Лекция 6 (29.03.2021)

5.10. **Групповые C*-алгебры.** Пусть G — группа. Для простоты мы будем рассматривать только дискретные группы (т.е. без топологии) и мы будем предполагать их счетными.

Пусть $\mathbb{C}[G]$ — множество всех комплекснозначных функций на G с конечным носителем. Обозначим через δ_g характеристическую функцию точки $\{g\} \subset G$, тогда любая функция из $\mathbb{C}[G]$ может быть записана в виде конечной суммы $\sum_g \alpha_g \delta_g$, $\alpha_g \in \mathbb{C}$. Для $f, h \in \mathbb{C}[G]$ определим их произведение (*конволюцию*) формулой $(f \star h)(g) = \sum_{\gamma \in G} f(\gamma) h(\gamma^{-1} g)$. Инволюцию на $\mathbb{C}[G]$ определим формулой $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$. Легко видеть, что $\mathbb{C}[G]$ с этими операциями является $*$-алгеброй, и функция δ_e, где $e \in G$ — нейтральный (единичный) элемент, является единицей в $\mathbb{C}[G]$.

Пусть π — унитарное представление G в гильбертовом пространстве H. Его можно продолжить до отображения $\tilde{\pi} : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{B}(H)$ формулой $\tilde{\pi}(\sum_g \alpha_g \delta_g) = \sum_g \alpha_g \pi(g)$. Поскольку $\tilde{\pi}(f \star h) = \tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(h)$ и $\tilde{\pi}(f^*) = \tilde{\pi}(f)^*$, видим, что $\tilde{\pi}$ — представление $*$-алгебры. Обратно, любое унитарное $*$-представление $\tilde{\pi}$ алгебры $\mathbb{C}[G]$ определяет унитарное представление группы G формулой $\pi(g) = \tilde{\pi}(\delta_g)$ (унитарность следует из равенства $\delta_g \star \delta_{g^{-1}} = \delta_e$).

Для любого унитарного представления π of G в гильбертовом пространстве H определим C*-алгебру $C^*_\pi(G)$ как замыкание (по норме) множества всех операторов вида $\sum_g \alpha_g \pi(g)$. Другими словами, можно определить полунорму $\|\cdot\|_\pi$ на $\mathbb{C}[G]$ формулой $\|\sum_g \alpha_g \delta_g\|_\pi := \|\sum_g \alpha_g \pi(g)\|$. Тогда $N_\pi = \{f \in \mathbb{C}[G] : \|f\|_\pi = 0\}$ — идеал, и определена $*$-фактор-алгебра $\mathbb{C}[G]/N_\pi$. Она удовлетворяет всем аксиомам C*-алгебры, кроме полноты, и мы можем ее пополнить по норме $\|\cdot\|_\pi$. Это пополнение является C*-алгеброй. Мы обозначим ее через $C^*_\pi(G)$.

Мы будем рассматривать только унитарные представления групп.

Любая группа обладает тривиальным представлением τ, отображающим все элементы группы в 1, т.е. $\tau(g) = 1$ для любого $g \in G$. Легко видеть, что $C^*_\tau(G) \cong \mathbb{C}$.

Еще одно специальное представление группы G называется *регулярным* представлением. Пусть $H = l_2(G)$ — множество всех квадратично-нитегрируемых комплекснозначных функций на G. Тогда формула $\lambda(g)f(\gamma) = f(g^{-1}\gamma)$ задает унитарное представление λ. C*-алгебра $C^*_r(G) = C^*_\lambda(G)$ называется *редуцированной* C*-алгеброй группы G.

Еще одно представление u можно получить, взяв прямую сумму *всех* неприводимых унитарных представлений. Это представление называется *универсальным* представлением, а соответствующая C*-алгебра $C^*(G) = C^*_u(G)$ называется C*-алгеброй (или полной C*-алгеброй) группы G.

Определение 5.83. Пусть π и σ — представления группы G. Говорят, что σ *слабо содержит* π, если $\|f\|_\pi \leq \|f\|_\sigma$ для любой $f \in \mathbb{C}[G]$. Это дает частичный порядок на множестве представлений группы G.

