Лекция 2 (1.03.2021)

5.7. **С*-расширения и их инвариант Басби.** Если I — идеал в С*-алгебре E с соответствующей С*-фактор-алгеброй $A = E/I$, то это можно записать в виде короткой точной последовательности С*-алгебр $0 \to I \to E \to A \to 0$. Точность означает, что ядро каждого $*$-гомоморфизма (кроме первого) равно образу предыдущего $*$-гомоморфизма. Короткие точные последовательности называют расширениями (при необходимости уточняют, что это расширение С*-алгебры A С*-алгеброй I). Алгебра Тёплица может быть включена в расширение $0 \to \mathbb{K}(H^2) \to \mathcal{T} \to C(\mathbb{T}) \to 0$.

Определение 5.52. Два расширения, $0 \to I \to E \to A \to 0$ и $0 \to I \to E' \to A \to 0$ *сильно эквивалентны*, если существует такой $*$-изоморфизм $\alpha : E \to E'$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & E' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Они *эквивалентны*, если существует такой $*$-изоморфизм $\alpha : E \to E'$, что $\alpha(I) \subset I$, $\alpha|_I$ — автоморфизм of I, и индуцированное фактор-отображение $\dot{\alpha} : A \to A$ — тождественное.

Пусть $0 \to I \to E \to A \to 0$ — расширение, $e \in E$, $x \in I$. Положим $i_l(e)(x) = ex \in I$, $i_r(e) = xe \in I$, тогда $i_l(e)$ — левый, а $i_r(e)$ — правый централизаторы, и пара $(i_l(e), i_r(e))$ — двойной централизатор идеала I. Отображение $e \mapsto (i_l(e), i_r(e))$ задает отображение $i : E \to M(I)$ в алгебру мультипликаторов тдеала I. Очевидно, что это отображение является $*$-гомоморфизмом. Поскольку $i(I) = I$, отображение i задает $*$-гомоморфизм фактор-алгебр: $\varphi : A \to Q(I)$. Этот гомоморфизм называется *инвариантом Басби* расширения.

Для $*$-гомоморфизма $\varphi : A \to Q(I)$ положим

$$E' = \{(a, m) : a \in A, m \in M(I), \varphi(a) = \pi(m)\},$$

где через $\pi : M(I) \to Q(I)$ обозначено отображение факторизации. E' является С*-алгеброй, т.к. это замкнутая $*$-подалгебра С*-алгебры $A \oplus Q(I)$. Множество всех пар вида $(0, x)$, $x \in I$, образует идеал в E', изоморфный I, и имеется $*$-гомоморфизм $E' \to A$, заданный формулой $(a, m) \mapsto a$, ядро которого совпадает с этим идеалом, поэтому получаем расширение $0 \to I \to E' \to A \to 0$.

Лемма 5.53. *Если* $\varphi : A \to Q(I)$ *— инвариант Басби расширения* $0 \to I \to E \to A \to 0$*, то построенное выше расширение* $0 \to I \to E' \to A \to 0$ *сильно эквивалентно исходному расширению.*

Доказательство. Обозначим фактор-отображение $E \to A$ через q. Определим отображение $\alpha : E \to E'$ формулой $\alpha(e) = (q(e), i(e))$. Коммутативность соответствующей диаграммы очевидна. Такж легко видеть, что $\operatorname{Ker} \alpha = 0$ ($\operatorname{Ker} \alpha \subset I$, и если $x \in I$, то $i(x) = 0$ только если $x = 0$). Из Леммы о пяти гомоморфизмах (5-Лемма) следует, что α — изоморфизм. □

Следствие 5.54. *Два расширения (с одними и теми же идеалом I и фактором A) сильно эквивалентны тогда и только тогда, когда их инварианты Басби совпадают.*

Определение 5.55. Расширение $0 \to I \to E \to A \to 0$ *существенно*, если I — существенный идеал в E.

Задача 65. Докажите, что расширение существенно тогда и только тогда, когда его инвариант Басби инъективен.

По ряду соображений, часть из которых мы обсудим позже, особенно важны расширения, в которых $I = \mathbb{K}(H)$. Для удобства мы будем писать $\mathbb{K}$ вместо $\mathbb{K}(H)$, поскольку C*-алгебры $\mathbb{K}(H_1)$ и $\mathbb{K}(H_2)$ изоморфны для любых сепарабельных гильбертовых пространств H_1 и H_2.

