Лекция 8 (12.04.2021)

6.2. **Проекторы и частичные изометрии.**

Определение 6.9. Будем называть *проектором* самосопряженный идемпотент: $p = p^* = p^2$. Два проектора, p и q, *ортогональны* если $pq = 0$ (а значит, $qp = q^*p^* = (pq)^* = 0$). Сумма двух ортогональных проекторов $p \oplus q = p + q$ — тоже проектор:

$$(p+q)(p+q) = p^2 + qp + pq + q^2 = p + 0 + 0 + q = p + q.$$

Пишем $p \leqslant q$, если $qp = pq = p$.

Предложение 6.10. *1) Пусть $p \in A$ — проектор, тогда $1 - p \in A^\sim$ — тоже проектор. Он ортогонален p и называется* ортогональным дополнением *p.*

2) Более общо: если $p \leqslant q$, то $q - p$ — проектор, ортогональный p.

Доказательство. 1) $(1-p)(1-p) = 1 - 2p + p^2 = 1 - 2p + p = 1 - p$, так что $1 - p$ — идемпотент, причем $(1-p)^* = 1 - p^* = 1 - p$. При этом

$$p\,(1-p) = p - p^2 = p - p = 0.$$

2) $(q-p)^2 = q^2 - qp - pq + p^2 = q - p - p + p = q - p$,
$p(q-p) = pq - p^2 = p - p = 0.$ □

Задача 75. Для любого проектора $0 \leqslant p \leqslant 1$. *Указание:* $p = p^*p \geqslant 0$, $\|p\| = \|p^*p\| = \|p\|^2$, $\|p\| = 0$ или 1.

Задача 76. Для любого проектора p элемент $2p - 1 \in A^\sim$ является симметрией. *Указание:* $(2p-1)(2p-1) = 4p^2 - 2p - 2p + 1 = 1$.

Задача 77. Если v — симметрия, то $\frac{v+1}{2}$ — проектор. (Этот проектор, в отличие от симметрии из предыдущей задачи, не обязан быть гомотопным единице.)

Задача 78. Пусть $p \neq 0$ — проектор. Тогда $\|p\| = 1$ (см. задачу 75).

Задача 79. Пусть $p \neq 0, 1$ — проектор. Тогда спектр $\operatorname{Sp} p = \{0, 1\}$. Обратно, пусть v — нормальный элемент и $\operatorname{Sp} v = \{0, 1\}$. Тогда v — проектор. *Указание:* воспользоваться теоремой об отображении спектра для $f(t) = t^2$. Обратно: функция от нормального оператора определяется значениями на спектре.

Лемма 6.11. *Пусть p, q — проекторы. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *$p + q$ — проектор;*
(2) *p и q ортогональны;*
(3) *$p + q \leqslant 1$.*

Доказательство. (2)⇒(1) — было доказано выше. (1)⇒(3) — см. задачу 75. (3)⇒(2): имеем $p(p+q)p \leqslant p^2$, так что $p + pqp \leqslant p$, $pqp \leqslant 0$, откуда $pqp = 0$, так как $pqp \geqslant 0$. Значит, $0 = pqp = pqqp = p^*q^*qp = (qp)^*qp$ и $qp = 0$. □

Определение 6.12. Элемент $v \in A$ называется *частичной изометрией*, если v^*v является проектором. Если A с единицей и $v^*v = 1_A$, то v называется *изометрией*. Проектор $p := v^*v$ называется *носителем* v, а $q = vv^*$ *называется проектором на образ* v.

Лемма 6.13. *Элемент $q = vv^*$ является проектором.*

Доказательство. Очевидно, что q — самосопряженный элемент, $q \in A_{sa}$. Далее,

$$q^4 = vv^*vv^*vv^*vv^* = vp^3v^* = vpv^* = vv^*vv^* = q^2.$$

Таким образом, q^2 — проектор, и его спектр — $\{0,1\}$. Тогда, по теореме об отображении спектров, спектр q также имеет такую форму. $\square$

Предложение 6.14. *Имеют место соотношения*

(1) $v = vv^*v = vp = qv$,

(2) $v^* = v^*vv^* = pv^* = v^*q$.

