Лекция 13 (17.05.2021)

Теорема 8.19. *1. Построенное выше отображение θ_A функториально, т.е. если $\alpha : A \to B$ — $*$-гомоморфизм C^*-алгебр, то диаграмма*

$$\begin{tikzcd} K_1(A) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\theta_A"'] & K_1(B) \arrow[d, "\theta_B"] \\ K_0(SA) \arrow[r, "S\alpha_*"'] & K_0(SB) \end{tikzcd}$$

коммутативна, где α_* и $S\alpha_*$ — индуцированные гомоморфизмом α гомоморфизмы групп.

2. Отображение θ_A является изоморфизмом групп для любой C^*-алгебры A.

Доказательство. 1. Пусть $u \in U_n^+(A)$, w_t — гомотопия в $U_{2n}^+(A)$, соединяющая 1_{2n} и $\mathrm{diag}(u, u^*)$. Тогда $\alpha^+(w_t)$ — гомотопия в $U_{2n}^+(B)$, соединяющая 1_{2n} с $\mathrm{diag}(\alpha(u), \alpha(u)^*)$. Поэтому

$$\theta_B \circ \alpha_*([u]) = \theta_B([\alpha^+(u)]) = [\alpha^+(w)p_n\alpha^+(w)^*] - [p_n] = \alpha_*([wp_nw^*] - [p_n]) = \alpha_* \circ \theta_A([u]).$$

2. Начнем с инъективности. Пусть $\theta_A([u]) = \theta_A([v])$. Можно заранее считать, что $u, v \in U_n^+(A)$ с общим n. Пусть (w_t^0), (z_t^0) — гомотопии в $U_{2n}^+(A)$, соединяющие 1_{2n} с $\mathrm{diag}(u, u^*)$ и с $\mathrm{diag}(v, v^*)$ соответственно. Дополняя их постоянными прямыми слагаемыми, можно определить для каждого $k \in \mathbb{N}$ гомотопии (w_t^k), (z_t^k) в $U_{2n+2k}^+(A)$, соединяющие 1_{2n+2k} с $\mathrm{diag}(u, 1_k, u^*, 1_k)$ и с $\mathrm{diag}(v, 1_k, v^*, 1_k)$ соответственно. Положим

$$q_t^k = w_t^k p_{n+k} w_t^{k*}, \qquad r_t^k = z_t^k p_{n+k} z_t^{k*}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ясно, что q^k гомотопен $\mathrm{diag}(q^0, p_k)$, и r^k гомотопен $\mathrm{diag}(r^0, 1_k)$ в $M_{2n+2k}((SA)^+)$.

Предположение $\theta_A([u]) = \theta_A([v])$ означает, что $[q^0] - [r^0] = 0$ в $K_0(SA)$, следовательно, существуют такие $k, m \in \mathbb{N}$, $k < m$, что проекторы $\mathrm{diag}(q^0, p_k)$ и $\mathrm{diag}(r^0, p_k)$ унитарно эквивалентны в $M_{2n+m}((SA)^+)$. Добавляя на диагонали единицы и нули, можно сделать так, что $m = 2k$. Будем считать, что это уже сделано. Унитарная эквивалентность в $M_{2n+2k}((SA)^+)$ означает существование такого $x \in U_{2n+2k}^+(SA)$, что $xq^kx^* = r^k$, т.е. $x_t(w_0^k p_{n+k} w_t^{k*})x_t^* = z_t^k p_{n+k} z_t^{k*}$ для любого $t \in [0, 1]$. Это можно записать в виде

$$p_{n+k}(w_t^{k*} x_t^* z_t^k) = (w_t^{k*} x_t^* z_t^k) p_{n+k}. \tag{29}$$

Матрица, коммутирующая с матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, должна быть диагональной, поэтому из равенства (29) следует, что $y_t = w_t^{k*} x_t^* z_t^k$ диагональна при всех t, т.е. $y_t = \mathrm{diag}(a_t, b_t)$ для некоторых $a, b \in U_{n+k}^+(SA)$. Зная, что $x_0 = x_1 = 1_{2n+2k}$, и что $w_0^k = z_0^k = 1_{2n+2k}$, $w_1^k = \mathrm{diag}(u, 1_k u^*, 1_k)$, $z_1^k = \mathrm{diag}(v, 1_k, v^*, 1_k)$, получаем, что

$$y_0 = 1_{2n+2k}, \qquad y_1 = w_1^{k*} x_1 z_1^k = \mathrm{diag}(u^*v, 1_k, uv^*, 1_k),$$