Лемма 5.56. *Пусть $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ — автоморфизм. Тогда $\varphi = \mathrm{Ad}_U$ (т.е. $\varphi(K) = UKU^*$, $K \in \mathbb{K}$) для некоторого унитарного оператора $U \in \mathbb{B}(H)$.*

Доказательство. Пусть $\xi \in H$ — единичный вектор. Тогда оператор $\theta_{\xi,\xi}$, заданный формулой $\theta_{\xi,\xi}(\zeta) = \xi(\xi, \zeta)$, является минимальным проектором. Поэтому $\varphi(\theta_{\xi,\xi})$ — также минимальный проектор, т.е. он имеет вид $\varphi(\theta_{\xi,\xi}) = \theta_{\eta,\eta}$ для некоторого единичного вектора $\eta \in H$. Определим оператор U равенством $U\zeta := \varphi(\theta_{\zeta,\xi})\eta$, where $\zeta \in H$, $\theta_{\zeta,\xi}(\cdot) = \zeta(\xi, \cdot)$.

Поскольку

$$\|U\zeta\|^2 = (\varphi(\theta_{\zeta,\xi}\eta), \varphi(\theta_{\zeta,\xi}\eta)) = (\varphi(\theta^*_{\zeta,\xi}\theta_{\zeta,\xi})\eta, \eta) = (\varphi(\theta_{\xi,\xi})\|\zeta\|^2\eta, \eta) = (\theta_{\eta,\eta}\eta, \eta)\|\zeta\|^2 = \|\zeta\|^2,$$

оператор U — изометрия.

Пусть $\zeta \in H$, тогда существует такой оператор $K \in \mathbb{K}$, что $\varphi(K) = \theta_{\zeta,\eta}$. Тогда

$$U(K\xi) = \varphi(\theta_{K\xi,\xi})\eta = \varphi(K)\varphi(\theta_{\xi,\xi})\eta = \theta_{\zeta,\eta}\theta_{\eta,\eta}\eta = \zeta,$$

поэтому U сюръективен, а, значит, унитарен.

Возьмем произвольные $K \in \mathbb{K}$ и $\zeta \in H$. Тогда

$$UKU^*\zeta = \varphi(\theta_{KU^*\zeta,\xi})\eta = \varphi(K)\varphi(\theta_{U^*\zeta,\xi})\eta = \varphi(K)U(U^*\zeta) = \varphi(K)\zeta,$$

т.е. $\varphi = \mathrm{Ad}_U$. □

Лемма 5.57. *Два существенных расширения C*-алгебры A идеалом $\mathbb{K}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их инварианты Басби унитарно эквивалентны (с некоторым унитарным оператором $U \in \mathbb{B}(H)$).*

Доказательство. Заметим, что если расширение существенно, то инвариант Басби $\varphi : A \to Q(H)$ инъективен, следовательно, $E = \pi^{-1}(\varphi(A))$, где $\pi : \mathbb{B}(H) \to Q(H)$ — фактор-отображение. Пусть φ_1, φ_2 — инварианты Басби для двух существенных расширений E_1, E_2. Если существует такой унитарный оператор $U \in \mathbb{B}(H)$, что $\varphi_2 = \mathrm{Ad}_{\pi(U)}\varphi_1$, то $\mathrm{Ad}_U E_2 = \mathrm{Ad}_U \pi^{-1}(\varphi_2(A)) = \pi^{-1}(\mathrm{Ad}_{\pi(U)}\varphi_2(A)) = \pi^{-1}(\varphi_1(A)) = E_1$, и Ad_U задает изоморфизм $E_2 \to E_1$.

