## Лекция 10 (26.04.2021)

### 6.5. **Эквивалентность проекторов в бесконечномерной матричной алгебре.**

**Определение 6.39.** Пусть $M_n(A) \hookrightarrow M_{n+1}(A)$ — вложение в левый верхний угол и дополнение нулями. Положим $M_\infty(A) := \cup_n M_n(A)$. Это — инволютивная алгебра, не являющаяся полной.

**Определение 6.40.** Два проектора $p, q \in M_\infty(A)$ называются *эквивалентными* $p \sim q$, если найдется такой $v \in M_\infty(A)$, что $p = v^*v$ и $q = vv^*$. Обозначим через $[.]$ соответствующие классы, а их множество — через

$$V(A) := \{[p] \,:\, p = p^* = p^2 \in M_\infty(A)\}.$$

Определим сложение классов следующим образом:

$$[p] + [q] := [\operatorname{diag}(p, q)] = [p' \oplus q'],$$

если $p' \sim p$, $q' \sim q$, $p' \perp q'$.

**Замечание 6.41.** Пусть $p, q \in M_n(A)$ и $p \sim q$ в $M_\infty(A)$. Тогда $v$, фигурирующий в определении, удовлетворяет $v = vv^*vv^*v = qvp$, так что $v \in M_n(A)$ и в этом случае имеем эквивалентность $p$ и $q$ в $M_n(A)$. Во-вторых, заметим, что в силу предложений 6.25 и 6.26 аналоги разных типов эквивалентности проекторов в алгебре $M_\infty(A)$ дают одинаковые эквивалентности.

**Предложение 6.42.** *Для всякой $C^*$-алгебры $A$, $V(A)$ — абелева полугруппа с единицей $0 = [0]$ (используем аддитивную запись).*

*Для всякого морфизма $C^*$-алгебр $\alpha : A \to B$ индуцированное отображение $\alpha_*$ задается как*

$$\alpha_* : V(A) \to V(B), \qquad \alpha_*[\|a_{ij}\|] := [\|\alpha(a_{ij})\|],$$

*и является корректно определенным гомоморфизмом полугрупп.*

*Соответствие $A \mapsto V(A)$, $\alpha \mapsto \alpha_*$ является ковариантным функтором из категории $C^*$-алгебр в категорию абелевых полугрупп.*

*Доказательство.* Первое утверждение очевидно.

Поскольку $\alpha$ — гомоморфизм $C^*$-алгебр, то на уровне матриц он переводит самосопряженные матрицы в самосопряженные и идемпотенты — в идемпотенты, в частности, проекторы — в проекторы. То же самое для $v$ дает сохранение эквивалентности. Очевидно, что прямая сумма сохраняется. Таким образом, $\alpha_*$ — корректно определенный гомоморфизм.

Остается проверить функториальность на морфизмах: если $\beta : B \to C$ — другой морфизм, то $\beta_* \circ \alpha_* = (\beta \circ \alpha)_*$, что проверяется сразу на уровне представителей. Наконец, тождественный морфизм $\mathrm{Id} : A \to A$ индуцирует тождественное отображение $V(A)$. $\square$

**Пример 6.43.** 1. Пусть $A = \mathbb{C}$. Любой элемент $V(\mathbb{C})$ задается проектором в достаточно большой матричной алгебре $M_n(\mathbb{C})$. Проекторы в $M_n(\mathbb{C})$ эквивалентны в точности тогда, когда их образы имеют одинаковую размерность, так что $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Поскольку $M_n(M_k) = M_{nk}$, то из предыдущего примера следует, что $V(M_k) = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ — алгебра компактных операторов, а $B = B(\mathcal{H})$ — алгебра всех ограниченных операторов. Тогда $M_n(\mathcal{K}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H}^n) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$ и $M_n(B(\mathcal{H})) \cong B(\mathcal{H})$. В $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ всякий проектор конечномерен, а в $B(\mathcal{H})$ имеются бесконечномерные проекторы. Проекторы эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность образов. Чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать ортонормированный базис в образе каждого из проекторов. При этом частичные изометрии, задающие эквивалентность в случае $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, являются компактными операторами. Таким образом,

$$V(\mathcal{K}) = \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad V(B) = \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}.$$

4. Пусть $A = B/\mathcal{K}$ (алгебра Калкина). По модулю $\mathcal{K}$ все конечномерные проекторы в $B$ эквивалентны. Таким образом, $V(B/\mathcal{K}) = \{0, \infty\}$.

