $e_0(e_{-1}, \cdot)$). □

Следствие 5.41. *Для любых функций $g \in L^\infty$ и $f \in C(\mathbb{T})$ операторы $T_f T_g - T_{fg}$ и $T_g T_f - T_{gf}$ компактны.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и такой многочлен $p = \sum_{k=-N}^{N} a_k z^k$, что $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$. Ясно, что $T_g T_f - T_{gf} = P_{H^2} M_g P_{H^2}^\perp M_f P_{H^2}$, поэтому

$$\|T_f T_g - T_{fg} - T_p T_g + T_{pg}\| = \|P_{H^2} M_g P_{H^2}^\perp (M_f - M_p) P_{H^2}\| \le \|M_f - M_p\| = \|f - p\|_\infty < \varepsilon.$$

Достаточно установить компактность $P_{H^2}^\perp M_p P_{H^2}$, которая следует из того, что образ $P_{H^2}^\perp M_p P_{H^2}$ имеет размерность $\le N$.

Утверждение про второй оператор доказывается аналогично (проще доказывать компактность сопряженного к нему оператора). □

Определение 5.42. Унитальная C*-algebra $C^*(1, T_z)$, порожденная оператором T_z, называется *алгеброй Тёплица.* Положим $\mathcal{T} = \{T_f + K : f \in C(\mathbb{T}), K \in \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T}))\}$.

Теорема 5.43. *(1) $\mathcal{T} = C^*(1, T_z)$;*

(2) Эта алгебра неприводима и содержит $\mathbb{K}(H^2)$ в качестве единственного минимального идеала;

(3) $\mathcal{T}/\mathbb{K}(H^2) \cong C(\mathbb{T})$, и отображение $s : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}$, $s : f \mapsto T_f$, является непрерывным поднятием фактор-отображения $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathbb{K}(H^2)$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathcal{T}'$ — проектор из коммутанта алгебры Тёплица. Он коммутирует с T_z и с T_z^*, следовательно, и с $e_0 = 1 - T_z T_z^*$. Тогда pe_0 — проектор ранга ≤ 1, поэтому он равен либо e_0, либо 0. Поскольку $pe_n = pT_z^n e_0$, получаем, что $pe_n = e_n$, если $pe_0 = e_0$, и $pe_n = 0$, если $pe_0 = 0$. То есть, p равен либо 1, либо 0, откуда вытекает неприводимость $\mathcal{T}$.

Так как $\mathcal{T}$ содержит ненулевой компактный оператор, она содержит все компактные операторы, $\mathbb{K}(H^2)$ (следует из неприводимости, Следствие 5.5). Из плотности многочленов в $C(\mathbb{T})$ следует, что $\mathcal{T}$ содержит все T_f, $f \in C(\mathbb{T})$.

Пусть $J \subset \mathcal{T}$ — ненулевой идеал. По второму утверждению Леммы 4.39, J неприводим. Если $a \in J$, $a \ne 0$, то существует такой компактный оператор $k \in \mathbb{K}(H^2)$, что $ak \ne 0$. При этом $ak \in J$. По Следствию 5.5, $J \supset \mathbb{K}(H^2)$, т.е. идеал компактных операторов — наименьший.

Поскольку $T_f^* = T_{\overline{f}}$, $f \in C(\mathbb{T})$, $\mathcal{T}$ является $*$-алгеброй. Проверим ее замкнутость. Возьмем фундаментальную последовательность $\{T_{f_n} + K_n\}$, $f_n \in C(\mathbb{T})$, $K_n \in \mathbb{K}(H^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \|T_{f_n} - T_{f_m}\|_{ess} \le \|T_{f_n} + K_n - (T_{f_m} + K_m)\|,$$

поэтому последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна. Но тогда последовательность $\{K_n\}$ также фундаментальна. Так как и $C(\mathbb{T})$, и $\mathbb{K}(H^2)$ замкнуты по норме, $\mathcal{T}$ также замкнута. А так как $\mathcal{T}$ содержит T_z и замкнута, то она совпадает с $C^*(1, T_z)$.

