Лекция 12 (10.05.2021)

8.1. **Короткая точная последовательность.**

Лемма 8.9. *Пусть J — идеал в A, а значит, и в A^+, а $\pi_J : A^+ \to A^+/J$ — проекция. Если $x \in A^+$, то*

(1) $x \in J$ тогда и только тогда, когда $\pi_J(x) = 0$;
(2) $x \in J^+$ тогда и только тогда, когда $\pi_J(x) \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Если $x = a + \lambda$, $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\pi_J(x) = \pi_J(a) + \lambda$. □

Теорема 8.10 (полуточность $K_0(A)$)**.** *Точная последовательность*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0,$$

где J — идеал в A, $i : J \hookrightarrow A$ — вложение, π — проекция, индуцирует короткую точную последовательность K_0-групп

$$K_0(J) \xrightarrow{i_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/J).$$

Доказательство. Таким образом, мы должны доказать, что $\operatorname{Ker} \pi_* = \operatorname{Im} i_* \subset K_0(A)$. Если $x \in K_0(J)$, то мы можем записать $x = [p] - [p_n]$, где $p \in M_\infty(J^+)$ — проектор и $p - p_n \in M_\infty(J)$ (см. п.3 теоремы 7.10). Тогда

$$\pi_* \circ \iota_*(x) = [\pi_J(p)] - [\pi_J(p_n)] = 0,$$

так как $p - p_n \in M_\infty(J)$. Значит, $\operatorname{Ker} \pi_* \supset \operatorname{Im} i_*$.

Обратно, если $y \in K_0(A)$, то он может быть записан как $y = [q] - [p_n]$, где $q \in M_k(A^+)$ и $q - p_n \in M_k(A)$, $k \geqslant n$. Условие $\pi_*(y) = 0$ означает

$$\operatorname{diag}(\pi_J(q), p_d) \sim_u \operatorname{diag}(p_n, p_d) \text{ в } M_m((A/J)^+)$$

для некоторых d и m, $m \geqslant k + d$. Это следует из п.4 теоремы 7.10. Соответственно, пусть $u \in M_m((A/J)^+)$ — такой унитарный элемент, что

$$u \operatorname{diag}(\pi_J(q), p_d)\, u^* = \operatorname{diag}(p_n, p_d).$$

По следствию 6.8 найдем унитарное поднятие $w \in M_{2m}(A^+)$ элемента $\operatorname{diag}(u, u^*)$. Определим проектор $r \in M_{2m}(A^+)$ формулой

$$r := w \operatorname{diag}(q, p_d)\, w^*.$$

Тогда

$$\pi_J(r) = \operatorname{diag}(u, u^*)\ \operatorname{diag}(\pi_J(q), p_d)\ \operatorname{diag}(u^*, u) = \operatorname{diag}(p_n, p_d).$$

По лемме 8.9 $r \in M_{2m}(J^+)$. Но $[r] = [\operatorname{diag}(q, p_d)]$, так что

$$y = [q] - [p_n] = [\operatorname{diag}(q, p_d)] - [\operatorname{diag}(p_n, p_d)] = [r] - [p_{n+d}]$$

лежит в образе i_*. □

8.2. **Гомотопическая инвариантность.**

Определение 8.11. Пусть A и B — C^*-алгебры. Два морфизма $\alpha, \beta : A \to B$ называются *гомотопными,* если имеется такой путь в гомоморфизмах $\gamma_t : A \to B$, $t \in [0,1]$, что $t \mapsto \gamma_t(a)$ — непрерывный по норме путь в B для каждого фиксированного $a \in A$, и $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = \beta$. Обозначение: $\alpha \sim_h \beta$.

Морфизм $\alpha : A \to B$ называется *эквивалентностью,* если имеется такой морфизм $\beta : B \to A$, что $\beta \circ \alpha \sim_h \mathrm{Id}_A$, $\alpha \circ \beta \sim_h \mathrm{Id}_B$.

Если $\beta \circ \alpha \sim_h \mathrm{Id}_A$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_B$, то α называется *деформационной ретракцией,* а B — *деформационным ретрактом* A.