поэтому $a_0 = 1_{n+k}$, $a_1 = \mathrm{diag}(u^*v, 1_k)$. Тогда $t \mapsto \mathrm{diag}(u, 1_k)a_t$ задает гомотопию в $U_{2n+2k}^+(A)$, соединяющую $\mathrm{diag}(u, 1_k)$ и $\mathrm{diag}(v, 1_k)$. Наличие такой гомотопии означает, что $[u] = [v]$ в $K_1(A)$.

Теперь докажем сюръективность. Пусть $x \in K_0(SA)$. Тогда его можно записать в виде $x = [r] - [p_n]$, где $r : t \mapsto r_t$ — проектор в $M_k((SA)^+)$, $k \geq n$, и $r - p_n \in M_k(SA)$. Запишем r в виде матрицы, $r_t = \big((r_t)_{ij}\big)$, где матричные элементы имеют вид $(r_t)_{ij} =$

$(\tilde{r}_t)_{ij}+\lambda_{ij}$, $i,j=1,\dots,k$, $(\tilde{r}_t)_{ij}\in SA$, $\lambda_{ij}\in\mathbb{C}$. Поскольку $r\in M_k((SA)^+)$, r_0 и r_1 — скалярные матрицы, значит, $r_0=r_1=(\lambda_{ij})$, а так как $r_t=p_n\in M_k(SA)$ для всех t, то $r_0=r_1=p_n$. Рассмотрим непрерывное семейство проекторов r_t, $t\in[0,1]$. Существует такое непрерывное семейство $w_t\in U_k^+(A)$, что $w_0=1_k$ и $r_t=w_tp_nw_t^*$ для всех $t\in[0,1]$. Про w_1 мы не можем утверждать, что $w_1=1_k$, но так как $p_n=r_1=w_1p_nw_1^*$ (т.е. $p_nw_1=w_1p_n$), то w_1 диагональна, $w_1=\operatorname{diag}(u,v)$, где $u\in U_n^+(A)$, $v\in U_{k-n}^+(A)$. Мы утверждаем, что $\theta_A([u])=x$, что и докажет сюръективность.

Пусть $(Z_t)_{[0,1]}$ — гомотопия в $U_{2k}^+(A)$, соединяющая 1_{2k} и $\operatorname{diag}(u,1_{k-n},u^*,1_{k-n})$. Положим $q_t=Z_tp_nZ_t^*$, $q\in M_{2k}((SA)^+)$. Для краткости обозначим $W_t=\operatorname{diag}(w_t,w_t^*)\in U_{2k}^+(A)$. Пусть $(a_t)_{[0,1]}$ — путь в $U_{2k-n}^+(A)$ (пока произвольный, мы его выберем позже). Тогда $\operatorname{diag}(1_n,a_t)p_n=p_n\operatorname{diag}(1_n,a_t)=p_n$, поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}(r_t,0) &= \operatorname{diag}(w_tp_nw_t^*,0)=W_tp_nW_t^*=W_t\cdot\operatorname{diag}(1_n,a_t)\cdot p_n\cdot\operatorname{diag}(1_n,a_t^*)\cdot W_t^*\\ &= W_t\cdot\operatorname{diag}(1_n,a_t)\cdot Z_t^*\cdot(Z_tp_nZ_t^*)\cdot Z_t\cdot\operatorname{diag}(1_n,a_t^*)\cdot W_t^*\\ &= W_t\cdot\operatorname{diag}(1_n,a_t)\cdot Z_t^*q_tZ_t\cdot\operatorname{diag}(1_n,a_t^*)\cdot W_t^* \;=\; Y_tq_tY_t^*,\end{aligned}$$

где $Y_t=W_t\cdot\operatorname{diag}(1_n,a_t)\cdot Z_t^*\in U_{2k}^+(A)$.