## 7. Группа $K_0(A)$

Пусть $GV(A)$ — группа Гротендика $V(A)$, а

$$\iota_A : V(A) \to GV(A), \qquad \iota_A[p] := [p] - [0],$$

— канонический гомоморфизм. Он инъективен тогда и только тогда, когда $V(A)$ допускает сокращения (поскольку в этом случае $K = H = V(A)$ имеет единицу и $K^3 = H^3 = H = V(A)$).

Таким образом, определен ковариантный функтор из категории алгебр в категорию групп (следствие 6.36 и предложение 6.42).

**Определение 7.1.** Пусть $\pi : A^+ \to \mathbb{C}$ — естественное отображение. Определим $K$-группу

$$K_0(A) := \mathrm{Ker}(\pi_* : GV(A^+) \to \mathbb{Z}) \subset GV(A^+).$$

По-прежнему имеем $\iota_A : V(A) \to K_0(A)$, $[p] \mapsto [p] - [0]$.

**Пример 7.2.** Чтобы подчеркнуть роль присоединения единицы, рассмотрим $A = C_0(\mathbb{R}^2)$. Ни $A$, ни $M_\infty(A)$, не имеют нетривиальных проекторов, но как мы увидим из теоремы периодичности Ботта, $K_0(A) \cong \mathbb{Z}$.

**Предложение 7.3.** *Для всякой $C^*$-алгебры $A$ имеется расщепляющаяся точная последовательность*

$$0 \to K_0(A) \xrightarrow{i_A} GV(A^+) \underset{i_*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z} \to 0$$

*(т.е. $\pi_* \circ i_* = \mathrm{Id}_\mathbb{Z}$ ). В частности, $GV(A^+) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$.*

*Доказательство.* С точки зрения точности, единственное, что не следует из определения — сюръективность $\pi_*$. Но это следует из того, что $\pi \circ i = \mathrm{Id}_\mathbb{C}$. Это же дает и расщепление.

Разложение — хорошо известный факт для расщепляющихся последовательностей. Напомним его. Мы докажем, что $GV(A^+) = i_A(K_0(A)) \oplus i_*(\mathbb{Z})$. Разложим любой элемент $g \in GV(A^+)$ следующим образом:

$$g = (g - i_* \circ \pi_*(g)) + i_* \circ \pi_*(g).$$

Тогда $\pi_*(g - i_* \circ \pi_*(g) = \pi_*(g) - \pi_*(g) = 0$, так как $\pi_* \circ i_* = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. Поэтому для некоторого $s \in K_0(A)$ имеем $i_A(s) = g - i_* \circ \pi_*(g)$. Так что $g = i_A(s) + i_*(\pi_*(g))$ и $GV(A^+) = i_A(K_0(A)) + i_*(\mathbb{Z})$. Остается показать, что $i_A(K_0(A)) \cap i_*(\mathbb{Z}) = 0$. Пусть $b \in i_A(K_0(A)) \cap i_*(\mathbb{Z})$, т.е. $b = i_A(c) = i_*(z)$, $c \in K_0(A)$, $z \in \mathbb{Z}$. Тогда $z = \pi_* \circ i_*(z) = \pi_* \circ i_A(c) = 0$, откуда $b = i_*(z) = 0$. □

**Предложение 7.4.** *Соответствие $A \mapsto K_0(A)$ является ковариантным функтором из категории $C^*$-алгебр в категорию абелевых групп. При этом морфизму $\alpha : A \to B$ соответствует гомоморфизм, заданный формулой*

$$\alpha_*([(x_{ij})] - [(y_{ij})]) := [(\alpha^+ x_{ij})] - [(\alpha^+ y_{ij})],$$

*где $(x_{ij})$ и $(y_{ij})$ — матрицы проекторов в $M_\infty(A^+)$, а $\alpha^+ : A^+ \to B^+$ — унитальный морфизм, определенный по формуле $\alpha^+(a + \lambda) := \alpha(a) + \lambda$ (см. предложение* **??**).

