Лекция 7 (5.04.2021)

6. К-теория С*-алгебр

6.1. **Гомотопии в некоторых классах операторов.** Пусть $\pi : A^+ \to \mathbb{C}$, $(a,\lambda) \mapsto \lambda$, — "забывание" элементов алгебры A. Аналогично для матричных алгебр. *Нормализованный элемент* — такой x, для которого $\pi(x) = 1_{\mathbb{C}}$ (или единичная матрица в матричном случае). Обозначим через $\mathrm{GL}_n^+(A)$ и $U_n^+(A)$ нормализованные части $\mathrm{GL}_n(A^+)$ и $U_n(A^+)$.

Напомним, что в $\mathbb{B}(H)$ полярное разложение имеет место для произвольных операторов, но в общей унитальной С*-алгебре A полярное разложение существует, вообще говоря, лишь для обратимых элеиментов. Оно представляет обратимый элемент $z \in A$ в виде произведения унитарного и положительного: $z = z(z^*z)^{-1/2} \ \cdot\ (z^*z)^{1/2}$.

Лемма 6.1. *Пусть A — C^*-алгебра с единицей. Тогда полярное разложение определяет деформационную ретракцию группы обратимых элементов $GL(A)$ на группу унитарных элементов $U(A)$. Аналогичное утверждение верно для групп матриц и для нормализованных элементов (в случае алгебры без единицы).*

Доказательство. Если $z \in \mathrm{GL}(A)$, то $z^*z \in \mathrm{GL}(A)$, $z^*z \geqslant 0$, и определен $|z|^{-1} := (z^*z)^{-1/2}$. При этом $u := z(z^*z)^{-1/2} \in U(A)$. Действительно,

$$u^*u = (z^*z)^{-1/2} z^*z (z^*z)^{-1/2} = 1_A,$$

$$uu^* = z(z^*z)^{-1/2}(z^*z)^{-1/2}z^* = z(z^*z)^{-1} = z \cdot z^{-1} \cdot (z^*)^{-1} \cdot z^* = 1_A.$$

Определим гомотопию

$$z_t := z(z^*z)^{-1/2} \cdot (t \cdot 1_A + (1-t) \cdot (z^*z)^{1/2}), \qquad t \in [0,1].$$

Поскольку первый сомножитель унитарный, а второй — положительный, причем $\geqslant \min(1, \|(z^*z)^{-1/2}\|)\, 1_A$, то гомотопия пролегает в обратимых элементах. Эта (линейная) гомотопия непрерывна и соединяет $z_0 = z$ с $z_1 = u$. Для непрерывности всей ретракции надо еще заметить, что для $z \in \mathrm{GL}(A)$ отображения $z \mapsto (z^*z)^{1/2}$ и $z \mapsto (z^*z)^{-1/2}$ непрерывны по норме.

Для нормализованного $z \in A^+$ элементы $(z^*z)^{1/2}$ и $(z^*z)^{-1/2}$ также нормализованы.

□

Определение 6.2. Назовем *симметрией* самосопряженный унитарный элемент: $a = a^* = a^{-1}$.

Предложение 6.3. *Любая симметрия гомотопна единичному элементу.*

Доказательство. Пусть u — симметрия, тогда $1 - u \in A_{sa}$, $(1_A - u)/2 \leqslant 1_A$, и можем определить непрерывный по норме путь в $U(A)$:

$$u_t := \exp\left(i\pi \cdot t \cdot \frac{1_A - u}{2}\right), \qquad t \in [0,1], \qquad u_0 = 1_A.$$

Далее,

$$(1_A - u)^2 = 1_A - 2u + u^2 = 1_A - 2u + 1_A = 2(1_A - u).$$

По индукции получаем $(1_A - u)^n = 2^{n-1}(1_A - u)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
u_1 &= \exp\left(i\pi \cdot \frac{1_A - u}{2}\right) = 1_A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[i\pi \cdot \frac{1_A - u}{2}\right]^n}{n!} = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{i\pi}{2}\right]^n \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{1_A - u}{2}}{n!} = 1_A + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}\right] \cdot \frac{1_A - u}{2} = \\
&= 1_A + \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}\right] \cdot \frac{1_A - u}{2} = 1 + [-1 + \exp(i\pi)] \cdot \frac{1_A - u}{2} = \\
&= 1_A + [-1 - 1] \cdot \frac{1_A - u}{2} = 1_A - 1_A + u = u.
\end{aligned}$$

□

Теорема 6.4. *Следующие элементы $M_2(\tilde{A})$*

$$\begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

гомотопны в $GL_2(\tilde{A})$, (если $u, v \in \tilde{A}$ обратимы), и в $U_2(\tilde{A})$, (если $u, v \in \tilde{A}$ унитарны). Гомотопия может быть выбрана в нормализованных элементах.

Доказательство. Рассмотрим матрицу поворота

$$R_t := \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi t}{2} & -\sin\frac{\pi t}{2} \\ \sin\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1].$$

Зададим при $t \in [0,1]$ гомотопии

$$w_t := \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_t \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_t^*, \qquad z_t := R_t \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} R_t^*. \tag{20}$$

Тогда w_t и z_t — непрерывные пути обратимых (во втором случае — унитарных) элементов, причем

$$w_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
w_1 &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$z_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix},$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -v \\ u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

Это дает две из трех необходимых гомотопий. Третья получается перестановкой u и v в w_t. Очевидно, что гомотопия состоит из нормализованных элементов. □

Обозначим через $\mathrm{Exp}(A)$ подгруппу $\mathrm{GL}(\widetilde{A})$, состоящую из всех конечных произведений элементов вида $\exp(a)$, $a \in A$. Пусть $\mathrm{GL}(\widetilde{A})_0$ — связная компонента единицы (открытое и замкнутое множество).