Обратно, предположим, что E_1 и E_2 эквивалентны посредством изоморфизма $\alpha : E_2 \to E_1$. Тогда $\alpha|_{\mathbb{K}}$ — автоморфизм $\mathbb{K}$, поэтому существует такой унитарный оператор U, что $\alpha|_{\mathbb{K}} = \mathrm{Ad}_U$. Для любых $T \in E_2$ и $K \in \mathbb{K}$ имеем

$$\alpha(T)(UKU^*) = \alpha(T)\alpha(K) = \alpha(TK) = UTKU^* = UTU^* \cdot UKU^*.$$

Поскольку объединение образов всех UKU^* (когда K пробегает множество компактных операторов) плотно в H, получаем, что $\alpha(T) = UTU^*$, т.е. инварианты Басби для E_1 и E_2 связаны с помощью $\mathrm{Ad}_{\pi(U)}$. $\square$

Определим еще одно отношение эквивалентности для существенных расширений произвольной C*-алгебры алгеброй компактных операторов.

Определение 5.58. Существенные расширения *слабо эквивалентны*, если их инварианты Басби φ_1, φ_2 связаны между собой формулой $\varphi_2 = \mathrm{Ad}_u \varphi_1$, где $u \in Q(H)$ — унитарный элемент алгебры Калкина.

Отметим, что если $U \in \mathbb{B}(H)$ унитарен, то $\pi(U) \in Q(H)$ также унитарен, но не для любого унитарного элемента $u \in Q(H)$ найдется унитарный оператор $U \in \mathbb{B}(H)$, для которого $\pi(U) = u$. Например, если T_z — оператор одностороннего сдвига, то $\pi(T_z)$ унитарен; если бы существовал унитарный оператор U с $\pi(U) = \pi(T_z)$, то $U = T_z + K$, где K — компактный оператор. Тогда $T(t) = T_z + tK$, $t \in [0, 1]$, задает непрерывное семейство фредгольмовых операторов, поэтому $\operatorname{ind} T_z = \operatorname{ind} T(0) = \operatorname{ind} T(1) = \operatorname{ind} U$, но $\operatorname{ind} T_z = -1$, а $\operatorname{ind} U = 0$.

Благодаря тому факту, что $H \oplus H \cong H$, можно определить сумму расширений как прямую сумму их инвариантов Басби. Пусть $i : H \to H \oplus H$ — изоморфизм гильбертовых пространств. Обозначим через $\imath : \mathbb{B}(H) \to \mathbb{B}(H \oplus H) = M_2(\mathbb{B}(H))$ индуцированный изоморфизмом i изоморфизм алгебр (через $M_n(A)$ обозначают алгебру матриц с коэффициентами из A), который, в свою очередь, индуцирует изоморфизмы $\imath_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to M_2(\mathbb{K})$ и $\bar{\imath} : Q(H) \to M_2(Q(H))$.

Если $\varphi_1, \varphi_2 : A \to Q(H)$ два инварианта Басби существенных расширений (т.е. два $*$-мономорфизма), то их сумму $\varphi_1 + \varphi_2$ определим формулой $(\varphi_1 + \varphi_2)(a) = \bar{\imath}^{-1}(\varphi_1(a) \oplus \varphi_2(a))$, $a \in A$. Отметим, что это тоже мономорфизм.

Задача 66. Пусть $j : H \to H \oplus H$ — другой изоморфизм гильбертовых пространств, $\bar{\jmath} : Q(H) \to M_2(Q(H))$ — индуцированный $*$-изоморфизм алгебр. Покажите, что существует такой унитарный оператор $U \in \mathbb{B}(H)$, что $\bar{\jmath}^{-1}(\varphi_1(a) \oplus \varphi_2(a)) = \mathrm{Ad}_U \bar{\imath}^{-1}(\varphi_1(a) \oplus \varphi_2(a))$, т.е. сумма не зависит от выбора изоморфизма i с точностью до эквивалентности.

Задача 67. Покажите, что операция суммы для существенных расширений коммутативна и ассоциативна с точностью до эквивалентности.

Определение 5.59. Существенное расширение $0 \to \mathbb{K} \to E \to A \to 0$ *тривиально*, если существует $*$-гомоморфизм $A \to E$, являющийся правым обратным к отображению факторизации $E \to A$.