*Доказательство.* В силу предложения 6.42 и функториальности перехода к группе Гротендика мы имеем функториальность на уровне $GV(A)$. Для $K_0(A)$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "i_A"] & GV(A^+) \arrow[r, "\pi_*^A"] \arrow[d, "\alpha_*^+"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
0 \arrow[r] & K_0(B) \arrow[r, "i_B"] & GV(B^+) \arrow[r, "\pi_*^B"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

с точными строками и коммутативным правым квадратом. Тогда для любого элемента $\gamma \in K_0(A)$ имеем

$$\pi_*^B \alpha_*^+ i_A(\gamma) = \pi_*^A i_A(\gamma) = 0.$$

Это означает, что $\alpha_*^+$ ограничивается на $K_0(A)$ и определяет требуемый гомоморфизм. Очевидно, что сам $\alpha_*^+$ задается формулой из формулировки теоремы. □

**Предложение 7.5.** *Пусть $\pi_k : A_1 \oplus A_2$, $k = 1, 2$ — проекции на слагаемые ортогональной прямой суммы $C^*$-алгебр $A_1$ и $A_2$. Тогда индуцированные отображения $\pi_{k*}$ задают изоморфизмы*

$$\pi_{1*} \oplus \pi_{2*} : V(A_1 \oplus A_2) \cong V(A_1) \oplus V(A_2),$$

$$\pi_{1*} \oplus \pi_{2*} : GV(A_1 \oplus A_2) \cong GV(A_1) \oplus GV(A_2),$$

$$\pi_{1*} \oplus \pi_{2*} : K_0(A_1 \oplus A_2) \cong K_0(A_1) \oplus K_0(A_2),$$

*Доказательство.* Пусть $p_1$ и $p_2$ — проекторы в $M_\infty(A_1)$ и $M_\infty(A_2)$, соответственно. Тогда $p_1 \oplus p_2$ (где прямая сумма берется для каждого матричного элемента) — проектор в $M_\infty(A_1 \oplus A_2)$ и

$$\begin{aligned}
\pi_{1*} \oplus \pi_{2*}[p_1 \oplus p_2] &= \pi_{1*}[p_1 \oplus p_2] \oplus \pi_{2*}[p_1 \oplus p_2] = \\
&= [\pi_1(p_1 \oplus p_2)] \oplus [\pi_2(p_1 \oplus p_2)] = [p_1] \oplus [p_2].
\end{aligned}$$

Это показывает, что $\pi_{1*} \oplus \pi_{2*}$ в первой строчке (для $V(A)$) сюръективен. Пусть теперь $p \in M_\infty(A_1 \oplus A_2)$. Тогда он имеет вид $p_1 \oplus p_2$, где $p_1$ и $p_2$ — проекторы в $M_\infty(A_1)$ и $M_\infty(A_2)$, соответственно. Предыдущая выкладка показывает, что $p_1$ и $p_2$ эквивалентны нулю, т.е. для достаточно большого $n$ найдутся такие элементы (частичные изометрии) $v_1 \in M_n(A_1)$ и $v_2 \in M_n(A_2)$, что $v_1^* v_1 = p_1$, $v_1 v_1^* = 0$, $v_2^* v_2 = p_2$, $v_2 v_2^* = 0$.

Тогда $p = p_1 \oplus p_2$ эквивалентен нулю при помощи $v_1 \oplus v_2$. Таким образом, имеем изоморфизм для $V(A)$. Переход к группам Гротендика функториален (по отношению к морфизмам полугрупп — в данном случае морфизм не индуцирован отображением алгебр), поэтому имеем изоморфизм для $GV(A)$.