Задача 74. Покажите, что если σ слабо содержит π, то тождественное отображение $\mathbb{C}[G]$ на себя продолжается до сюръективного $*$-гомоморфизма $C^*_\sigma(G) \to C^*_\pi(G)$. В частности, тодественное отображение продолжается до сюръективного $*$-гомоморфизма $C^*(G) \to C^*_r(G)$.

5.10.1. *Групповые C^*-алгебры свободных групп.* Свободная группа $\mathbb{F}_2$ порождена двумя образующими без соотношений. Любое унитарное представление группы $\mathbb{F}_2$ определено двумя унитарными операторами, U и V. Пусть (U_α, V_α) — множество неприводимых унитарных пар операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда групповая C*-алгебра изоморфна $C^*(\oplus_\alpha U_\alpha, \oplus_\alpha V_\alpha)$.

Теорема 5.84. *Существует такая последовательность π_n, $n \in \mathbb{N}$, конечномерных представлений C^*-алгебры $C^*(\mathbb{F}_2)$, что представление $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\pi_n$ является верным.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{C}[\mathbb{F}_2]$ плотна в $C^*(\mathbb{F}_2)$, групповая C*-алгебра сепарабельная, поэтому существует ее верное представление σ в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $U = \sigma(u)$, $V = \sigma(v)$, где u, v — образующие в $\mathbb{F}_2$.

Пусть $L_n \subset H$ — такая возрастающая последовательность конечномерных подпространств, что $\cup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ плотно в H, и пусть P_n — проектор на L_n. Положим $A_n = P_n U|_{L_n}$, $B_n = P_n V|_{L_n}$ и определим операторы на $L_n \oplus L_n$ равенствами

$$U_n = \begin{pmatrix} A_n & (1_n - A_n A_n^*)^{1/2} \\ (1_n - A_n^* A_n)^{1/2} & -A_n \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} B_n & (1_n - B_n B_n^*)^{1/2} \\ (1_n - B_n^* B_n)^{1/2} & -B_n \end{pmatrix},$$

где 1_n обозначает тождественный оператор в L_n. Легко проверить, что U_n и V_n унитарны.

Положим $\pi_n(u) = U_n$, $\pi_n(v) = V_n$ и $\pi = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\pi_n$. Легко видеть, что последовательности U_n и V_n сходятся в сильной топологии, и $s\text{-}\lim_{n\to\infty} U_n = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & -U^* \end{pmatrix}$, $s\text{-}\lim_{n\to\infty} V_n = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & -V^* \end{pmatrix}$. Поэтому, если $f = \sum_{g\in\mathbb{F}_2} \alpha_g \delta_g$ — конечная сумма, то $s\text{-}\lim_{n\to\infty} \pi_n(f) = \begin{pmatrix} \sigma(f) & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ (неважно, что находится в правом нижнем углу — оно может лишь увеличить норму матрицы, но не уменьшить). Так как сильный предел не увеличивает норму, получаем, что

$$\|f\| \geq \|\pi(f)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n(f) \geq \|s\text{-}\lim_{n\to\infty} \pi_n(f)\| \geq \|\sigma(f)\| = \|f\|.$$

Из плотности конечных сумм в $C^*(\mathbb{F}_2)$ следует, что $\|\pi(f)\| = \|f\|$ для любой $f \in C^*(\mathbb{F}_2)$. $\square$

Теорема 5.85. $C^*(\mathbb{F}_2)$ *не содержит проекторов, кроме 0 и 1.*

Доказательство. Пусть $A = \{F \in C([0,1], \mathbb{B}(H)) : F(0) \in \mathbb{C}1\}$. Покажем, что эта C*-алгебра не содержит проекторов, кроме 0 и 1. Пусть F — проектор, тогда $F(t)$ — проектор для каждого $t \in [0,1]$. Но, при $t = 0$, $F(0)$ может быть равно либо 0, либо 1. Так как любой нетривиальный проектор отделен от 0 и 1 расстоянием 1, $F(t)$ обязан равняться $F(0)$ для любого t.

