Лекция 11 (3.05.2021)

Предложение 7.7. *Если A имеет единицу, то $K_0(A) = GV(A)$.*

Доказательство. В этом случае $A^+ \cong A \oplus \mathbb{C}$, так что по предложению 7.5 $GV(A^+) \cong GV(A) \oplus \mathbb{Z}$. В силу предложения 7.3 $GV(A^+) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$. □

Задача 87. Докажите, что
1) $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$,
2) $K_0(B(\mathcal{H})) = 0$,
3) $K_0(B(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})) = 0$,
4)* $K_0(A) = \mathbb{R}$, если A — фактор типа II_1 (использовать след),
5)* $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}_{n-1}$, где $\mathcal{O}_n$ — алгебра Кунца.

Лемма 7.8. *Пусть p — проектор в $M_k(A^+)$, причем $\pi_{\mathbb{C}}(p)$ эквивалентен p_n в $M_k = M_k(\mathbb{C})$, где p_n — проектор на первые n базисных векторов, т.е. матрица вида*

$$p_n = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline 0 & & & 0 \end{array}\right).$$

Тогда p унитарно эквивалентен в $M_k(A^+)$ такому проектору q, что $\pi_{\mathbb{C}}(q) = p_n$, т.е. $q - p_n \in M_k(A)$.

Доказательство. Заметим, что из правил умножения в A^+ сразу следует, что $\pi_{\mathbb{C}}(p)$ — проектор. Поскольку в M_k проекторы эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги равны, то $\pi_{\mathbb{C}}(p) \sim p_n$ влечет $1 - \pi_{\mathbb{C}}(p) \sim 1 - p_n$, а значит, по предложению 6.21, $\pi_{\mathbb{C}}(p) \sim_u p_n$. Таким образом, найдется такая унитарная матрица $u \in M_k$, что $u\pi_{\mathbb{C}}(p)u^* = p_n$. Положим $q := upu^*$. Тогда q — проектор в $M_k(A^+)$, $p \sim_u q$ и $\pi_{\mathbb{C}}(q) = \pi_{\mathbb{C}}(upu^*) = u\pi_{\mathbb{C}}(p)u^* = p_n$. □

Лемма 7.9. *Пусть $a \in M_k(A)$. Тогда a коммутирует с p_n для некоторого $n \leqslant k$ тогда и только тогда, когда a имеет блочно-диагональный вид $\mathrm{diag}(a_1, a_2)$, $a_1 \in M_n(A)$, $a_2 \in M_{k-n}(A)$.*

При этом a — обратимый (соответственно, унитарный) тогда и только тогда, когда a_1 и a_2 — тоже обратимые (соответственно, унитарные).

Кроме того, $ap_n = p_n a = 0$ тогда и только тогда, когда a имеет блочно-диагональный вид $\mathrm{diag}(0, a_2)$, $0 \in M_n(A)$, $a_2 \in M_{k-n}(A)$.

Доказательство. Разобьем a на блоки: $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ так, чтобы $a_{11} \in M_n(A)$, т.е. блок имел размер $n \times n$. Соответственно, $p_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$ap_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad p_n a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу получаем первое утверждение. Второе в случае унитарных сразу следует из первого. Далее, $a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ обратим тогда и только тогда, когда существует такой элемент $b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} & b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Это эквивалентно обратимости a_{11} и a_{22}: $b_{11} = a_{11}^{-1}$ и $b_{22} = a_{22}^{-1}$, а также (используя это), что $b_{12} = b_{21} = 0$.

Последнее утверждение сразу следует из первого. □

Теорема 7.10. *Для любой C^*-алгебры $K_0(A)$, очевидно, является абелевой группой.*

1) *Элементы $K_0(A)$ могут быть представлены формальными разностями $[p] - [q]$, где p и q такие проекторы из $M_k(A^+)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, что $p - q \in M_k(A)$.*
2) *Если A с единицей, то p и q могут быть выбраны в $M_k(A) \subset M_k(A^+)$.*
3) *Более того, каждый элемент $K_0(A)$ может быть представлен в виде $[p] - [p_n]$, где p — проектор в $M_k(A^+)$ при некотором $k \geqslant n$, а $p - p_n \in M_k(A)$.*
4) *Если $[p] - [q] = 0 \in K_0(A)$, где $p, q \in M_k(A^+)$ то для подходящих $m \leqslant n$*

$$\operatorname{diag}(p, p_m) \sim_h \operatorname{diag}(q, p_m) \text{ в } M_{k+n}(A^+)$$

и наоборот.