Обозначим через $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathbb{K}(H^2)$ $*$-гомоморфизм факторизации. Фактор-алгебра очевидно коммутативна. Из Леммы 5.38 следует, что композиция $\pi \circ s : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}/\mathbb{K}(H^2)$ — изометрия. Она также является $*$-гомоморфизмом, поэтому она — $*$-изоморфизм.

□

Определение 5.44. Оператор $T \in \mathbb{B}(H)$ называется *фредгольмовым*, если его класс эквивалентности $\dot{T}$ в алгебре Калкина является обратимым.

Следствие 5.45. *Оператор T_f фредгольмов тогда и только тогда, когда f не принимает значение 0.*

Лемма 5.46. *Пусть $T \in \mathbb{B}(H)$ фредгольмов. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если $\|T - S\| < \varepsilon$, то S также фредгольмов, и для любого $K \in \mathbb{K}(H)$ оператор $T + K$ также фредгольмов.*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Для доказательства первого, заметим, что $\|\dot{T} - \dot{S}\| = \|T - S\|_{ess} \leq \|T - S\| < \varepsilon$, и ε нужно выбрать так, чтобы $\dot{S}$ был бы обратимым (множество обратимых элементов открыто).

□

Лемма 5.47. *Оператор $T \in \mathbb{B}(H)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда существует такой оператор $S \in \mathbb{B}(H)$, что $TS - 1$ и $ST - 1$ компактны.*

Доказательство. Почти очевидно: фредгольмовость означает, что в алгебре Калкина существует обратный элемент $\dot{S}$, т.е. выполнены равенства $\dot{T}\dot{S} = 1$ и $\dot{S}\dot{T} = 1$.

□

Теорема 5.48 (Аткинсон). *Следующие условия равносильны:*

(1) Оператор T фредгольмов;
(2) Образ $\operatorname{Im} T$ оператора T замкнут, и подпространства $\operatorname{Ker} T$ и $\operatorname{Coker} T = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ конечномерны.

Доказательство. Если T фредгольмов, то существует оператор S и компактный оператор K, для которых имеет место равенство $ST = 1 + K$. Если $\xi \in \operatorname{Ker} T$, то $ST\xi = \xi + K\xi = 0$, т.е. ξ лежит в собственном подпространстве компактного оператора, которое обязано быть конечномерным. Таким образом, $\operatorname{Ker} T$ конечномерно. Аналогично, $\operatorname{Ker} T^*$ конечномерно.

Для доказательства замкнутости $\operatorname{Im} T$ аппроксимируем K оператором F конечного ранга: пусть $\|F - K\| < r$. Если $\xi \in \operatorname{Ker} F$, то

$$\begin{aligned} \|S\| \cdot \|T\xi\| &\geq \|ST\xi\| = \|\xi + K\xi\| = \|(\xi + F\xi) + (K - F)\xi\| = \|\xi + (K - F)\xi\| \\ &\geq \|\xi\| - \|K - F\|\|\xi\| \geq (1 - r)\|\xi\|. \end{aligned}$$

Если $r < 1$, то оператор T ограничен снизу на $\operatorname{Ker} F$, откуда следует, что $T(\operatorname{Ker} F)$ замкнуто. Так как $(\operatorname{Ker} F)^{\perp} = \operatorname{Im} F^*$ конечномерно, то $T((\operatorname{Ker} F)^{\perp})$ тоже конечномерно, следовательно, замкнуто. Поэтому $\operatorname{Im} T = T(H) = T(\operatorname{Ker} F \oplus (\operatorname{Ker} F)^{\perp})$ замкнуто. Кроме того, $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp} = \operatorname{Coker} T$ конечномерно.

Обратно, рассмотрим разложение $H = \operatorname{Ker} T \oplus (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. Рассмотрим ограничение оператора T на $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. Это ограничение является биекцией на образ, т.е. на $\operatorname{Im} T$, поэтому, по теореме об открытом отображении, обратимо. Определим оператор S на $\operatorname{Im} T$ как обратный к $T|_{(\operatorname{Ker} T)^{\perp}}$ и как нулевой на $(\operatorname{Im} T)^{\perp}$. Тогда $1 - TS$ — проектор на $(\operatorname{Im} T)^{\perp}$, а $1 - ST$ — проектор на $\operatorname{Ker} T$, т.е. операторы конечного ранга, следовательно, $\dot{T}$ обратим в алгебре Калкина.

