Лекция 3 (8.03.2021)

Для более содержательных вычислений нам понадобится классификация изометрий.

Лемма 5.63. *Пусть $V \in \mathbb{B}(H)$ — изометрия. Тогда существует такое разложение $H = H_1 \oplus H_2$ в прямую сумму двух инвариантных подпространств (одно из которых может быть нулевым), что $V|_{H_1}$ — прямая сумма операторов S одностороннего сдвига, а $V|_{H_2}$ — унитарный оператор. Если V фредгольмов, то $V|_{H_1}$ унитарно эквивалентен S^n, где $n = \dim \operatorname{Coker} V$.*

Доказательство. Если V унитарен, то утверждение очевидно (с нулевым H_1). Если V неунитарная изометрия, то положим $N = (\operatorname{Im} V)^\perp$ и докажем следующее равенство:

$$\cap_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} V^n = \cap_{n=0}^{\infty} (V^n(N))^\perp. \tag{17}$$

Пусть $L \subset H$ — произвольное подпространство, $\xi \in L^\perp$, $\eta \in L$. Тогда $V\xi \in V(L^\perp)$, $V\eta \in V(L)$, и $V\xi \perp V\eta$, т.к. V изометрия. Поэтому $V(L^\perp) \subset V(L)^\perp$. Возьмем здесь $L = N$, и заменим V на V^n: $V^n(N^\perp) \subset V^n(N)^\perp$. Тогда $\operatorname{Im} V^{n+1} = V^n(V(H)) = V^n(N^\perp) \subset V^n(N)^\perp$.

Для доказательства обратного включения в (17) возьмем $\xi \in \cap_{n=0}^{\infty}(V^n(N))^\perp$ и докажем по индукции, что $\xi \in \operatorname{Im} V^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для $n = 0$ это тривиально. Для индукционного перехода предположим, что $\xi \in \operatorname{Im} V^n$, т.е. что существует такой вектор η, что $\xi = V^n \eta$. По предположению, $\xi \in (V^n N)^\perp$ для любого n, поэтому $\xi = V^n \eta \perp V^n N$, и из изометричности V^n получаем, что $\eta \perp N$, т.е. $\eta \in \operatorname{Im} V$, следовательно, $\xi = V^n \eta \in \operatorname{Im} V^{n+1}$. Итак, равенство (17) доказано.

Заметим, что подпространство $H_2 = \cap_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} V^n$, очевидно, является инвариантным для V, а из равенства (17) следует, что $H_1 = H_2^\perp$ есть замыкание линейной оболочки всех $V^n(N)$, которое тоже инвариантно для V, и $V = V|_{H_1} \oplus V|_{H_2}$. Второе слегаемое здесь унитарно, т.к. является изометрией, у которой образ совпадает с областью определения, а первое представляет собой прямую сумму односторонних сдвигов S в количестве, равном $\dim N$.

Если V фредгольмов, то $\dim N = n$ конечна, и легко видеть, что $S \oplus \cdots \oplus S$ (n слагаемых) унитарно эквивалентно S^n.

□

Лемма 5.64. *Пусть $u \in Q(H)$ — унитарный элемент алгебры Калкина. Тогда существует такая изометрия или ко-изометрия $U \in \mathbb{B}(H)$, что $q(U) = u$, где $q : \mathbb{B}(H) \to Q(H)$ — гомоморфизм факторизации. Если $V \in \mathbb{B}(H)$ и $q(V) = u$, то $\operatorname{ind} V = \operatorname{ind} U$.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathbb{B}(H)$, $T \in q^{-1}(u)$. Тогда T фредгольмов. Рассмотрим случай $\operatorname{ind} T \leq 0$ (случай положительного индекса аналогичен, только вместо изометрии мы получим ко-изометрию). Тогда $\dim \operatorname{Ker} T \leq \dim(\operatorname{Im} T)^\perp$. Определим оператор конечного ранга K нулевым на $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ и инъективным отображением на $\operatorname{Ker} T$, отображающим его в $(\operatorname{Im} T)^\perp$. Тогда $R = T + K$ фредгольмов (т.к. $q(R) = q(T) = u$) и имеет нулевое ядро. Поэтому R^*R обратим. Положим $U = R(R^*R)^{-1/2}$ (полярное разложение) и заметим, что $q(U) = u(u^*u)^{-1/2} = u$, и $U^*U = (R^*R)^{-1/2} R^*R (R^*R)^{-1/2} = 1$, т.е. U — изометрия. Если $V \in q^{-1}(u)$, то $q(U-V)=0$, и $K=U-V$ компактен. Непрерывность индекса для пути $[0,1]\ni t\mapsto U+tK$ дает $\operatorname{ind}U=\operatorname{ind}V$.