Доказательство. 1) Всякий элемент $K_0(A)$ представляется формальной разностью $[p'] - [q']$ с $[p']$, $[q']$ из $V(A^+)$. Мы хотим показать, что могут быть выбраны такие их представители $p \in [p']$, $q \in [q']$, что их скалярные части совпадают, т.е. $p - q \in M_\infty(A)$. По определению,

$$\pi_*([p'] - [q']) = [\pi_{\mathbb{C}}(p')] - [\pi_{\mathbb{C}}(q')] = 0 \in K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}. \tag{26}$$

Поскольку $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — полугруппа с сокращениями, то из (26) следует, что $[\pi_{\mathbb{C}}(p')] = [\pi_{\mathbb{C}}(q')] =: n \in V(\mathbb{C})$. Таким образом, $\pi_{\mathbb{C}}(p') \sim p_n \sim \pi_{\mathbb{C}}(q')$ в $M_\infty(A^+)$. Применяя лемму 7.8, находим такие проекторы $p, q \in M_\infty(A^+)$, что

$$p \sim p', \qquad q \sim q', \qquad \pi_{\mathbb{C}}(p') = p_n = \pi_{\mathbb{C}}(q').$$

Ясно, что p и q удовлетворяют требованиям. Все вычисления можно рассматривать в $M_k(A^+)$ для достаточно большого k.

2) Если A с единицей, то $K_0(A) = GV(A)$ по предложению 7.7 и элементы представляются в нужном виде.

3) Пусть $x = [q_1] - [q] \in K_0(A)$, где проекторы q_1 и q — из $M_\infty(A^+)$. Тогда $q \leqslant p_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, так что $p_n - q$ — проектор. Можно считать, что то же самое выполняется и для q_1. Тогда мы можем рассмотреть проектор q_2 в $M_{2n}(A^+) \subset M_\infty(A^+)$, у которого нетривиальный блок такой же, как у q_2, но стоит он в правом

нижнем $n \times n$-углу. Тогда $q_2 \sim_u q_1$ и $q_2 \perp p_n$. Таким образом, q_2, $p_n - q$ и q попарно ортогональны, а $q_3 := q_2 \oplus (p_n - q)$ — проектор. При этом

$$\begin{aligned}[q_3] - [p_n] &= [q_2 \oplus (p_n - q)] - [p_n] = [q_2] + [p_n - q)] + [q] - [q] - [p_n] = \\ &= [q_1] + [(p_n - q) \oplus q] - [q] - [p_n] = [q_1] + [p_n] - [q] - [p_n] = [q_1] - [q] = x.\end{aligned}$$

При этом $0 = \pi_*(x) = [\pi_{\mathbb{C}}(q_3)] - [\pi_{\mathbb{C}}(p_n)] = [\pi_{\mathbb{C}}(q_3)] - [p_n]$, так что по лемме 7.8 находим $p \sim_u q_3$, причем $p - p_n \in M_\infty(A)$ и $x = [p] - [p_n]$.

4) По определению группы Гротендика, $[p] - [q] = 0 \in K_0(A)$ означает, что $[p] + [r] = [q] + [r]$ в $V(A^+)$ для некоторого проектора $r \in M_m(A^+)$. Тогда $r \leqslant p_m$ в $M_\infty(A^+)$ и $r \perp (p_m - r)$, так что

$$[\operatorname{diag}(p, p_m)] = [\operatorname{diag}(p, r \oplus (p_m - r))] = [p] + [r] + [p_m - r] = [\operatorname{diag}(q, p_m)].$$

Считая, что $p, q \in M_k(A^+)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, получаем, что из последнего равенства следует, что $\operatorname{diag}(p, p_m) \sim_h \operatorname{diag}(q, p_m)$ в $M_{k+n}(A^+)$ для достаточно большого $n \geqslant m$. Обратное очевидно. $\square$

8. K_0 и индуктивные пределы

Пусть $\{B_i, \varphi_{ij}\}$ — направленная система C^*-алгебр, причем φ_{ij} инъективны, а значит, изометрии. Тогда C^*-индуктивным пределом $C^*[\varinjlim B_i]$ называется C^*-пополнение алгебраического предела (=объединения) B_i.

Важнейшим примером для нас будет $B_i = M_i(A) = A \otimes M_i(\mathbb{C})$, $\cup_i B_i = A \otimes M_\infty(\mathbb{C})$, $C^*[\varinjlim B_i] = A \otimes \mathcal{K}$, а также матричные алгебры над ними. Поэтому мы ограничиваемся инъективными гомоморфизмами φ_{ij}, хотя общая ситуация может также быть рассмотрена.

Обозначим через φ_k канонические вложения $B_k \to \cup_i B_i \subset C^*[\varinjlim B_i]$.