□

Определение 5.49. Разность $\dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Coker} T = \operatorname{ind} T$ называется *индексом* фредгольмового оператора T.

Индекс не меняется при малых деформациях, а значит, и при гомотопиях:

Теорема 5.50. *Пусть T — фредгольмов оператор. Тогда существует $\varepsilon > 0$, для которого из условия $\|T - S\| < \varepsilon$ следует, что* $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} S$.

Доказательство. Рассмотрим два разложения H в прямую сумму: $H = \operatorname{Ker} T \oplus (\operatorname{Ker} T)^\perp$ и $H = (\operatorname{Im} T)^\perp \oplus \operatorname{Im} T$. Первые слагаемые в обоих разложениях конечномерны. Запишем оператор T в виде двумерной матрицы по отношению к этим двум разложениям H: $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ (здесь нули — отображения $\operatorname{Ker} T$ в $(\operatorname{Im} T)^\perp$, $\operatorname{Ker} T$ в $\operatorname{Im} T$ и $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ в $(\operatorname{Im} T)^\perp$, а оператор $T_1 : (\operatorname{Ker} T)^\perp \to \operatorname{Im} T$ — обратимый).

Запишем теперь оператор S в таком же виже (т.е. по отношению к тем же двум разложениям H): $S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & T_1 + a_{22} \end{pmatrix}$, где все a_{ij} малы. Возьмем ε таким, чтобы оператор $T_1 + a_{22}$ был бы обратим (напомним, что T_1 обратим). Тогда положим $X = -(T_1 + a_{22})^{-1} a_{21}$ и заметим, что $S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & T_1 + a_{22} \end{pmatrix}$ (нам неважно, чему именно равны b_{ij}, важно, что слева внизу ноль, и что $b_{22} = a_{22}$). Аналогично, взяв $Y = -b_{12}(T_1 + a_{22})^{-1}$, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & T_1 + a_{22} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

В левой части (16) записано произведение трех операторов, два из которых обратимы, поэтому ядро и коядро этого произведения имеют те же размерности, что и ядро и коядро оператора S. Значит, $\operatorname{ind} S$ равен индексу правой части, который равен сумме индексов диагональных элементов, т.е. $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} c_{11} + \operatorname{ind}(T_1 + a_{22})$. Из обратимости $T_1 + a_{22}$ следует, что $\operatorname{ind}(T_1 + a_{22}) = 0$, т.е. $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} c_{11}$, где $c_{11} : \operatorname{Ker} T \to (\operatorname{Im} T)^\perp$ — оператор, отображающий одно конечномерное пространство в другое (разных размерностей). Для него $\dim \operatorname{Ker} c_{11} = \dim \operatorname{Ker} T - \operatorname{rank} c_{11}$, $\dim \operatorname{Im} c_{11} = \dim \operatorname{Im} T - \operatorname{rank} c_{11}$, т.е. $\operatorname{ind} c_{11} = \operatorname{ind} T$.

□

Задача 64. Докажите, что если $T : [0,1] \to \mathbb{B}(H)$ — непрерывное отображение отрезка в множество фредгольмовых операторов, то $\operatorname{ind} T(0) = \operatorname{ind} T(1)$.

Рассмотрим более подробно функции $f \in C(\mathbb{T})$, не принимающие значение 0, т.е. те, для которых оператор T_f фредгольмов. Они определяют петли на комплексной плоскости с выколотой точкой 0, и характеризуются, с точностью до гомотопии, так называемым числом вращения, или степенью. Если $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то функция g, заданная формулой $g(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ определяет отображение окружности в себя, т.е. элемент фундаментальной группы окружности. Этот элемент называется числом вращения для f и обозначается $\operatorname{wind} f$.

Теорема 5.51. *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$ нигде не обращается в 0. Тогда* $\operatorname{ind}(T_f) = -\operatorname{wind} f$.

Доказательство. Из первого утверждения Теоремы 5.50 следует, что индекс не меняется при малых деформациях, следовательно, он является гомотопическим инвариантом (при условии, что деформация не выходит за пределы множества фредгольмовых операторов). Поэтому достаточно проверить утверждение теоремы для случая $f = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Но $\operatorname{ind} T_{z^n} = -n$.

□