Лекция 4 (15.03.2021)

Еще одна особенность алгебры $\mathbb{B}(H)$ — наличие полярного разложения (на самом деле, они имеет место также в алгебрах фон Неймана, и даже в несколько большем классе так называемых AW^*-алгебр).

Лемма 5.68. *Пусть $A \in \mathbb{B}(H)$. Тогда существует единственная частичная изометрия V, удовлетворяющая условиям $\operatorname{Ker} V = \operatorname{Ker} A^*A$ и $A = VB$, где $B = (A^*A)^{1/2}$.*

Доказательство. Поскольку $\|B\xi\|^2 = (B\xi, B\xi) = (B^2\xi, \xi) = (A^*A\xi, \xi) = (A\xi, A\xi) = \|A\xi\|^2$, $\xi \in H$, на $\operatorname{Im} B$ можно определить линейное отображение V равенством $V(B\xi) = A\xi$. Его изометричность позволяет продолжить его на замыкание образа B. Из-за самосопряженности $\overline{\operatorname{Im} B} = (\operatorname{Ker} B)^\perp$, кроме того, $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} B^2$, т.к. если $B^2\xi = 0$, то $0 = (\xi, B^2\xi) = (B\xi, B\xi) = \|B\xi\|^2$. Равенство $A = VB$ следует из построения.

Для доказательства единственности пусть V удовлетворяет формулировке Леммы. Тогда $A^*A = BV^*VB = BEB$, где $E = V^*V$ — проектор на начальное пространство частичной изометрии V, которое есть $(\operatorname{Ker} V)^\perp = \operatorname{Im} B$. Поэтому $B = EB$, следовательно, $A^*A = B^2$. Равенство $V(B\xi) = A\xi$ однозначно задает V на $\overline{\operatorname{Im} A^*A}$, а на $\operatorname{Ker} A^*A$ V нулевой (тоже однозначно).

$\square$

Задача 70. Проверьте, что если $P, Q \in \mathbb{B}(H)$ — проекторы, $A = VB$ — полярное разложение, и $A = PAQ$, то $V = PVQ$.

Лемма 5.69. *Пусть $v \in \mathbb{B}(H_1, H_2)$ — частичная изометрия, $P \in \mathbb{B}(H_2)$, $Q \in \mathbb{B}(H_1)$ — такие проекторы, что $q(P) = vv^*$, $q(Q) = v^*v$. Тогда существует такая частичная изометрия $V \in \mathbb{B}(H_1, H_2)$, что $V = PVQ$ и $q(V) = v$. Кроме того, $VV^* \leq Q$, $V^*V \leq P$, значения $\dim(Q - VV^*)$ и $\dim(P - V^*V)$ конечны, и разность $\dim(Q - VV^*) - \dim(P - V^*V)$ не зависит от выбора V.*

Доказательство. Возьмем произвольное поднятие $T \in q^{-1}(v)$. Запишем полярное разложение оператора $PTQ = VA$, где V — частичная изометрия, а $A = (QT^*PTQ)^{1/2}$ — положительный оператор. Тогда

$$q(A) = q(QT^*PTQ)^{1/2} = (v^*vv^*vv^*v)^{1/2} = (v^*v)^{1/2} = v^*v,$$

и $q(PTQ) = vv^*vv^*v = v$, и равенство $PTQ = VA$ означает, что $v = q(V)v^*v$. Обозначим $q(V) = x$, $v^*v = r$, $vv^* = p$. Тогда $x^*x = rx^*pxr \leq r$ (поскольку $x^*px \leq 1$), поэтому проекторы x^*x и r коммутируют, и из равенства $v = xr$ следует, что $r = v^*v = rx^*xr = x^*x$. Так как x — частичная изометрия, $x = xx^*x = xr = v$.

Рассмотрим V как оператор из $\mathbb{B}(P(H), Q(H))$. Он обратим по модулю компактных операторов ($q(V^*V) = r = q(P)$, $q(VV^*) = p = q(Q)$), следовательно, фредгольмов. Поскольку $V = PVQ$,

$$V^*V = QV^*PVQ \leq Q, \quad VV^* = PVQV^*P \leq P,$$

и $P - V^*V$, $Q - VV^*$ проекторы конечного ранга.

Индекс V как оператора из $\mathbb{B}(P(H), Q(H))$ равен

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} V &= \dim \operatorname{Ker} V - \dim \operatorname{Coker} V = \dim \operatorname{Ker} V - \dim \operatorname{Ker} V^* \\ &= \dim \operatorname{Ker} V^*V - \dim \operatorname{Ker} VV^* = \dim(Q - V^*V) - \dim(P - VV^*) \end{aligned}$$

и не зависит от выбора V (т.к. разные выборы отличаются на компактный оператор). $\square$

Нам понадобится еще одно свойство фредгольмовых операторов, которое я забыл сформулировать вместе с остальными.