Лемма 6.5. *Пусть G — топологическая группа, а H — ее подгруппа. Если H открыта в G, то H и замкнута в G.*

Доказательство. Поскольку $H = G \setminus \cup_{g \notin H} gH$, то H — дополнение к открытому множеству. □

Предложение 6.6. *Элемент $z \in \widetilde{A}$ является обратимым и гомотопным единичному тогда и только тогда, когда $z = \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k)$, $a_1, \dots a_n \in A$. Таким образом, $\mathrm{GL}(\widetilde{A})_0 = \mathrm{Exp}(A)$*

Доказательство. Очевидно, что произведение указанного вида обратимо, так как экспоненты обратимы (экспонента близкого к нулю элемента близка к единице ввиду явного представления в виде ряда, а для далеких — определяется через нормировку и близкие). Поскольку $z_t := \prod_{k=1}^{n} \exp(t a_k)$, $t \in [0,1]$ — непрерывный путь из обратимых элементов, связывающий z с единицей, то $\mathrm{Exp}(A) \subset \mathrm{GL}(\widetilde{A})_0$. В силу леммы 6.5 остается доказать открытость $\mathrm{Exp}(A)$. (Здесь мы пользуемся тем, что для открытых подмножеств банахова пространства связность равносильна линейной связности.)

Возьмем произвольный элемент $z_0 = \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k)$ в $\mathrm{Exp}(A)$. Надо показать, что любой обратимый элемент z, достаточно близкий к z_0 представляется в виде произведения экспонент. Предположим, что $\|z - z_0\| < \|z_0^{-1}\|^{-1}$, и положим $z' := z z_0^{-1}$. Тогда

$$\|z' - 1\| \leqslant \|z - z_0\| \cdot \|z_0^{-1}\| < 1,$$

так что спектр $z' - 1$ содержится в открытом единичном диске, а спектр z' лежит справа от мнимой оси. Поэтому логарифм голоморфен в окрестности спектра z' и мы можем представить $z' = \exp(\log(z'))$ (заметим, что z' не обязан быть нормальным, поэтому мы применяем голоморфное, а не непрерывное функциональное исчисление). Значит, $z = z' z_0 = \exp(\log(z')) \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k) \in \mathrm{Exp}(A)$. □

Следствие 6.7. *Пусть A и B — C^*-алгебры, а $\alpha : A \to B$ — сюръективный гомоморфизм. Тогда α продолжается до такого унитального сюръективного гомоморфизма $\widetilde{\alpha} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$, что обратимые элементы в связной компоненте 1 в $\widetilde{B}$ могут быть подняты до обратимых элементов в связной компоненте 1 в $\widetilde{A}$. То же самое верно и для унитарных.*

В частности, $\alpha^+(\mathrm{GL}_n^+(A)_0) = \mathrm{GL}_n^+(B)_0$ и $\alpha^+(U_n^+(A)_0) = U_n^+(B)_0$, где $\alpha^+ : A^+ \to B^+$ — естественное продолжение α.

Доказательство. Гомоморфизм $\widetilde{\alpha}$ определяется следующим образом. Если и A, и B — с единицей, то $\widetilde{\alpha} := \alpha$. Если они обе без единицы, то $\widetilde{\alpha}(a, \lambda) := (\alpha(a), \lambda)$. Если A без единицы, а B имеет единицу 1_B, то $\widetilde{\alpha}(a + \lambda) := \alpha(a) + \lambda 1_B$. Противоположный случай исключен, поскольку α сюръективен.

Пусть $y \in B^{\sim}$ обратим и $y \sim_h 1$, то по предложению 6.6 $y = \prod_{k=1}^{n} \exp(z_k)$ для некоторых $z_1, \dots, z_n \in B^{\sim}$. Поскольку $\alpha^{\sim}$ сюръективен, найдем поднятия $x_k \in A^{\sim}$ для z_k, $\alpha^{\sim}(x_k) = z_k$, $k = 1, \dots, n$. Элемент $a := \prod_{k=1}^{n} \exp(x_k)$ лежит в связной компоненте единицы $A^{\sim}$, обратим, и удовлетворяет

$$\alpha^{\sim}(a) = \alpha^{\sim}\left(\prod_{k=1}^{n} \exp(x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\alpha^{\sim}(x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(z_k) = y.$$

Если же y — унитарный, то рассмотрим $u := a(a^*a)^{-1/2}$. Тогда u — унитарный элемент, гомотопный a (а значит, и 1) по лемме 6.1. При этом $\alpha^{\sim}(u) = y(y^*y)^{-1/2} = y$.

Остальные утверждения более или менее очевидны. $\square$

Следствие 6.8. *Если J — идеал в A, а u — унитарный элемент в $(A/J)^{\sim}$, то $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$ может быть поднят до унитарного элемента $w \in M_2(A^{\sim})$, гомотопного $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Доказательство. Применяем следствие 6.7 и теорему 6.4. $\square$