Лемма 8.1. *Пусть p — проектор в $C^*[\varinjlim B_i]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $k \in \mathbb{N}$ и проектор $q \in B_k$, что $\|p - \varphi_k q\| < \varepsilon$.*

Доказательство. По определению C^*-индуктивного предела найдем k и $b \in B_k$ с достаточно малым $\|p - \varphi_k b\|$. То же будет и для положительного элемента $a = (b^* b)^{1/2}$. Тогда спектр $\varphi_k a$ близок к спектру p, т.е. сосредоточен на $[0, +\infty)$ в окрестностях 0 и 1. Спектр a тоже такой (может отличаться на 0). Пусть $f : [0, +\infty) \to [0, 1]$ — непрерывная функция, равная 0 в окрестности 0 и 1 — в окрестности 1. Тогда $q := f(a)$ — проектор, причем $\varphi_k q = \varphi_k f(a) = f(\varphi_k a)$ близок к p. Наше рассуждение близко к доказательству предложения 6.16, откуда можно извлечь более конкретные оценки. $\square$

Лемма 8.2. *Пусть все B_i имеют единицы, а φ_{ij} — унитальны. Тогда $C^*[\varinjlim B_i]$ имеет единицу.*

Пусть u — унитарный в $C^*[\varinjlim B_i]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $k \in \mathbb{N}$ и унитарный $v \in B_k$, что $\|u - \varphi_k v\| < \varepsilon$.

Доказательство. Единица имеется уже в $\varinjlim B_i$, а тем более, в $C^*[\varinjlim B_i]$ (она равна $\varphi_i(1_i)$, где 1_i — единица B_i, для любого i). В частности, все φ_i унитальны.

Выберем такое k и $a \in B_k$, что $\|u - \varphi_k a\|$ мало. В частности, $\varphi_k a$ обратим. Следовательно, a обратим, поскольку φ_k унитален. Пусть $v := a(a^* a)^{-1/2}$ — унитарный элемент из полярного разложения a. Тогда $\varphi_k v = (\varphi_k a)((\varphi_k a)^* \varphi_k a)^{-1/2}$, так как φ_k унитален. Поскольку $((\varphi_k a)^* \varphi_k a)^{-1/2}$ близко к $(u^* u)^{-1/2} = 1$, то $\varphi_k v$ близко к u. $\square$

Лемма 8.3. *Пусть $\{B_i, \varphi_{ij}\}$ инъективная направленная система и $B = C^*[\varinjlim B_i]$. Тогда $\{B_i^+, \varphi_{ij}^+\}$ инъективная направленная система с унитальными φ_{ij}^+ и $B^+ = C^*[\varinjlim B_i^+]$.*

Доказательство. Морфизмы φ_{ij}^+ унитальны и, очевидно, инъективны, если φ_{ij} инъективны. Очевидно также, что $\varinjlim B_i^+ = \varinjlim B_i \oplus \mathbb{C}$. Переходя к C^*-пополнениям, получаем требуемый результат. $\square$

Лемма 8.4. *Близкие унитарные элементы гомотопны.*

Доказательство. Пусть $u \in U(A) \subset GL(A)$. Т.к. $GL(A)$ открыто, то существует открытый шар $B_\varepsilon(u) \subset GL(A)$. Пусть u' — унитарный и $\|u - u'\| < \varepsilon$, т.е. $u' \in B_\varepsilon(u)$. Тогда отрезок (прямолинейная гомотопия) соединяет u и u' в $GL(A)$. Осталось применить деформационную ретракцию $GL(A)$ на $U(A)$ (лемма 6.1). $\square$

На самом деле, достаточно взять в доказательстве $\varepsilon = 1$, т.к. $\|u^{-1}\| = \|u\| = 1$.

Теорема 8.5. *Пусть $\{A_i, \Phi_{ij}\}$ — направленная система C^*-алгебр с инъективными гомоморфизмами. Тогда $\{K_0(A_i), \Phi_{ij*}\}$ — направленная система групп и*

$$K_0(C^*[\varinjlim A_i]) \cong \varinjlim K_0(A_i). \tag{27}$$

Доказательство. Обозначим $A := C^*[\varinjlim A_i]$. В силу функториальности, $\Phi_{ij*} \circ \Phi_{jk*} = \Phi_{ik*}$ и определен прямой предел полугрупп $H := \varinjlim \{V(A_i), \Phi_{ij*}\}$. Пусть $\Phi_i : A_i \to A$ и $\Psi_i : V(A_i) \to H$ — канонические гомоморфизмы. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
V(A_j) \arrow[r, "\Phi_{ij*}"] \arrow[drr, "\Phi_{j*}"'] & V(A_i) \arrow[r, "\Psi_i"] \arrow[dr, "\Phi_{i*}"] & H \arrow[d, "\theta"] \\
& & V(A),
\end{tikzcd}$$

где (единственный) θ определен по универсальному свойству прямого предела, а именно, $\theta(\Psi_i(x)) := \Phi_{i*}(x)$. Очевидно, что все построения естественны по отношению к присоединению единицы, поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что θ — изоморфизм полугрупп (и рассмотреть A_i^+ вместо A_i и т.д.).