Теперь нам надо подобрать a_t так, чтобы $Y:t\mapsto Y_t$ был элементом $M_{2k}((SA)^+)$ — тогда проекторы r и q оказались бы унитарно эквивалентными, т.е. $[r]=[q]$ в $K_0(SA)$ (и тогда $[r]-[p_n]=[q]-[p_n]=x=\theta_A([u])$). Для этого достаточно добиться того, чтобы $Y_0=Y_1=1_{2k}$. Поскольку $W_0=Z_0=1_{2k}$, $W_1=\operatorname{diag}(u,v,u^*,v^*)$, $Z_1=\operatorname{diag}(u,1_{k-n},u^*,1_{k-n})$, получаем, что $Y_0=\operatorname{diag}(1_n,a_0)$, $Y_1=\operatorname{diag}(1_n,X)$, где $X=\operatorname{diag}(v,U^*,v^*)\cdot a_1\cdot\operatorname{diag}(1_{k-n},u,1_{k-n})$. это дает условия на a_t: $a_0=1_{2k-n}=X$, т.е. $a_1=\operatorname{diag}(v^*,1_n,v)$. Но $\operatorname{diag}(v^*,1_n,v)\in U_{2k-n}^+(A)_0$, поэтому существует гомотопия, соединяющая a_0 и a_1. Ее и возьмем в качестве $(a_t)_{[0,1]}$.

$\square$

Эта теорема позволяет дать следующее определение (особенно полезное в алгебраической K-теории).

Определение 8.20. $K_n(A)=K_0(S^nA)$.

Свяжем K_0 и K_1 еще одним способом. Пусть $0\to J\to A\to A/J\to 0$ — короткая точная последовательность C*-алгебр. Пусть $x\in K_1(A/J)$, $x=[u]$, где $u\in U_n^+(A/J)$. Пусть $v\in U_k^+(A/J)$ таков, что $\operatorname{diag}(u,v)\in U_{n+k}^+(A/J)_0$ (например, можно взять $v=u^*$). Поскольку элементы из компоненты связности единицы допускают унитарное поднятие, существует такое $w\in U_{n+k}^+(A)$, что $\pi_J^{(n+k)}(w)=\operatorname{diag}(u,v)$, где $\pi_J^{(n)}:M_n(A)\to M_n(A/J)$ — фактор-отображение матричных алгебр.

Определение 8.21. Отображение $\delta:K_1(A/J)\to K_0(J)$, $\delta(x)=[wp_nw^*]-[p_n]$, называется граничным гомоморфизмом.

Теорема 8.22. *Граничный гомоморфизм определен корректно.*

Доказательство. Начнем с проверки того, что $\delta(x)=[wp_nw^*]-[p_n]\in K_0(J)$. Заметим, что $\pi_J^{(n+k)}(wp_nw^*)=\operatorname{diag}(u,v)\cdot p_n\cdot\operatorname{diag}(u^*,v^*)=p_n$, поэтому $wp_nw^*-p_n\in M_{n+k}(J)$, т.е. задает элемент в $K_0(J)$.

Проверим независимость от выбора w. Пусть w' — другое унитарное поднятие для $\operatorname{diag}(u,v)$. Положим $z=w'w^*\in U_{n+k}^+(A)$. Тогда $\pi_J^{(n+k)}(z)=\operatorname{diag}(u,v)\cdot\operatorname{diag}(u^*,v^*)=$

1_{n_k}, поэтому $z \in U^+_{n+k}(J)$. Поскольку $z(wp_nw^*)z^* = w'p_nw'^*$, получаем, что $[wp_nw^*] - [p_n] = [w'p_nw'^*] - [p_n]$ в $K_0(J)$.