Лемма 5.70. *Пусть S, T — фредгольмовы операторы. Тогда* $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное семейство F_t, $t \in [0, \pi/2]$, операторов в $H \oplus H$, $F_t = \begin{pmatrix} S & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \cdot 1 & -\sin t \cdot 1 \\ \sin t \cdot 1 & \cos t \cdot 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$. При каждом t оператор F_t фредгольмов (т.к. его класс эквивалентности в алгебре Калкина обратим). Поскольку $F_0 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, а $F_{\pi/2} = \begin{pmatrix} ST & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T = \operatorname{ind} F_0 = \operatorname{ind} F_{\pi/2} = \operatorname{ind}(ST) + \operatorname{ind} 1 = \operatorname{ind}(ST).$$

$\square$

Теорема 5.71. $\operatorname{Ext}(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Построим отображение $f : \operatorname{Ext}(\mathcal{O}_n) \to \mathbb{Z}$. Пусть $\varphi : \mathcal{O}_n \to Q(H)$ — $*$-гомоморфизм (инвариант Басби). Положим $v_\varphi = (\varphi(S_1) \quad \varphi(S_2) \quad \cdots \quad \varphi(S_n)) \in Q(H^n, H)$. Заметим, что

$$v_\varphi v_\varphi^* = \sum\nolimits_{i=1}^n \varphi(S_i)\varphi(S_i^*) = \varphi(\sum\nolimits_{i=1}^n S_i S_i^*) = \varphi(1) = 1,$$

поэтому v_φ — частичная изометрия. Кроме того,

$$v_\varphi v_\varphi^* = (\varphi(S_i)\varphi(S_j^*))_{i,j=1}^n = (\varphi(S_i S_j^*))_{i,j=1}^n = 1^{(n)}$$

— единица в $Q(H^n)$. Поэтому в Лемме 5.69 проекторы P и Q можно выбрать равными $1^{(n)}$ и 1.

По Лемме 5.69, определен индекс $\operatorname{ind} v_\varphi$. Обозначим его через $f(\varphi)$. Пусть $V_\varphi \in \mathbb{B}(H^n, H)$ — поднятие v_φ, являющееся частичной изометрией. Тогда $f(\varphi) = \operatorname{ind} V_\varphi$, рассматриваемого как оператор в $\mathbb{B}(P(H^n), Q(H))$, где P, Q — соответствующие проекторы (заметим, что Q можно считать равным 1). Если φ тривиально, то V_φ — обратимая изометрия между $P(H^n)$ и H, поэтому $f(\varphi) = 0$. Кроме того, f, очевидно, переводит суммы в суммы. Осталось проверить независимость f от представителя в классе стабильной эквивалентности. Если $\psi : \mathcal{O}_n \to Q(H)$ — $*$-гомоморфизм, и $U \in \mathbb{B}(H)$ — унитарный оператор, удовлетворяющие соотношению $\psi = \operatorname{Ad}_{q(U)} \varphi$, то $v_\psi = q(U) v_\varphi q(U^{(n)})^*$, где $U^{(n)} \in \mathbb{B}(H^n)$ — диагональная матрица размерности n с операторами U на диагонали. Тогда $V_\psi - U V_\varphi (U^{(n)})^* \in \mathbb{K}(H^n, H)$ и

$$f(\psi) = \operatorname{ind} V_\psi = \operatorname{ind} U + \operatorname{ind} V_\varphi + \operatorname{ind}(U^{(n)})^* = \operatorname{ind} V_\varphi = f(\varphi),$$

т.к. $\operatorname{ind} U = 0$.

Если φ тривиально, то существует представление $\lambda : \mathcal{O}_n \to \mathbb{B}(H)$, для которого $q \circ \lambda = \varphi$. Положим $V_i = \lambda(S_i)$, $i = 1, \dots, n$. Оператор $V_\varphi = (V_1 \quad V_2 \quad \cdots \quad V_n)$ унитарен и $p(V_\varphi) = v_\varphi$, поэтому $f(\varphi) = \operatorname{ind} V_\varphi = 0$. Покажем обратное, т.е. что если $f(\varphi) = 0$, то φ тривиально.