Проверим сюръективность θ. Пусть $p \in M_n(A)$ — проектор. Выберем по лемме 8.1 проектор $q \in M_n(A_i)$ с малым $\|p - \Phi_i q\|$ для достаточно большого i. Здесь мы воспользовались очевидным равенством $M_n(C^*[\varinjlim B_i]) = C^*[\varinjlim M_n(B_i)]$ при фиксированном n. Тогда (например, по предложению 6.22)

$$[p] = [\Phi_i q] = \Phi_{i*}[q] = \theta \circ \Psi_i[q],$$

так что $[p]$ лежит в образе θ.

Проверим инъективность θ (она не получается автоматически, так как Φ_{i*} не обязаны быть инъективными). Пусть $x, y \in H$. Выбирая достаточно большие n и j_0, можно считать, что $x = \Psi_{j_0}[p_{j_0}]$, $y = \Psi_{j_0}[q_{j_0}]$ для некоторых проекторов $p_{j_0}, q_{j_0} \in M_n(A_{j_0})$. Допустим, $\theta(x) = \theta(y)$. Тогда (см. коммутативную диаграмму выше) можно считать (увеличивая n, если нужно), что $p := \Phi_{j_0}(p_{j_0}) \sim_u q := \Phi_{j_0}(q_{j_0})$ в $M_n(A)$ при помощи некоторого $u \in U_n(A^+)$, т.е. $q = upu^*$. По леммам 8.3 и 8.2, приблизим u некоторым унитарным элементом из $M_n(A^+_{j_1})$:

$$\|u - \Phi^+_{j_1} u_{j_1}\| < \varepsilon, \qquad u_{j_1} \in U_n(A^+_{j_1}).$$

Выбрав $j_2 = \max(j_1, j_0)$, определим

$$p_{j_2} := \Phi_{j_2 j_0}(p_{j_0}), \quad q_{j_2} := \Phi_{j_2 j_0}(q_{j_0}), \quad u_{j_2} := \Phi^+_{j_2 j_1}(u_{j_1}),$$

так что $p = \Phi_{j_2}(p_{j_2})$, $q = \Phi_{j_2}(q_{j_2})$ и $\|u - \Phi^+_{j_2} u_{j_2}\| < \varepsilon$. Положим

$$q'_{j_2} := u_{j_2} p_{j_2} u^*_{j_2}, \qquad u' := \Phi^+_{j_2}(u_{j_2}). \tag{28}$$

Тогда $\|u - u'\| < \varepsilon$ и

$$\|\Phi_{j_2}(q'_{j_2}) - \Phi_{j_2}(q_{j_2})\| = \|u'pu'^* - upu^*\| \leqslant 2\,\|u' - u\| < 2\varepsilon.$$

Напомним, что мы ограничились инъективными пределами, поэтому и для матричных алгебр (до рассмотрения эквивалентностей) имеем изометричность, например, Φ_{j_2} (в отличие от $\Phi_{j_2 *}$, про который мы пока ничего сказать не можем). Так что

$$\|q'_{j_2} - q_{j_2}\| < 2\varepsilon.$$

Считая, что мы выбрали $\varepsilon < 1/2$, получаем, что $q_{j_2} \sim_u q'_{j_2} \sim_u p_{j_2}$ и

$$x = \Psi_{j_0}[p_{j_0}] = \Psi_{j_2} \circ \Phi_{j_2 j_0 *}[p_{j_0}] = \Psi_{j_2}[p_{j_2}] = \Psi_{j_2}[q_{j_2}] = \Psi_{j_2} \circ \Phi_{j_2 j_0 *}[q_{j_0}] = \Psi_{j_0}[q_{j_0}] = y.$$

□

Лемма 8.6. *Пусть A — C^*-алгебра. Пусть*

$$\iota_{n1} : A \hookrightarrow M_n(A), \qquad a \mapsto \operatorname{diag}(a, 0, \ldots, 0)$$