Далее, проверим независимость от размерностей u и v. Запишем w в виде матрицы, $w = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$, где $\pi^{(n)}_J(w_{11}) = u$, $\pi^{(k)}_J(w_{22}) = v$. Заменим u и v на $\mathrm{diag}(u, 1_m)$ и $\mathrm{diag}(v, 1_j)$. Тогда $W = \begin{pmatrix} w_{11} & 0 & w_{12} & 0 \\ 0 & 1_m & 0 & 0 \\ w_{21} & 0 & w_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_j \end{pmatrix} \in U^+_{n+k+m+j}(A)$ — унитарное поднятие для $\mathrm{diag}(u, 1_m, v, 1_j)$. Сопрягая скалярными унитарными матрицами и переставляя блоки, получаем, что

$$\begin{aligned} Wp_{n+m}W^* &\sim \mathrm{diag}(w, 1_{m+j}) \cdot p_{n+m} \cdot \mathrm{diag}(w^*, 1_{m+j}) \\ &\sim \mathrm{diag}(w, 1_{m+j}) \cdot \mathrm{diag}(1_n, 0_k, 1_m, 0_j) \cdot \mathrm{diag}(w^*, 1_{m+j}) \\ &= \mathrm{diag}(wp_nw^*, p_m), \end{aligned}$$

и

$$[Wp_{n+m}W^*] - [p_{n+m}] = [\mathrm{diag}(wp_nw^*, p_m)] - [\mathrm{diag}(p_n, p_m)] = [wp_nw^*] - [p_n].$$

Наконец, проверим независимость от выбора u и v. Пусть $u' \in U^+_n(A/J)$, $u' \sim_h u$, где $\sim_h$ обозначает наличие унитарной гомотопии между правой и левой частями, и пусть $v' \in U^+_k(A/J)$ таково, что $\mathrm{diag}(u', v') \in U^+_{n+k}(A/J)_0$. Условие $u' \sim_h u$ эквивалентно $u^*u' \sim_h 1_n$, и для u^*u' существует унитарное поднятие $a \in U^+_n(A)_0$, т.е. $\pi^{(n)}_J(a) = u^*u'$. Аналогично, поскольку

$$\mathrm{diag}(v^*v', 1_n) \sim_h \mathrm{diag}(1_n, v^*v') \sim_h \mathrm{diag}(u^*u', v^*v') \sim_h 1_{n+k},$$

существует унитарное поднятие $b \in U^+_{n+k}(A)_0$ для $\mathrm{diag}(v^*v', 1_n)$. Тогда $z = \mathrm{diag}(w, 1_n) \cdot \mathrm{diag}(a, b)$ — унитарное поднятие для $\mathrm{diag}(u', v'1_n)$ (а не для $\mathrm{diag}(u', v')$, но это неважно, т.к. мы уже проверили независимоть от размера матриц). Используя u и v, мы получим $\delta([u]) = [wp_nw^*] - [p_n]$, а используя u' и $\mathrm{diag}(v', 1_n)$ — $\delta([u]) = [zp_nz^*] - [p_n]$. Покажем, что они равны. Так как $\mathrm{diag}(a, b)$ коммутирует с p_n, получаем

$$\begin{aligned} zp_nz^* &= \mathrm{diag}(w, 1_n) \cdot \mathrm{diag}(a, b) \cdot p_n \cdot \mathrm{diag}(a^*, b^*) \cdot (w^*, 1_n) = \mathrm{diag}(w, 1_n) \cdot p_n \cdot \mathrm{diag}(w^*, 1_n) \\ &= \mathrm{diag}(wp_nw^*, 0_n). \end{aligned}$$

