Лекция 5 (22.03.2021)

5.9. **Алгебры иррационального вращения.** Пусть $\theta \in [0,1]$. Рассмотрим на окружности $\mathbb{T}$ координату $t \in \mathbb{R}$ (по модулю целых чисел). Для периодической функции $t \mapsto f(t)$ на окружности обозначим через M_f оператор умножения на f в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Пусть $U = M_z$, где $z(t) = e^{2\pi it}$. Рассмотрим также оператор V поворота на угол $2\pi\theta$, $Vf(t) = f(t-\theta)$.

Задача 71. Проверьте, что $UV = e^{2\pi i\theta}VU$.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\Lambda \subset U(H) \times U(H)$ — множество пар (U,V) унитарных операторов, удовлетворяющих соотношению $UV = e^{2\pi i\theta}VU$. Для $\lambda \in \Lambda$ обозначим пару, заданную этим λ через (U_λ, V_λ). Рассмотрим прямую сумму $\widetilde{H} = \oplus_\Lambda H$ пространств H в количестве Λ, и обозначим через $A_\theta = C^*(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ C*-алгебру, порожденную операторами $\widetilde{U} = \oplus_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ и $\widetilde{V} = \oplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$.

Лемма 5.74. *C^*-алгебра $C^*(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ — универсальная C^*-алгебра, заданная соотношением $UV = e^{2\pi i\theta}VU$, с унитарными U и V, т.е. для любой C^*-алгебры B, порожденной унитарными элементами u, v с соотношением $uv = e^{2\pi i\theta}vu$, существует эпиморфизм $A_\theta \to B$, переводящий $\widetilde{U}$ в u, а $\widetilde{V}$ в v.*

Доказательство. Заметим, что B сепарабельна. Поэтому существует ее точное представление π в сепарабельном гильбертовом пространстве, поэтому пара $(\pi(u), \pi(v))$ содержится среди прямых слагаемых в $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$. Поэтому $*$-гомоморфизм, заданный на образующих формулой $\widetilde{U} \mapsto u$, $\widetilde{V} \mapsto v$, не увеличивает норму, значит, является сюръективным.

□

Определение 5.75. C*-алгебра $A_\theta = C^*(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ называется алгеброй вращения. Если θ иррационально, то она называется алгеброй иррационального вращения.

Для любых двух комплексных чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = |\mu| = 1$, операторы $\lambda\widetilde{U}$ и $\mu\widetilde{V}$ унитарны и удовлетворяют соотношению $UV = e^{2\pi i\theta}VU$. Поэтому отображение, заданное на образующих формулой $\widetilde{U} \mapsto \lambda\widetilde{U}$, $\widetilde{V} \mapsto \mu\widetilde{V}$, продолжается до эндоморфизма алгебры A_θ. А так как паре чисел $\overline{\lambda}, \overline{\mu}$ соответствует обратный эндоморфизм, то это автоморфизм. Обозначим его через $\rho_{\lambda,\mu}$.

Из того, что некоммутативные многочлены от $\widetilde{U}$, $\widetilde{U}^*$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{V}^*$ плотны в A_θ, а автоморфизмы ограничены по норме единицей, следует, что отображение $f : \mathbb{T}^2 \to A_\theta$, $f(\lambda,\mu) = \rho_{\lambda,\mu}(a)$ непрерывно для каждого $a \in A_\theta$. Непрерывные функции со значениями в Банаховом пространстве можно интегрировать по Риману, поэтому определены отображения $\Phi_1, \Phi_2 : A_\theta \to A_\theta$, заданные формулами $\Phi_1(a) = \int_0^1 \rho_{2\pi it,1}(a)\,dt$, $\Phi_2(a) = \int_0^1 \rho_{1,2\pi it}(a)\,dt$.

Определение 5.76. Пусть A — C*-алгебра, $B \subset A$ — ее C*-подалгебра. Линейное отображение $E : A \to B$ называется *условным ожиданием*, если оно положительно (т.е. ереводит положительные элементы в положительные), $E^2 = E$ и $\|E\| = 1$. Оно называется *верным*, если из $a \geq 0$ и $E(a) = 0$ следует, что $a = 0$.

Следующее утверждение сформулировано для Φ_1, но аналогичное утверждение для Φ_2 верно и доказывается точно так же.

Лемма 5.77. *$\Phi_1 : A_\theta \to C^*(\widetilde{U})$ — верное условное ожидание. Оно удовлетворяет равенствам*

$$\Phi_1(f(\widetilde{U})ag(\widetilde{U})) = f(\widetilde{U})\Phi_1(a)g(\widetilde{U})$$

для любых $f, g \in C(\mathbb{T})$, $a \in A_\theta$ и

$$\Phi_1(\sum\nolimits_{k,l} a_{kl}\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l) = \sum\nolimits_k a_{k0}\widetilde{U}^k$$

для любой конечной линейной комбинации $\sum_{k,l} a_{kl}\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l$, и

$$\Phi_1(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum\nolimits_{j=-n}^{n} \widetilde{U}^j a \widetilde{U}^{-j}$$

для любого $a \in A_\theta$.