Доказательство. Второе соотношение получается из первого сопряжением. Второе и третье равенство в первом очевидны. Докажем теперь, например, что $v = vp$, т.е. $v(1-p) = 0$. Действительно: $v(1-p)(1-p)^*v^* = v(1-p)v^* = q - q^2 = 0$. $\square$

Лемма 6.15. *Пусть v_1 и v_2 — такие частичные изометрии, что проекторы $p_1 := v_1^*v_1$ и $p_2 := v_2^*v_2$ ортогональны: $p_1p_2 = 0$. Тогда $v_1v_2^* = v_2v_1^* = 0$.*

Доказательство. Действительно, $v_1^*v_1v_2^*v_2 = 0$, откуда, домножая, получаем

$$0 = v_1v_1^*v_1v_2^*v_2v_2^* = v_1v_2^*$$

по предложению 6.14. $\square$

Предложение 6.16. *Пусть $a \in A$ и $0 \leqslant a \leqslant 1_A$. Если $\|a^2 - a\| < \varepsilon \leqslant 1/4$, то найдется такой проектор $p \in A$, что $\|p - a\| < 2\varepsilon \leqslant 1/2$.*

Доказательство. Пусть $t \in spec(a)$. Тогда t вещественно и $0 \leqslant t - t^2 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$. Значит, $t \in \left[0, \frac{1}{2} - \delta\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \delta, 1\right]$, где $\delta := \frac{1}{2}\sqrt{1-4\varepsilon}$. Зададим $p := f(a)$, где f — непрерывная функция на спектре a:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{if } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Поскольку $f = \overline{f} = f^2$, то p — проектор. Далее,

$$\sup\{\,|f(t) - t|\,,\ t \in spec(a)\} \leqslant \frac{1}{2} - \delta,$$

так что

$$\|p - a\| = \|f(a) - \mathrm{Id}(a)\| \leqslant \frac{1}{2} - \delta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4\varepsilon}) < 2\varepsilon,$$

поскольку $\varepsilon < \frac{1}{4}$, а $1 - 4\varepsilon < \sqrt{1-4\varepsilon}$. $\square$

Определение 6.17. Проекторы p и q в C^*-алгебре A называются

- *эквивалентными*, или *эквивалентными по Мюррею–фон Нейману*, если для некоторой частичной изометрии $v \in A$ выполнено $p = v^*v$, $q = vv^*$,
- *унитарно эквивалентными*, если для некоторого унитарного элемента $u \in \tilde{A}$ выполнено $p = u^*qu$,
- *гомотопными*, или *эквивалентными в сильном смысле*, если p и q могут быть соединены гомотопией проекторов, непрерывной по норме.

Эти отношения будут обозначаться $\sim$, $\sim_u$, и $\sim_h$, а классы — $[.]$, $[.]_u$, и $[.]_h$, соответственно.

Задача 80. В коммутативной алгебре эквивалентные проекторы равны между собой.

Задача 81. Проекторы на образ и носитель, соответствующие частичной изометрии, эквивалентны.

Задача 82. Нулевой проектор всегда эквивалентен только себе. Единичный проектор унитарно эквивалентен только себе, но может быть эквивалентен по Мюррею–фон Нейману меньшим проекторам.

Предложение 6.18. *Из унитарной эквивалентности следует эквивалентность по Мюррею–фон Нейману.*

Доказательство. Имеем $p = u^*qu$ для некоторого унитарного элемента $u \in \tilde{A}$. Положим $v = qu$. Тогда

$$v^*v = u^*qqu = u^*qu = p, \quad vv^* = quu^*q = qq = q.$$

□

Предложение 6.19. *Если p_1, p_2, q_1, q_2 — проекторы в A, причем*

$$p_1 \sim q_1, \quad p_2 \sim q_2, \quad p_1 \perp p_2, \quad q_1 \perp q_2,$$

то $p_1 \oplus p_2 \sim q_1 \oplus q_2$.

Доказательство. Пусть $p_1 = v_1^*v_1$, $q_1 = v_1v_1^*$, $p_2 = v_2^*v_2$, $q_2 = v_2v_2^*$. По лемме 6.15

$$v_1v_2^* = v_2v_1^* = v_1^*v_2 = v_2^*v_1 = 0.$$

Поэтому

$$(v_1 + v_2)^*(v_1 + v_2) = v_1^*v_1 + v_2^*v_2 = p_1 \oplus p_2,$$
$$(v_1 + v_2)(v_1 + v_2)^* = v_1v_1^* + v_2v_2^* = q_1 \oplus q_2.$$

□

Предложение 6.20. *Пусть $q = zpz^{-1}$, где $p, q \in A$ — проекторы, а $z \in \tilde{A}$ — обратимый элемент. Тогда $p \sim_u q$.*