Тривиальные расширения существуют. Пусть $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$ — представление C*-алгебры A без ядра (существует по теореме Гельфанда–Наймарка). Пусть $\overline{H} = H \oplus H \oplus \cdots$ — прямая сумма счетного числа гильбертовых пространств H, $\overline{\pi} : A \to \mathbb{B}(\overline{H})$ — прямая сумма представлений, $\overline{\pi}(a) = \pi(a) \oplus \pi(a) \oplus \cdots$. Положим $\varphi(a) = q(\overline{\pi}(a))$, где $q : \mathbb{B}(\overline{H}) \to Q(\overline{H})$ — гомоморфизм факторизации. Тогда $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

Определение 5.60. Существенные расширения $\varphi, \psi : A \to Q(H)$ *стабильно эквивалентны* (соотв. *слабо стабильно эквивалентны*), если существуют такие тривиальные существенные расширения $\lambda, \mu : A \to Q(H)$, что $\varphi + \lambda$ и $\psi + \mu$ эквивалентны (соотв. слабо эквивалентны).

Отметим, что в этом определении можно требовать существование, вместо двух тривиальных расширений λ и μ, одного — $\lambda + \mu$.

Определение 5.61. Обозначим через $\mathrm{Ext}(A)$ (соотв. $\mathrm{Ext}_w(A)$) множество классов стабильной эквивалентности (соотв. стабильной слабой эквивалентности) существенных расширений вида $0 \to \mathbb{K} \to E \to A \to 0$.

Эти множества имеют структуру абелевой полугруппы с операцией $+$.

Задача 68. Нулевой элемент задается любым тривиальным расширением.

Обычно, если A унитальна, рассматривают только унитальные расширения (т.е. те, у которых инвариант Басби $\varphi : A \to Q(H)$ унитален), хотя можно также работать с неунитальными расширениями.

Лемма 5.62. Ext *и* Ext_w *являются контравариантными функторами.*

Доказательство. Оба утверждения аналогичны, мы здесь докажем первое, т.е. функториальность Ext.

Пусть $\alpha : B \to A$ — $*$-гомоморфизм C*-алгебр, $\varphi : A \to Q(H)$ инвариант Басби. Естественно взять композицию $\varphi \circ \alpha : B \to Q(H)$, но так определенный инвариант Басби может не быть инъективным (а соответствующее расширение — не быть существенным). Но это легко исправить: пусть $\lambda : B \to Q(H)$ — инвариант Басби тривиального расширения. Положим $\alpha^*([\varphi]) = [\varphi \circ \alpha + \lambda]$, где через $[\cdot]$ обозначается класс эквивалентности.

Пусть $\varphi, \psi : A \to Q(H)$ стабильно эквивалентны, т.е. существуют такие тривиальные расширения, заданные $*$-гомоморфизмами $\mu, \nu : A \to Q(H)$ и унитарный оператор $U \in \mathbb{B}(H)$, что $\varphi + \mu = \mathrm{Ad}_U(\psi + \nu)$. Тогда

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \alpha + \lambda) + (\mu \circ \alpha + \lambda) &= (\varphi + \mu) \circ \alpha + \lambda + \lambda = \mathrm{Ad}_U(\psi + \nu) \circ \alpha + \lambda + \lambda \\ &= \mathrm{Ad}_U(\psi \circ \alpha + \lambda') + \mathrm{Ad}_U(\nu \circ \alpha + \lambda'), \end{aligned}$$

где $\lambda' = \mathrm{Ad}_{U^*} \lambda$. Ясно, что $\mu \circ \alpha + \lambda$ и $\mathrm{Ad}_U(\nu \circ \alpha + \lambda')$ тривиальны, поэтому $\varphi \circ \alpha + \lambda$ и $\psi \circ \alpha + \lambda'$ эквивалентны. Прибавляя к первому из них λ', а ко второму λ, получаем, что они стабильно эквивалентны. Таким образом, отображение $\alpha^* : \mathrm{Ext}(A) \to \mathrm{Ext}(B)$ определено корректно. Отметим, что сложности с прибавлением тривиальных расширений связаны с тем, что все инварианты Басби должны быть мономорфизмами.

Гомоморфность α^* проверяется тривиально. Остается проверить, что если $\beta : C \to B$ — $*$-гомоморфизм C*-алгебр, то $(\alpha \circ \beta)^* = \beta^* \circ \alpha^*$. Оставим это как упражнение. $\square$

Задача 69. Вычислите $\mathrm{Ext}(\mathbb{C})$.