Итак, отображение δ определено корректно. Остается проверить, что оно является гомоморфизмом групп. Пусть $u_1, u_2 \in U^+_n(A/J)$. Пусть $w_1, w_2 \in U^+_{2n}(A)$ — поднятия для $\mathrm{diag}(u_1, u_1^*)$ и $\mathrm{diag}(u_2, u_2^*)$ соответственно. Тогда поднятие w_3 для $\mathrm{diag}(u_1, u_2, u_1^*, u_2^*)$ можно получить из $\mathrm{diag}(w_1, w_2)$ перестановкой блоков, которая осуществляется с помощью блочно-скалярных матриц. Гомоморфность следует из выкладки

$$\begin{aligned} \delta([u_1] + [u_2]) &= \delta([u_1u_2]) = \delta([\mathrm{diag}(u_1, u_2)]) = [w_3p_{2n}w_3^*] - [p_{2n}] \\ &= [\mathrm{diag}(w_1, w_2) \cdot p_{2n} \cdot \mathrm{diag}(w_1^*, w_2^*)] - [p_{2n}] \\ &= [\mathrm{diag}(w_1, w_2) \cdot \mathrm{diag}(p_n, p_n) \cdot \mathrm{diag}(w_1^*, w_2^*)] - [p_n] - [p_n] \\ &= [w_1p_nw_1^*] - [p_n] + [w_2p_nw_2^*] - [p_n] = \delta([u_1]) + \delta([u_2]). \end{aligned}$$

□

Похожими на предыдущие рассуждениями доказывается следующая теорема.

Теорема 8.23. *Пусть $J \subset A$ — идеал, $\pi : A \to A/J$ — фактор-гомоморфизм, тогда последовательность*

$$K_1(J) \to K_1(A) \xrightarrow{\pi_*} K_1(A/J) \xrightarrow{\delta} K_0(J) \to K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/J)$$

точна.

Принципиально другими методами доказывается теорема периодичности Ботта. К сожалению, очраниченность времени не позволяет привести тут ее доказательство.

Теорема 8.24. *Группы $K_0(A)$ и $K_2(A) = K_0(S^2(A))$ канонически изоморфны.*

Следствие 8.25. *Пусть $J \subset A$ — идеал, $\pi : A \to A/J$ — фактор-гомоморфизм, тогда последовательность*

$$\begin{tikzcd} K_1(J) \arrow[r] & K_1(A) \arrow[r, "\pi_*"] & K_1(A/J) \arrow[d, "\delta"] \\ K_0(A/J) \arrow[u] & K_0(A) \arrow[l, "\pi_*"'] & K_0(J) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

точна.

Приведем пример применения этой последовательности для вычислений. Алгеброй D_n *падения размерности* называется C*-алгебра таких функций на отрезке $[0, 1]$ со значениями в матричной алгебре M_n, $n \geq 2$, которые в 0 равны 0, а в 1 скалярны, т.е. $D_n = \{f \in C([0, 1]; M_n) : f(0) = 0, f(1) = \mathbb{C} \cdot 1\}$. Пусть $J \cong SM_n$ — идеал матричнозначных функций, равных 0 в обоих концах отрезка $[0, 1]$. Тогда $K_0(J) = 0$, $K_1(J) = \mathbb{Z}$, $D_n/J \cong \mathbb{C}$, и $K_0(D_n/J) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(D_n/J) = 0$. Рассмотрим идеал $SJ = S^2M_n$ в алгебре SD_n и запишем для них точную последовательность

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_1(SD_n) \arrow[r, "\pi_*"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\delta"] \\ 0 \arrow[u] & K_0(SD_n) \arrow[l, "\pi_*"'] & \mathbb{Z} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

т.е.

$$0 \to K_1(SD_n) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \to K_0(SD_n) \to 0,$$

Группы $K_i(SD_n) = K_{1-i}(D_n)$ зависят от явного вида гомоморфизма $\delta : K_1(S\mathbb{C}) \to K_0(S^2M_n)$, который нужно вычислить явно (полезное упражнение!). Оказывается, δ — умножение на n, откуда следует, что $K_0(D_n) = 0$, $K_1(D_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.