□

Отметим, что последнее утверджение Леммы означает, что индекс корректно определен для унитарных элементов алгебры Калкина.

Теорема 5.65. $\operatorname{Ext}(C(\mathbb{T}))=\mathbb{Z}$.

Доказательство. У $C(\mathbb{T})$ как у C*-алгебры имеется единственная образующая — функция z, поэтому любой инвариант Басби φ определяется своим значением на этой образующей. Пусть $\varphi(z)=u\in Q(H)$. Поскольку $|z|=1$, эта функция является унитарным элементом алгебры $C(\mathbb{T})$, поэтому u также унитарен (мы рассматриваем только унитальные инварианты Басби). Пусть $U\in\mathbb{B}(H)$ изометрия или ко-изометрия, $q(U)=u$. Покажем, что сопоставление $u\mapsto\operatorname{ind}U$ задает изоморфизм $\operatorname{Ext}(C(\mathbb{T}))\to\mathbb{Z}$. Если $\operatorname{ind}U\le 0$, то по Лемме 5.63, U унитарно эквивалентно S^n или $S^n\oplus V$, где S — оператор одностороннего сдвига, а V — унитарный. Если $\operatorname{ind}U\ge 0$, то U — ко-изометрия, унитарно эквивалентная $(S^*)^n$ или $(S^*)^n\oplus V$. Пусть $\varphi_1,\varphi_2 : C(\mathbb{T})\to Q(H)$ — два унитальных инварианта Басби, $\varphi_i(z)=q(U_i)\in Q(H)$, $i=1,2$. Если $\operatorname{ind}U_1=\operatorname{ind}U_2$, то φ_1 и φ_2 стабильно эквивалентны инварианту Басби, заданному формулой $\varphi(z)=q(S^n\oplus V)$ (или $\varphi(z)=q((S^*)^n\oplus V)$).

Отметим, что инвариант Басби тривиального расширения имеет вид $\lambda(z)=q(V)$, где V — унитарный оператор.

Если инварианты Басби φ_1 и φ_2 стабильно эквивалентны, то $\varphi_1(z)\oplus\lambda(z)$ и $\varphi_2(z)\oplus\mu(z)$ унитарно эквивалентны. Пусть T,R — фредгольмовы операторы, $q(T)=\varphi_1(z)$, $q(R)=\varphi_2(z)$. Пусть также U,V — унитарные операторы, $\lambda(z)=q(U)$, $\mu(z)=q(V)$. Тогда фредгольмовы операторы $T\oplus U$ и $R\oplus V$ унитарно эквивалентны. А у унитарно эквивалентных фредгольмовых операторов индексы равны, так как совпадают размерности ядра и коядра.

□

5.8. **Алгебры Кунца.** Пусть гильбертово пространство $H=H_1\oplus\cdots\oplus H_n$ разложено в прямую сумму $n\ge 2$ бесконечномерных слагаемых, и пусть $S_i : H\to H_i$, $i=1,\dots,n$, — изометрические изморфизмы. Тогда операторы S_i, $i=1,\dots,n$, являются изометриями, удовлетворяющими соотношению

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} S_iS_i^*=1. \tag{18}$$

Пусть $V_1,\dots,V_n$ — изометрии H, удовлетворяющие соотношению $\sum_{i=1}^n V_iV_i^*=1$. Из изометричности ($V_i^*V_i=1$, $i=1,\dots,n$) следует, что $P_i=V_iV_i^*$ — проекторы ($(P_i)^2=V_iV_i^*V_iV_i^*=P_i$, $P_i^*=P_i$), причем проекторы на бесконечномерные подпространства $K_i\subset H$. Из равенства

$$P_i=V_i^*(\sum\nolimits_{j=1}^{n} V_jV_j^*)V_i=P_i+\sum\nolimits_{j\ne i} V_i^*V_jV_j^*V_i$$