A стягиваема, если Id_A гомотопно нулевому отображению.

Теорема 8.12 (гомотопическая инвариантность)**.** *Пусть $\alpha_0, \alpha_1 : A \to B$ — гомотопные морфизмы. Тогда индуцированные гомоморфизмы совпадают:*

$$\alpha_{0*} = \alpha_{1*} : K_0(A) \to K_0(B).$$

Доказательство. Пусть α_t, $t \in [0,1]$, — гомотопия. Для определения гомоморфизмов K-групп мы сначала определяем унитализации отображений матричных алгебр $\alpha_t^+ : M_n(A^+) \to M_n(B^+)$, а затем определяем

$$\alpha_{t*} : K_0(A) \to K_0(B), \qquad [p] - [q] \mapsto [\alpha_t^+(p)] - [\alpha_t^+(q)].$$

Заметим, что поскольку n конечно, то (при фиксированном p) $t \mapsto \alpha_t^+(p)$ — непрерывный путь в матричных проекторах. Значит, все эти проекторы эквивалентны, и то же самое верно для q. □

Определение 8.13. *Конусом* C*-алгебры A называется C*-алгебра $CA = \{f \in C([0,1]; A) : f(0) = 0\}$. Ее *надстройкой* называется C*-подалгебра конуса $SA = \{f \in C([0,1]; A) : f(0) = f(1) = 0\}$. *Конусом гомоморфизма* $\alpha : A \to B$ называется C*-алгебра $C_\alpha = \{(a, f) \in A \oplus CB : f(1) = \alpha(a)\}$.

Лемма 8.14. *Последовательности $0 \to SA \to CA \to A \to 0$ и $0 \to SB \xrightarrow{i} C_\alpha \xrightarrow{\pi} A \to 0$, где $i(f) = (0, f)$, $\pi(a, f) = a$, точны.*

Доказательство. Очевидно.

□

Предложение 8.15. *Конус CA явдяется стягиваемым для любой C^*-алгебры A.*

Доказательство. Определим $*$-гомоморфизмы $\gamma_t : CA \to CA$, $t \in [0,1]$, формулой $\gamma_t(f)(s) = f(st)$. Тогда $\gamma_1 = \mathrm{id}_{CA}$, $\gamma_0 = 0$.

□

8.3. **Группа K_1.** Отображение $x \mapsto \mathrm{diag}(x, 1)$ задает вложение групп $\mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_{n+1}(A)$ и $U_n(A) \to U_{n+1}(A)$. Переходя к прямому пределу, получаем топологические группы $\mathrm{GL}_\infty(A) = \varinjlim \mathrm{GL}_n(A)$ и $U_\infty(A) = \varinjlim U_n(A)$ (а также группы $\mathrm{GL}_\infty^+(A)$ и $U_\infty^+(A)$). Метрика на них задается нормой на алгебрах $\mathbb{M}_n(A)$. Через G_0 мы обозначаем компоненту связности единицы группы G. Напомним, что это нормальная подгруппа.

Для удобства мы будем матрицы конечного размера считать элементами прямого предела, т.е. если $u \in \mathrm{GL}_n(A)$, то мы можем обозначать через u элемент $\mathrm{diag}(u, 1_\infty)$ группы $\mathrm{GL}_\infty(A)$.

Определение 8.16. Положим $K_1(A) = \mathrm{GL}^+_\infty(A)/\mathrm{GL}^+_\infty(A)_0 = \mathrm{GL}_\infty(A)/\mathrm{GL}_\infty(A)_0 = U^+_\infty(A)/U^+_\infty(A)_0 = U_\infty(A^+)/U_\infty(A^+)_0$.

Классы в фактор-группе мы будем обозначать $[\cdot]$.

Лемма 8.17. *$K_1(A)$ — коммутативная группа, и $[u][v] = [uv] = [\mathrm{diag}(u, v)]$ для любых $u \in U^+_n(A)$, $v \in U^+_m(A)$.*

Доказательство. Утверждение следует из гомотопии, соединяющей $\begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix}$ с $\begin{pmatrix} uv & \\ & 1 \end{pmatrix}$ с помощью стандартного вращения.