Пусть σ — верное представление алгебры $C^*(\mathbb{F}_2)$, $U = \sigma(u)$, $V = \sigma(v)$. По спектральной теореме существуют такие самосопряженные операторы A, B, что $U = e^{iA}$, $V = e^{iB}$. Положим $F(t) = e^{itA}$, $G(t) = e^{itB}$. Тогда $F, G \in A$ унитарны, и пара (F, G) задает $*$-гомоморфизм из $C^*(\mathbb{F}_2)$ в A. Этот $*$-гомоморфизм инъективен, т.к. его композиция с гомоморфизмом вычисления в точке $t = 1$ инъективна. Это значит, что мы построили вложение $C^*(\mathbb{F}_2)$ в A. Так как в A нет нетривиальных проекторов, то их нет и в $C^*(\mathbb{F}_2)$. $\square$

Перейдем теперь к редуцированной групповой C*-алгебре свободной группы. Напомним, что мы используем обозначение δ_s, $s \in \mathbb{F}_2$, для характеристической функции точки s.

Для любого $a \in C^*_r(\mathbb{F}_2)$ положим $\tau(a) = (\delta_e, a\delta_e)$. Это определяет линейный функционал на $C^*_r(\mathbb{F}_2)$, удовлетворяющий условию $\|\tau\| = 1$.

Лемма 5.86. *Функционал τ является верным следом на $C^*_r(\mathbb{F}_2)$.*

Доказательство. Пусть $f = \sum_{s\in\mathbb{F}_2} \alpha_s\delta_s$, $h = \sum_{s\in\mathbb{F}_2} \beta_s\delta_s$ — конечные суммы. Тогда $\tau(\lambda(f)) = \alpha_e$, $\tau(\lambda(h)) = \beta_e$. Поэтому

$$\tau(f \star h) = \tau(\lambda(\sum\nolimits_{s,t\in\mathbb{F}_2} \alpha_s\beta_t\delta_{st})) = \sum\nolimits_{s\in\mathbb{F}_2} \alpha_s\beta_{s^{-1}} = \tau(\lambda(h \star f)).$$

По непрерывности заключаем, что $\tau(ab) = \tau(ba)$ для любых $a, b \in C^*_r(\mathbb{F}_2)$.

Если $a \in C^*_r(\mathbb{F}_2)$, $a \geq 0$ и $\tau(a) = 0$, то

$$(\delta_s, a\delta_s) = (\lambda(s)\delta_e, a\lambda(s)\delta_e) = (\delta_e, \lambda(s^{-1})a\lambda(s)\delta_e) = \tau(\lambda(s)^{-1}a\lambda(s)) = \tau(a) = 0$$

и $|(\delta_t, a\delta_s)|^2 \leq (\delta_t, a\delta_t) \cdot (\delta_s, a\delta_s) = 0$ (это неравенство Коши–Буняковского для, возможно, вырожденного скалярного произведения $\langle x, y\rangle = (x, ay)$), поэтому $a = 0$. □

Следствие 5.87. *Отображение $\Phi : a \mapsto \tau(a) \cdot 1$ является верным условным ожиданием $C^*_r(\mathbb{F}_2)$ на подалгебру $\mathbb{C}1$.*

Отметим, что Лемма 5.86 и Следствие 5.87 верны для любой группы G. Однако, в случае свободной группы имеется явная формула для Φ (см. Теорему 5.90 ниже).

Лемма 5.88. *Пусть $H = L \oplus L^\perp$, пусть B имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ по отношению к этому разложению, и пусть U_i, $i = 1, \dots, n$, такие унитарные операторы, что $U_iU_j^*$ имеют вид $\begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ при $i \neq j$. Тогда $\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i^*BU_i\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}\|B\|$.*

Доказательство. Сначала предположим, что B и C имеют вид $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\|B + C\|^2 = \|(B + C)^*(B + C)\| = \|B^*B + C^*C\| \leq \|B\|^2 + \|C\|^2$.