Доказательство. Оценим норму интегральной суммы:

$$\| \sum\nolimits_m \rho_{1,2\pi i t_m}(a)\Delta t\| \le \max_m \|\rho_{1,2\pi i t_m}(a)\| \sum\nolimits_m \Delta t = \|a\|.$$

Переходя к пределу, получаем $\|\Phi_1(a)\| \le \|a\|$ для любого $a \in A_\theta$. Поскольку $\Phi_1(1) = 1$, получаем $\|\Phi_1\| = 1$.

Поскольку $\rho_{1,2\pi i t}(\widetilde{U}) = \widetilde{U}$, автоморфизм $\rho_{1,2\pi i t}$ тождественный на $C^*(\widetilde{U}) \cong C(\mathbb{T})$ (спектр $\widetilde{U}$ — вся единичная окружность, т.к. $\widetilde{U}$ унитарен, а среди его прямых слагаемых содержится оператор умножения на функцию $e^{2\pi i t}$). Поэтому

$$\begin{aligned}\Phi_1(f(\widetilde{U})ag(\widetilde{U})) &= \int_0^1 \rho_{1,2\pi i t}(f(\widetilde{U}))\rho_{1,2\pi i t}(a)\rho_{1,2\pi i t}(g(\widetilde{U}))\,dt \\ &= f(\widetilde{U})\int_0^1 \rho_{1,2\pi i t}(a)\,dt\; g(\widetilde{U}) = f(\widetilde{U})\Phi_1(a)g(\widetilde{U}).\end{aligned}$$

Простое вычисление

$$\Phi_1(\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l) = \widetilde{U}^k \int_0^1 \rho_{1,2\pi i t}(\widetilde{V}^l)\,dt = \widetilde{U}^k \int_0^1 e^{2\pi i l t}\,dt\;\widetilde{V}^l = \begin{cases} 0, & l \ne 0 \\ \widetilde{U}^k, & l = 0 \end{cases}$$

показывает, что образ Φ_1 содержит все непрерывные функции от $\widetilde{U}$, поэтому $\Phi_1^2 = \Phi_1$.

Если $a \ge 0$ и $\Phi_1(a) = 0$, то подинтегральная функция тождественно равна 0, следовательно, $a = 0$.

Последнее равенство следует из вычисления

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum\nolimits_{j=-n}^{n}\widetilde{U}^j(\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l)\widetilde{U}^{-j} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum\nolimits_{j=-n}^{n} e^{2\pi i j l\theta}\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\Big(\frac{\sin(2n+1)\pi l\theta}{\sin \pi l\theta}\Big)\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l \\ &= \delta_{l0}\widetilde{U}^k = \Phi_1(\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l).\end{aligned}$$

Пользуясь непрерывностью и линейностью, в этом вычислении можно заменить $\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l$ на произвольное $a \in A_\theta$.

$\square$

Композиция отображений Φ_1 и Φ_2 отображает любой элемент в скаляр, $\Phi_1(\Phi_2(a)) = \tau(a)\cdot 1$.

Следствие 5.78. *$\Phi_1\Phi_2 = \Phi_2\Phi_1$, и $\tau : A_\theta \to \mathbb{C}$ — верный след на A_θ.*

Доказательство. Коммутирование легко проверяется на мономах $\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l$:

$$\Phi_1\Phi_2(\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l) = \Phi_2\Phi_1(\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l) = \begin{cases} 1, & k = l = 0 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положительность и верность τ следуют из этих же свойств Φ_1 и Φ_2. Т.к. $\tau(1) = \|\tau\|$, функционал τ является состоянием.

Остается проверить, что $\tau(ab) = \tau(ba)$, что тоже достаточно проверить на мономах:

$$\begin{aligned} \tau((\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l)(\widetilde{U}^m\widetilde{V}^n)) &= e^{-2\pi i l m\theta}\tau(\widetilde{U}^{k+m}\widetilde{V}^{l+n}) \\ &= \begin{cases} e^{-2\pi i l m\theta}, & \text{если } k+m = l+n = 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \\ \tau((\widetilde{U}^m\widetilde{V}^n)(\widetilde{U}^k\widetilde{V}^l)) &= e^{-2\pi i k n\theta}\tau(\widetilde{U}^{k+m}\widetilde{V}^{l+n}) \\ &= \begin{cases} e^{-2\pi i k n\theta}, & \text{если } k+m = l+n = 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \end{aligned}$$

Но, если $k + m = l + n = 0$, то $lm = kn$, и левые части равны.