□

Задача 88. Пусть $\alpha : A \to B$ — $*$-гомоморфизм C*-алгебр. Проверьте, что отображение $\alpha_* : K_1(A) \to K_1(B)$ корректно определено равенством $\alpha_*([u]) = [\alpha_n(u)]$, где $u \in U^+_n(A)$, а $\alpha_n : M_n(A) \to M_n(B)$ — индуцированный гомоморфизмом α гомоморфизм матричных алгебр.

Задача 89. Пусть $x, y \in U^+_n(A)$, и $\mathrm{diag}(x, 1_\infty)$ и $\mathrm{diag}(y, 1_\infty)$ гомотопны в $U^+_\infty(A)$. Тогда существует такое $k \in \mathbb{N}$ и гомотопия $u : [0, 1] \to U^+_{n+k}(A)$, что $u(0) = \mathrm{diag}(x, 1_k)$, $u(1) = \mathrm{diag}(y, 1_k)$. Поэтому $U^+_\infty(A)/U^+_\infty(A)_0 = \varinjlim(U^+_n(A)/U^+_n(A)_0)$ (и это верно и для остальных фактор-групп из определения K_1).

Задача 90. Проверьте гомотопическую инвариантность K_1; проверьте, что $K_1(M_n(A)) \cong K_1(A)$.

Задача 91. Вычислите $K_1(\mathbb{C})$, $K_1(\mathbb{K})$.

8.4. **Связь между K_0 и K_1.** Петлями обычно называют отображения окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Нам понадобятся следующие классы петель:

$$SA = \{f \in C(\mathbb{T}; A) : f(1) = 0\};$$

$$(SA)^+ = \{f \in C(\mathbb{T}; A^+) : f(1) = \pi_{\mathbb{C}} f(z) = \mathrm{Const} \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{T}\};$$

$$\mathrm{GL}_n(SA)^+ = \{f \in C(\mathbb{T}; \mathrm{GL}_n(A^+)) : f(1) = \pi_{\mathbb{C}} f(z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \forall z \in \mathbb{T}\};$$

$$\mathrm{GL}^+_n(SA) = \{f \in C(\mathbb{T}; \mathrm{GL}_n(A^+)) : f(1) = \pi_{\mathbb{C}} f(z) = 1_n \quad \forall z \in \mathbb{T}\}.$$

Определим гомоморфизм групп $\theta_A : K_1(A) \to K_0(SA)$.

Пусть $[u] \in K_1(A)$, $u \in U^+_n(A)$ для некоторого n. Как мы знаем, тогда существует гомотопия $t \mapsto w_t \in U^+_{2n}(A)$, соединяющая $w_0 = 1_{2n}$ и $w_1 = \mathrm{diag}(u, u^*)$. Эта гомотопия задает семейство проекторов $q_t = w_t p_n w_t^* \in M_{2n}(A^+))$, где $p_n = \mathrm{diag}(1_n, 0_n)$ — диагональная матрица с n единицами и n нулями на диагонали. Поскольку $q_0 = p_n$, $q_1 = w_1 p_n w_1^* = \mathrm{diag}(u 1_n u^*, 0) = p_n$, это семейство проекторов представляет собой петлю. Поскольку $\pi_{\mathbb{C}} w_t = 1_{2n}$ для любого $t \in [0, 1]$, получаем, что $\pi_{\mathbb{C}} q_t = p_n$ для любого $t \in [0, 1]$, откуда получаем $q_t - p_n \in M_{2n}(A)$, и тем самым, q можно рассматривать как элемент алгебры $M_{2n}((SA)^+)$, причем $q - p_n \in M_{2n}(SA)$. Отметим, что, в отличие от q, w петлей не является, т.к. $w_1 \neq w_0$. Положим $\theta_A([u]) = [q] - [p_n] \in K_0(SA)$.