Если $i \neq j$, то $(U_iU_j^*)^*B(U_iU_j^*)$ имеет вид $\begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|\sum\nolimits_{i=1}^n U_i^*BU_i\|^2 &= \|U_1^*(B + \sum\nolimits_{i=2}^n U_1U_i^*BU_iU_1^*)U_1\|^2 \\ &\leq \|B\|^2 + \|\sum\nolimits_{i=2}^n U_1U_i^*BU_iU_1^*\|^2 = \|B\|^2 + \|\sum\nolimits_{i=2}^n U_i^*BU_i\|^2. \end{aligned}$$

Индуктивно отщепляя по одному слагаемому, получаем, что $\|\sum_{i=1}^n U_i^*BU_i\| \leq n\|B\|^2$, поэтому $\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i^*BU_i\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|B\|$.

Такой же результат получается, если B имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Для общего случая можно разложить B в сумму двух слагаемых вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Лемма 5.89. *Пусть $s \in \mathbb{F}_2$, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda(u^{-i})\lambda(s)\lambda(u^i) = \begin{cases} \lambda(s) & \text{если } s = u^k \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что любой элемент свободной группы — слово из образующих и их обратных, и если в этом слове невозможны сокращения, то оно называется приведенной формой. Она единственная для каждого элемента свободной группы. Пусть s не является степенью образующей u. Тогда его можно записать в виде $s = u^m s_0 u^l$, где $m, l \in \mathbb{Z}$, а s_0 равно $v^{\pm 1}$ или $v^{\pm 1} t v^{\pm 1}$ (в приведенной форме). Положим

$$L = \mathrm{Span}\{\delta_s : s = e \text{ или } s = u^{\pm 1} r \text{ (в приведенной форме)}\},$$

тогда

$$L^{\perp} = \mathrm{Span}\{\delta_s : s = v^{\pm 1} r \text{ (в приведенной форме)}\}.$$

Заметим, что $\lambda(s_0)L \subset L^{\perp}$ и $\lambda(u^k)L^{\perp} \subset L$ для любого $k \neq 0$. Это означает, что $\lambda(s_0) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ и $\lambda(u^i)\lambda(u^j)^* = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ при $i \neq j$ по отношению к разложению $l^2(\mathbb{F}_2) = L \oplus L^{\perp}$. По предыдущей Лемме, если $s = u^m s_0 u^l$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda(u^{-i})\lambda(s)\lambda(u^i) = \lambda(u^m)\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda(u^{-i})\lambda(s_0)\lambda(u^i)\Big)\lambda(u^l) = 0.$$

С другой стороны, если $s = u^k$, то равенство $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda(u^{-i})\lambda(s)\lambda(u^i) = \lambda(s)$ выполняется очевидным образом для всех $n \geq 1$. □

Теорема 5.90. *Для любого $a \in C^*_r(\mathbb{F}_2)$ верна формула*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda(u^{-i} v^{-j}) a \lambda(v^j u^i) = \tau(a) \cdot 1. \tag{19}$$

Доказательство. Рассмотрим $f = \sum_{g \in \mathbb{F}_2} \alpha_g \delta_g \in \mathbb{C}[\mathbb{F}_2]$. По предыдущей Лемме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda(v^{-j})\lambda(f)\lambda(v^j) = \sum_k \alpha_{v^k} \lambda(v^k),$$

т.е. от f остаются только слагаемые с $s = v^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим $f_0 = \sum_k \alpha_{v^k}\lambda(v^k)$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda(u^{-i})\lambda(f_0)\lambda(u^i) = \alpha_e \cdot 1 = \tau(a) \cdot 1 = \Phi(a),$$

и формула (19) доказана для случая $a \in \mathbb{C}[\mathbb{F}_2]$. Общий случай получаем по непрерывности. □

Следствие 5.91. *Алгебра $C^*_r(\mathbb{F}_2)$ проста.*

Доказательство. Если $a \neq 0$, то $\tau(a^*a) \neq 0$, поэтому любой идеал, содержащий a, содержит и 1. □

Следствие 5.92. *Полная и редуцированная групповые C^*-алгебры группы $\mathbb{F}_2$ различны.*

Доказательство. Первая имеет много идеалов (например, ядра конечномерных представлений), в то время как вторая проста. □