Пусть $f(\varphi) = 0$. Поскольку $\operatorname{ind} v_\varphi = 0$, произвольное поднятие можно изменить на компактный оператор так, чтобы получить унитарный оператор, поэтому можно сразу считать, что V_φ унитарен и $p(V_\varphi) = v_\varphi$. Унитарность V_φ означает, что $(V_i^* V_j)_{i,j=1}^n = 1^{(n)}$. В частности, отсюда следует, что $V_i^* V_i = 1$, т.е. V_i — изометрия для каждого i. А еще выполнено равенство $\sum_{i=1}^n V_i V_i^* = 1$, поэтому операторы $V_1, \ldots, V_n$ удовлетворяют соотношениям, определяющим алгебру Кунца $\mathcal{O}_n$. Тогда отображение $\lambda : S_i \mapsto V_i$ задает представление $\mathcal{O}_n$ в $\mathbb{B}(H)$ (причем, с нулевым ядром). Это представление удовлетворяет равенству $q \circ \lambda = \varphi$, поэтому является тривиальным.

Покажем, что f сюръективен. Возьмем в бесконечномерном пространстве $S_1(H) \subset H$ изометрию S_0 индекса $-k$ или коизометрию индекса k, и определим $\varphi : \mathcal{O}_n \to Q(H)$ равенствами $\varphi(S_1) = q(SS_1)$ и $\varphi(S_i) = q(S_i)$ при $i \geq 2$. Тогда $V_\varphi = (SS_1 \;\; S_2 \;\; \cdots \;\; S_n)$. Вычислим

$$\begin{aligned}
f(\varphi) &= \dim(1^{(n)} - V_\varphi^* V_\varphi) - \dim(1 - V_\varphi^* V_\varphi) \\
&= \dim(1^{(n)} - \operatorname{diag}\{S_1^* S^* S S_1, S_2^* S_2, \cdots, S_n^* S_n\}) \\
&- \dim(1 - SS_1 S_1^* S^* - S_2 S_2^* - \cdots - S_n S_n^*) \\
&= \dim(S_1^* S_1 - S_1^* S^* S S_1) - \dim(S_1 S_1^* - SS_1 S_1^* S^*) \\
&= \dim(S_1^*(P_1 - S^* S) S_1) - \dim(P_1 - SP_1 S^*) \\
&= \dim(P_1 - S^* S) - \dim(P_1 - SP_1 S^*) = \operatorname{ind} S,
\end{aligned}$$

где $P_1 = S_1 S_1^*$ — проектор на $S_1(H)$.

Наконец, заметим, что из сюръективности f следует, что $\operatorname{Ext} \mathcal{O}_n$ не просто полугруппа, а группа, а f — гомоморфизм групп. Действительно, пусть $\varphi : \mathcal{O}_n \to Q(H)$ — инвариант Басби, и пусть $f(\varphi) = k$. Возьмем такой инвариант Басби ψ, что $f(\psi) = -k$. Тогда $f(\varphi + \psi) = 0$, т.е. $\varphi + \psi$ тривиален. Следовательно, любой элемент полугруппы $\operatorname{Ext} \mathcal{O}_n$ имеет обратный, на котором f принимает обратное значение.

□

Теорема 5.72. $\operatorname{Ext}_w(\mathcal{O}_n) \cong \mathbb{Z}/n-1$.

Доказательство. Посоклььку отношение слабой эквивалентности уважает суммы и нулевой элемент, а $\operatorname{Ext}(\mathcal{O}_n)$ является группой, фактор-полугруппа $\operatorname{Ext}_w(\mathcal{O}_n)$ является группой, а отображение факторизации $\operatorname{Ext}(\mathcal{O}_n) \to \operatorname{Ext}_w(\mathcal{O}_n)$ является гомоморфизмом групп. Ядро этого гомоморфизма — элементы, слабо эквивалентные нулевому.

Пусть $\varphi : \mathcal{O}_n \to Q(H)$ — тривиальный инвариант Басби, и пусть $w \in QH)$ — унитарный элемент алгебры Калкина. Тогда $\psi = \operatorname{Ad}_w \varphi$ слабо эквивалентен φ. Пусть $W \in \mathbb{B}(H)$ — поднятие w, т.е. $q(W) = w$, и пусть $\operatorname{ind} W = k$. Тогда

$$V_\psi = (WV_1W^* \;\; WV_2W^* \;\; \cdots \;\; WV_nW^*) = WV_\varphi (W^{(n)})^*,$$

поэтому

$$\begin{aligned}
f(\psi) &= \operatorname{ind} V_\psi = \operatorname{ind} WV_\varphi (W^{(n)})^* = \operatorname{ind} W + \operatorname{ind} V_\varphi + \operatorname{ind}(W^{(n)})^* \\
&= \operatorname{ind} W + f(\varphi) - n \operatorname{ind} W = f(\varphi) - k(n-1) = -k(n-1),
\end{aligned}$$

т.е. ядро фактор-гомоморфизма — подгруппа $(n-1)\mathbb{Z}$.

□

Следствие 5.73. *C^*-алгебры $\mathcal{O}_n$ и $\mathcal{O}_m$ неизоморфны при $m \neq n$.*