— каноническое вложение. Тогда индуцированное отображение

$$\iota_{n1*} : K_0(A) \hookrightarrow K_0(M_n(A))$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\iota_{n1*} : V(A) \to V(M_n(A))$ является изоморфизмом. Пусть (a_{ij}) — проектор в $M_\infty(A)$. Тогда проектор $\iota_{n1}(a_{ij})$ эквивалентен (a_{ij}). Действительно, надо применить унитарные преобразования (гомотопные тождественному), которые меняют местами далекие строки (и столбцы) и строки (и столбцы) с номерами, отличными от 1, среди первых. (Далекие = те, где уже идут одни нули, первые = те, где имеются ненулевые элементы)

Таким образом, $\iota_{n1*}[(a_{ij})] = [\iota_{n1}(a_{ij})] = [(a_{ij})]$. Отсюда видно, что ι_{n1*} биективно. □

Теорема 8.7 (стабильность K_0). *Отображение $A \to A \otimes \mathcal{K}$ по формуле $a \mapsto a \otimes e_{11}$ индуцирует изоморфизм $K_0(A) \cong K_0(A \otimes \mathcal{K})$. Здесь e_{11} — проектор ранга 1 в $\mathcal{K}$.*

В частности, если A и B стабильно изоморфны, т.е. $A \otimes \mathcal{K} \cong B \otimes \mathcal{K}$, то $K_0(A) \cong K_0(B)$.

Доказательство. Пусть $\iota_{nm} : M_m(A) \hookrightarrow M_n(A)$, $a \mapsto \mathrm{diag}(a, 0)$, $n \geqslant m$, — каноническое вложение. Тогда $A \otimes \mathcal{K}$ является C^*-индуктивным пределом системы $\{M_n(A), \iota_{nm}\}$. Применим K_0 к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} M_m(A) \arrow[rr, "\iota_{nm}"] & & M_n(A) \\ & A. \arrow[ul, "\iota_{m1}"] \arrow[ur, "\iota_{n1}"'] & \end{tikzcd}$$

Получим следующую коммутативную диаграмму изоморфизмов (по предыдущей лемме), где мы обозначили через ψ_m, ψ_n, обратные к ι_{m1*}, ι_{n1*}, соответственно:

$$\begin{tikzcd} K_0(M_m(A)) \arrow[rr, "\iota_{nm*}"] \arrow[dr, "\psi_m"'] & & K_0(M_n(A)) \arrow[dl, "\psi_n"] \\ & K_0(A). & \end{tikzcd}$$

В силу универсальности индуктивного предела существует и единственный гомоморфизм $\theta : \varinjlim K_0(M_n(A)) \to K_0(A)$. С другой стороны, по теореме 8.5 $\varinjlim K_0(M_n(A)) = K_0(A \otimes \mathcal{K}$. Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_0(M_m(A)) \arrow[r, "\iota_{m*}"] \arrow[d, "\iota_{nm*}"'] \arrow[dr, "\psi_m" near start] & K_0(A \otimes \mathcal{K}) \arrow[d, "\theta"] \\ K_0(M_n(A)) \arrow[r, "\psi_n"'] \arrow[ur, "\iota_{n*}"' near start] & K_0(A), \end{tikzcd}$$

где $\iota_n : M_n(A) = A \otimes M_n \to A \otimes \mathcal{K}$ — канонические морфизмы. Тогда θ является изоморфизмом. (Это алгебраический факт, так как тут не C^*-пределы.) Действительно, так как ψ_n — изоморфизм, то θ — эпиморфизм. Пусть $\theta(x) = \theta(y)$, $x, y \in K_0(A \otimes \mathcal{K})$. Тогда для достаточно больших n_x и n_y

$$x = \iota_{n_x *}(a_x), \qquad y = \iota_{n_y *}(a_y), \qquad a_x \in K_0(M_{n_x}(A)), \quad a_y \in K_0(M_{n_y}(A)).$$

Пусть $n \geqslant \max(n_x, n_y)$, и $x_n = \iota_{n n_x}(a_x)$, $y_n = \iota_{n n_y}(a_y)$. Тогда $x = \iota_{n*}(x_n)$, $y = \iota_{n*}(y_n)$, и

$$\psi_n(x_n) = \theta \circ \iota_{n*}(x_n) = \theta(x) = \theta(y) = \theta \circ \iota_{n*}(y_n) = \psi_n(y_n).$$

Поскольку ψ_n инъективно (на самом деле даже изоморфизм), то $x_n = y_n$, откуда $x = \iota_{n*}(x_n) = \iota_{n*}(y_n) = y$. $\square$

Следствие 8.8. $K_0(\mathcal{K}) = K_0(\mathbb{C} \otimes \mathcal{K}) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.