следует, что $\sum_{j\ne i}V_i^*V_jV_j^*V_i=0$. Но в этой сумме каждое слагаемое является положительным, т.к. имеет вид $(V_j^*V_i)^*(V_j^*V_i)$, поэтому $V_j^*V_i=0$ при $j\ne i$. Отсюда следует, что $P_jP_i=0$ при $j\ne i$, т.е. подпространства K_i, $i=1,\dots,n$, взаимно ортогональны, и в прямой сумме дают H. Тогда можно найти такой унитарный оператор $U \in \mathbb{B}(H)$, что $V_i = \mathrm{Ad}_U S_i$, $i = 1, \dots, n$, т.е. любые два набора изометрий, удовлетворяющих соотношению (18), унитарно эквивалентны. Поэтому данное соотношение определяет C*-алгебру как замкнутую $*$-подалгебру в $\mathbb{B}(H)$, порожденную изометриями $S_1, \dots, S_n$, удовлетворяющими данному соотношению. Эта C*-алгебра называется алгеброй Кунца и обозначается $\mathcal{O}_n$.

Для вычисления функтора расширений для алгебр Кунца нам понадобится следующее замечание. Определение фредгольмового оператора, теорема Аткинсона и индекс могут быть определены не только для операторов в фиксированном гильбертовом пространстве, но и для операторов, действующих из одного гильбертова пространства H_1 в другое, H_2. Фактор-пространство $Q(H_1, H_2) = \mathbb{B}(H_1, H_2)/\mathbb{K}(H_1, H_2)$ не является алгеброй, но обратимостm в алгебре Калкина можно заменить на условие, что для $u \in Q(H_1, H_2)$ существует поднятие $U \in \mathbb{B}(H_1, H_2)$, обратимое по модулю компактных операторов, т.е. существует такой $V \in \mathbb{B}(H_2, H_1)$, что UV и VU компактны. Более того, эти результаты могут быть обобщены даже на частичные изометрии в $Q(H_1, H_2)$. Элемент $u \in Q(H_1, H_2)$ называется частичной изометрией, если u^*u и uu^* — проекторы в $Q(H_1)$ и в $Q(H_2)$.

Рассмотрим задачу поднятия проекторов: пусть $\pi : E \to A$ — $*$-эпиморфизм, $p \in A$ — проектор. Существует ли такой проектор $P \in E$, что $\pi(P) = p$? Вообще говоря, ответ отрицательный.

Пример 5.66. Пусть $E = C[0,1]$, $A = \mathbb{C}^2$, $\pi(f) = (f(0), f(1))$, где $f \in C[0,1]$. Проектор $p = (0,1) \in \mathbb{C}^2$ нельзя поднять до проектора в $C[0,1]$, т.к. любое поднятие $f \in C[0,1]$ должно удовлетворять равенствам $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и при этом быть проектором, но f обязана принимать все промежуточные значения между 0 и 1, т.е. не может удовлетворять равенству $f^2 = f$.

Тем не менее, если $E = \mathbb{B}(H)$, а $A = Q(H)$, то задача поднятия проекторов решается положительно.

Лемма 5.67. *Пусть $p \in Q(H)$ — проектор. Тогда существует такой проектор $P \in \mathbb{B}(H)$, что $q(P) = p$.*

Доказательство. Начнем с произвольного поднятия $T \in \mathbb{B}(H)$, $q(T) = p$. Заменим его на $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$. Тогда $q(R) = \frac{1}{2}(p + p^*) = p$. Таким образом, у p существует самосопряженное поднятие (это верно для любых C*-алгебр). Заметим, что $q(R^2 - R) = q(R)^2 - q(R) = p - p = 0$, поэтому $R^2 - R$ — компактный оператор. Рассмотрим теперь спектр R. Предположим, что $[0,1] \subset \mathrm{Sp}\, R$. Тогда $[-1/4, 0] \subset \mathrm{Sp}(R^2 - R)$ — это противоречит компактности $R^2 - R$ (единственная неизолированная точка может быть только 0). Значит, не весь отрезок $[0,1]$ лежит в спектре R, т.е. существуют такие точка $\alpha \in (0,1)$ и $\varepsilon > 0$, что $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \cap \mathrm{Sp}\, R = \emptyset$. Пусть h — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, равная 0 слева от $\alpha - \varepsilon$ и равная 1 справа от $\alpha + \varepsilon$. Положим $P = h(R)$. Тогда $P^2 = h^2(R) = h(R) = P$ и $q(P) = q(h(R)) = h(q(R)) = h(p) = p$.

$\square$