Лемма 8.18. *Это определение корректно.*

Доказательство. Проверим сначала независимость от выбора u и w. Пусть $v \in U_n^+(A)$, и пусть u и v соединены гомотопией $t \mapsto a_t \in U_n^+(A)$ ($a_0 = u$, $a_1 = v$). Наряду с гомотопией $t \mapsto w_t \in U_{2n}^+(A)$, рассмотрим гомотопию $t \mapsto z_t \in U_{2n}^+(A)$, соединяющую $z_0 = 1_{2n}$ и $z_1 = \mathrm{diag}(v, v^*)$. Получим два проектора, $q_u = wp_nw^*$ и $q_v = zp_nz^*$. Покажем, что эти проекторы унитарно эквивалентны в $M_{2n}((SA)^+)$. Положим $x_t = w_t \cdot \mathrm{diag}(u^*a_t, ua_t^*) \cdot z_t^*$. Тогда

$$x_0 = w_0 \cdot \mathrm{diag}(u^*a_0, ua_0^*) \cdot z_0^* = 1_{2n},$$

$$x_1 = w_1 \cdot \mathrm{diag}(u^*a_1, ua_1^*) \cdot z_1^* = \mathrm{diag}(u, u^*) \cdot \mathrm{diag}(u^*v, uv^*) \cdot \mathrm{diag}(v, v^*) = 1_{2n}.$$

Также $\pi_{\mathbb{C}} x_t = 1_{2n}$ для любого $t \in [0, 1]$, поэтому петлю $x : t \mapsto x_t$ можно рассматривать как элемент из $U_{2n}^+(SA)$.

Унитарная эквивалентность проекторов q_u и q_v следует из равенства

$$xq_vx^* = x(zp_nz^*)x^* = w \cdot \mathrm{diag}(u^*a, ua^*) \cdot \mathrm{diag}(1_n, 0_n) \cdot \mathrm{diag}(a^*u, au^*) \cdot w^* = wp_nw^* = q_u.$$

Остается проверить независимость от размерности n. Вместо $u \in U_n^+(A)$ можно работать с $\mathrm{diag}(u, 1_m) \in U_{n+m}^+(A)$. Обозначим через q' соответствующий проектор. Пусть $y \in M_{2n+2m}(\mathbb{C})$ — такая матрица (перестановка строк и столбцов), что

$$y \cdot \mathrm{diag}(u, u^*, 1_m, 1_n) \cdot y^* = \mathrm{diag}(u, 1_m, u^*, 1_m).$$

Положим $z_t = y \cdot \mathrm{diag}(w_t, 1_{2m}) \cdot y^* \in U_{2n+2m}^+(A)$. Тогда $z_0 = 1_{2n+2m}$, $z_1 = \mathrm{diag}(u, 1_m, u^*, 1_m)$, и для задания проектора q' можно выбрать гомотопию z_t (мы уже доказали, что от выбора такой гомотопии класс унитарной эквивалентности проектора q' не зависит): $q'_t = z_t p_{n+m} z_t^*$. Тогда проектор

$$q' = y \cdot \mathrm{diag}(w, 1_{2m}) \cdot y^* \cdot p_{n+m} \cdot y \cdot \mathrm{diag}(w^*, 1_{2m}) \cdot y^*$$

гомотопен проектору

$$q'' = \mathrm{diag}(w, 1_{2m}) \cdot y^* \cdot p_{n+m} \cdot y \cdot \mathrm{diag}(w^*, 1_{2m})$$

(от правого и левого сомножителей можно избавиться, т.к. $U_k(\mathbb{C})$ связна для любой размерности), т.е. $[q'] - [p_{n+m}] = [q''] - [p_{n+m}]$. Но

$$q'' = \mathrm{diag}(w, 1_{2m}) \cdot \mathrm{diag}(p_n, p_m) \cdot \mathrm{diag}(w^*, 1_{2m}) = \mathrm{diag}(wp_nw^*, 1_m) = \mathrm{diag}(q, p_m),$$

следовательно, $[q'] - [p_{n+m}] = [\mathrm{diag}(q, p_m)] - [\mathrm{diag}(p_n, p_m)] = [q] - [p_n]$, что и требовалось доказать.

□