С $K_0$ ситуация сложнее. Более того, само отображение пока не определено. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A_1 \oplus A_2) \arrow[r, "i_A"] \arrow[dd] \arrow[dr, "s"] & GV((A_1 \oplus A_2)^+) \arrow[r, "\pi_*^{A_1 \oplus A_2}"] \arrow[d, "\mu_*"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\Delta_*"] \\
 & & GV(A_1^+ \oplus A_2^+) \arrow[r, "\nu_*"] \arrow[d, "r"', "\cong"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
0 \arrow[r] & K_0(A_1) \oplus K(A_2) \arrow[r, "i_{A_1} \oplus i_{A_2}"] & GV(A_1^+) \oplus GV(A_2^+) \arrow[r, "\pi_*^{A_1} \oplus \pi_*^{A_2}"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

Чтобы определить отображение (левая вертикальная стрелка) и доказать его изоморфность, мы проделаем следующие шаги:

1) проверим коммутативность треугольника и двух правых квадратов,

2) докажем точность средней строки, т.е. что $s$ — вложение и $\operatorname{Im} s = \operatorname{Ker} \nu_*$,

3) проверим, что образ $r \circ s$ содержится в образе $i_{A_1} \oplus i_{A_2}$ (что, наконец, задаст искомое отображение),

4) применим к средней и нижней строке диаграммы лемму о пяти гомоморфизмах (лемма 7.6) и получим изоморфность этого отображения.

Начнем с того, что аккуратно определим участвующие отображения. Понимая, что $\mathbb{Z}$ — на самом деле $GV(\mathbb{C})$, а $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = GV(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = GV(\mathbb{C}) \oplus GV(\mathbb{C})$ (по доказанной части теоремы). Гомоморфизмы правого верхнего квадрата определены отображениями алгебр:

$$\pi^{A_1 \oplus A_2} : (A_1 \oplus A_2)^+ \to \mathbb{C}, \qquad (a_1, a_2, \lambda) \mapsto \lambda,$$

$$\Delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \qquad \lambda \mapsto (\lambda, \lambda),$$

$$\mu : (A_1 \oplus A_2)^+ \to A_1^+ \oplus A_2^+, \qquad (a_1, a_2, \lambda) \mapsto (a_1, \lambda, a_2, \lambda),$$

$$\nu : A_1^+ \oplus A_2^+ \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \qquad (a_1, \lambda_1, a_2, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1, \lambda_2).$$

(Сомнения может вызвать только мультипликативность $\mu$. Проверим:

$$\begin{aligned}
\mu((a_1, a_2, \lambda)(b_1, b_2, \tau) &= \mu(a_1 b_1 + \tau a_1 + \lambda b_1, a_2 b_2 + \tau a_2 + \lambda b_2, \lambda\tau) = \\
&= (a_1 b_1 + \tau a_1 + \lambda b_1, \lambda\tau, a_2 b_2 + \tau a_2 + \lambda b_2, \lambda\tau),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(a_1, a_2, \lambda)\, \mu(b_1, b_2, \tau) &= (a_1, \lambda, a_2, \lambda)\,(b_1, \tau, b_2, \tau) = \\
&= (a_1 b_1 + \tau a_1 + \lambda b_1, \lambda\tau, a_2 b_2 + \tau a_2 + \lambda b_2, \lambda\tau),
\end{aligned}$$

Отсюда сразу следует коммутативность правого верхнего треугольника на уровне алгебр, а значит, и на уровне групп Гротендика. Гомоморфизм $s$ определен как композиция $\mu_* \circ i_A$ и треугольник коммутативен по определению. Наконец, $r$ — изоморфизм из доказанной части данного предложения.

1) Осталось проверить коммутативность правого нижнего квадрата, что достаточно сделать на уровне матричных элементов $M_\infty$, что очевидно. (Можно также показать, что для $GV$ доказанный изоморфизм $\pi_{1*} \oplus \pi_{2*}$ функториален относительно отображений $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$.)

2) Прежде всего, очевидно, что $\nu_* \circ s = 0$ в силу коммутативности. Далее, рассмотрим

$$\mu' : A_1^+ \oplus A_2^+ \to (A_1 \oplus A_2)^+, \qquad (a_1, \lambda_1, a_2, \lambda_2) \mapsto (a_1, a_2, \lambda_1),$$