□

Лемма 5.79. *След τ является единственным следом на A_θ.*

Доказательство. Пусть $\sigma : A_\theta \to \mathbb{C}$ — след. Тогда $\sigma(\widetilde{U}^j a\widetilde{U}^{-j}) = \sigma(a)$ для любого $a \in A_\theta$. Тогда

$$\sigma(a) = \lim_{n\to\infty} \sigma\Big(\frac{1}{2n+1}\sum\nolimits_{j=-n}^{n} \widetilde{U}^j a\widetilde{U}^{-j}\Big) = \sigma(\Phi_1(a)).$$

Аналогично,

$$\sigma(a) = \sigma(\Phi_2(a)) = \sigma(\Phi_1\Phi_2(a)) = \sigma(\tau(a)1) = \tau(a)\sigma(1) = \tau(a).$$

□

Теорема 5.80. *Алгебра A_θ проста. Если U, V унитарные операторы, удовлетворяющие соотншению $UV = e^{2\pi i\theta}VU$, то C^*-алгебра $C^*(U, V)$, ими порожденная, канонически изоморфна A_θ.*

Доказательство. Пусть $J \subset A_\theta$ — нетривиальный идеал. Выберем в нем ненулевой положительный элемент $a \in J$. Поскольку $\widetilde{U}^j a\widetilde{U}^{-j} \in J$, получаем $\Phi_1(J) \subset J$. Аналогично, $\Phi_2(J) \subset J$. Следовательно, $\tau(a)1 = \Phi_1\Phi_2(a) \in J$. По предположению, $\tau(a) \neq 0$, значит, $1 \in J$, откуда получаем, что $J = A_\theta$.

Из простоты A_θ следует, что каноническое отображение $A_\theta \to C^*(U, V)$, $\widetilde{U} \mapsto U$, $\widetilde{V} \mapsto V$, является изоморфизмом.

□

Задача 72. Где использовалась иррациональность θ? Если $\theta = 0$, алгебра A_θ, очевидно, не является простой.

Задача 73. Проверьте, что алгебры A_θ и $A_{1-\theta}$ изоморфны.

Теорема 5.81. *Для любого $\alpha \in (\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}) \cap [0, 1]$ существует такой проектор $p \in A_\theta$, что $\tau(p) = \alpha$.*

Доказательство. Можно считать, что $0 < \theta < 1/2$. Мы отождествляем A_θ с C*-алгеброй, порожденной оператором умножения на $e^{2\pi it}$ и оператором сдвига на θ в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Обозначим через M_f, $f \in C(\mathbb{T})$, оператор умножения на f, а через f_θ — функцию $t \mapsto f(t-\theta)$, т.е. Vf. Тогда $VM_f = M_{f_\theta}V$. Плотное множество элементов в A_θ может быть записано в виде $\sum_j M_{f_j}V^j$, и $\tau(\sum_j M_{f_j}V^j) = \tau(M_{f_0}) = \int_0^1 f_0(t)\,dt$.

Будем искать проекторы в виде $p = M_gV + M_f + M_hV^*$. Равенство $p^* = p$ дает $\overline{f} = f$ и $h(t) = \overline{g(t+\theta)}$. С учетом этих соотношений, равенство $p^2 = p$ дает

$$g(t)g(t-\theta) = 0,$$
$$g(t)(1 - f(t) - f(t-\theta)) = 0,$$
$$f(t) - f(t)^2 = |g(t)|^2 + |g(t-\theta)|^2.$$

Эти уравнения имеют, в частности, следующее решение (с произвольным $\varepsilon > 0$, $\theta + \varepsilon < 1/2$):

$$f(t) = \begin{cases} t/\varepsilon, & \text{при } 0 \le t \le \varepsilon \\ 1, & \text{при } \varepsilon \le t \le \theta \\ (\theta + \varepsilon - t)/\varepsilon, & \text{при } \theta \le t \le \theta + \varepsilon \\ 0, & \text{при } \theta + \varepsilon \le t \le 1, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{f(t) - f(t)^2}, & \text{при } \theta \le t \le \theta + \varepsilon \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Для этого проектора получаем $\tau(p) = \int_0^1 f(t)\,dt = \theta$.

Заметим, что $UV^k = e^{2\pi ik\theta}V^kU$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, поэтому A_θ содержит в качестве подалгебры алгебру $A_{k\theta}$. Заменяя в предыдущих уравнениях V на V^k, а θ на дробную часть $\{k\theta\}$, получаем проектор со следом, равным $\{k\theta\}$. Таким образом можно получить проектор со следом, равным любому значению из $(\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}) \cap [0, 1]$.

$\square$

Замечание 5.82. В этой теореме указаны все возможные значения для следа проектора в A_θ, но мы это вряд ли успеем доказать в рамках нашего курса.