так что $\mu' \circ \mu = \mathrm{Id}$. Переходя к $GV$, убеждаемся в инъективности $\mu_*$, а следовательно, и $s$. Рассмотрим теперь $(a_{ij}^1, \lambda_{ij}^1, a_{ij}^2, \lambda_{ij}^2)$ и $(b_{ij}^1, \tau_{ij}^1, b_{ij}^2, \tau_{ij}^2)$ из $M_\infty(A_1^+ \oplus A_2^+)$, так что их разность дает класс $x \in GV(A_1^+ \oplus A_2^+)$. Если класса $x$ при $\nu_*$ равен нулю, то имеются такие частичные изометрии $v_1$ и $v_2$ в комплексных матрицах, что

$$(\lambda_{ij}^1) = v_1^* v_1, \quad (\tau_{ij}^1) = v_1 v_1^*, \qquad (\lambda_{ij}^2) = v_2^* v_2, \quad (\tau_{ij}^2) = v_2 v_2^*.$$

Поэтому матрица $(a_{ij}^1, \tau_{ij}^1, a_{ij}^2, \tau_{ij}^2) \in M_\infty(A_1^+ \oplus A_2^+)$ эквивалентна $(a_{ij}^1, \lambda_{ij}^1, a_{ij}^2, \lambda_{ij}^2)$ (при помощи частичной изометрии $(\mathrm{Id}, v_1, \mathrm{Id}, v_2)$). Значит, $x$ может быть представлен разностью $(a_{ij}^1, 0, a_{ij}^2, 0)$ и $(b_{ij}^1, 0, b_{ij}^2, 0)$. А эта разность уже лежит в образе $\mu$. Итак, $x$ лежит в образе $\mu_*$, а значит, и $s$.

3) Надо проверить, что если $\pi_*^{A_1 \oplus A_2}(x) = 0$, то и $\pi_*^{A_1} \oplus \pi_*^{A_2} \circ r \circ \mu_*(x) = 0$. Это сразу следует из коммутативности правых квадратов.

4) Все готово для применения леммы о пяти гомоморфизмах. $\square$

**Лемма 7.6** (о пяти гомоморфизмах)**.** *Пусть задана коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd}
G_5 \arrow[r, "\alpha_5"] \arrow[d, "\gamma_5"'] & G_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"'] & G_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & G_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] \\
H_5 \arrow[r, "\beta_5"] & H_4 \arrow[r, "\beta_4"] & H_3 \arrow[r, "\beta_3"] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"] & H_1
\end{tikzcd}$$

*в которой каждая строка точна и $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_4$ и $\gamma_5$ — изоморфизмы. Тогда $\gamma_3$ — тоже изоморфизм.*

*Доказательство.* Покажем, что $\gamma_3$ является мономорфизмом. Пусть $\gamma_3(g_3) = 0$. Тогда $\gamma_2\alpha_3(g_3) = \beta_3\gamma_3(g_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_3(g_3) = 0$. Значит, существует такое $g_4 \in G_4$, что $\alpha_4(g_4) = g_3$. Тогда $\beta_4\gamma_4(g_4) = 0$ и существует такой элемент $h_5 \in H_5$, что $\beta_5(h_5) = \gamma_4(g_4)$. Рассмотрим такой элемент $g_5 \in G_5$, что $\gamma_5(g_5) = h_5$. Тогда $\gamma_4(\alpha_5(g_5)) = \gamma_4(g_4)$ и, значит, $g_4 = \alpha_5(g_5)$. Следовательно, $g_3 = \alpha_4\alpha_5(g_5) = 0$.

Покажем,что $\gamma_3$ — эпиморфизм. Пусть $h_3 \in H_3$. Существует такой элемент $g_2 \in G_2$, что $\gamma_2(g_2) = \beta_3(h_3)$. Тогда $\gamma_1\alpha_2(g_2) = \beta_2\beta_3(h_3) = 0$. Следовательно, $\alpha_2(g_2) = 0$, и существует такое $g_3 \in G_3$, что $\alpha_3(g_3) = g_2$. Тогда $\beta_3(h_3 - \gamma_3(g_3)) = 0$ и существует такое $h_4 \in H_4$, что $\beta_4(h_4) = h_3 - \gamma_3(g_3)$. Пусть элемент $g_4 \in G_4$ таков, что $\gamma_4(g_4) = h_4$. Тогда $g_3 + \alpha_4(g_4) \in G_3$ и $\gamma_3(g_3 + \alpha_4(g_4)) = \gamma_3(g_3) + \beta_4(h_4) = h_3$. $\square$