Доказательство. Имеем: $qz = zp$, откуда $z^*q = pz^*$ и $pz^*z = z^*qz = z^*zp$. Таким образом, p коммутирует с z^*z, а значит, и с функциями от него, в частности, с $|z|^{-1} = (z^*z)^{-1/2}$. Для унитарного $u := z|z|^{-1}$ имеем

$$upu^* = z|z|^{-1}p|z|^{-1}z = zp|z|^{-2}z = qz|z|^{-2}z = q.$$

□

Предложение 6.21. *Проекторы p и q в A унитарно эквивалентны ($p \sim_u q$) тогда и только тогда, когда $p \sim q$ и $1 - p \sim 1 - q$.*

Доказательство. Пусть v и w — такие частичные изометрии в $\tilde{A}$, что

$$v^*v = p, \quad vv^* = q, \quad w^*w = 1 - p, \quad ww^* = 1 - q.$$

Тогда по лемме 6.15, примененной к p и $1 - p$, имеем $vw^* = wv^* = 0$, а по ней же, примененной к q и $1 - q$ — $v^*w = w^*v = 0$. Так что, полагая $u := v + w$, имеем

$$u^*u = (v^* + w^*)(v + w) = v^*v + w^*w = p + (1 - p) = 1,$$
$$uu^* = (v + w)(v^* + w^*) = vv^* + ww^* = q + (1 - q) = 1.$$

Таким образом, u — унитарный. Далее, по предложению 6.14 $w(1-p) = w$, так что $wp = 0$, равно как и $pw^* = 0$. Поэтому

$$upu^* = (v+w)p(v^* + w^*) = vpv^* = q.$$

Обратная импликация следует из предложения 6.18. □

Предложение 6.22. *Пусть p и q — такие проекторы, что $\|p-q\| < 1$, тогда они гомотопны.*

Точнее, на множестве проекторов q, удовлетворяющих $\|p-q\| < 1$, определено такое непрерывное отображение $q \mapsto u_q$ в унитарные элементы $\tilde{A}$, что выполнены следующие условия:

(1) $q = u_q p u_q^*$,

(2) u_q *гомотопен единице внутри унитарных элементов.*

Если A без единицы, то u_q можно выбрать нормализованным: $\pi(u_q) = 1$.

Доказательство. Определим следующие две симметрии из $A^\sim$:

$$v_p := 2p - 1, \qquad v_q := 2q - 1, \qquad \text{и положим} \qquad z_q := v_q v_p + 1.$$

Тогда

$$qz_q = q(2q-1)(2p-1)+q = 4qp+2q-2qp-q+q = 2qp = (2q-1)(2p-1)p+p = z_q p. \tag{21}$$

Элемент z_q обратим в $A^\sim$, поскольку при $\|p-q\| < 1$ имеем

$$\|z_q - 2\| = \|v_q v_p - 1\| = \|v_q(v_p - v_q)\| \leqslant \|v_p - v_q\| = 2\|p-q\| < 2. \tag{22}$$

Поэтому, переписав (21) в виде $q = z_q p z_q^{-1}$ и обозначив $u_q := z_q|z_q|^{-1}$ (унитарный элемент из полярного разложения u_q), получим $q = u_q p u_q^*$ (это следствие из доказательства предложения 6.20).

Поскольку

$$\|z_{q_1} - z_{q_2}\| = \|v_{q_1} v_p - v_{q_2} v_p\| \leqslant \|v_{q_1} - v_{q_2}\| \, \|v_p\| = 2\|q_1 - q_2\|,$$

то отображение $q \mapsto Z_q$ непрерывно. Поскольку отображение $z \mapsto z|z|^{-1}$ непрерывно на $\mathrm{GL}(A^\sim)$, то, в силу (22) отображение $q \mapsto u_q$ корректно определено и непрерывно на множестве $\{q \in A \,|\, q = q^2 = q^*, \ \|p-q\| < 1\}$.

Более того, соответствие $t \mapsto z_{t,q} := tz_q + 2 - 2t$, $t \in [0,1]$, определяет гомотопию в обратимых элементах для каждого q, близкого к p, поскольку $\|z_{t,q} - 2\| = t\|z_q - 2\| < 2$. Эта гомотопия соединяет $z_{0,q} = 2$ с $z_{1,q} = z_q$. Возьмем унитарную часть $u_{t,q}$ полярного разложения $z_{t,q}$. Получим гомотопию унитарных элементов между 1 и u_q, так что $u_q \in U(A^\sim)_0$. Семейство $u_{t,q} p u_{t,q}^*$, $t \in [0,1]$, задает гомотопию проекторов, соединяющую p и q.

Наконец, если A не имеет единицы, то, поскольку $p, q \in A$, то $\pi v_p = \pi v_q = -1$, так что $\pi z_q = 2$, а $\pi u_q = 1$. □

Следствие 6.23. *Пусть $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — направленность проекторов в A, сходящаяся к проектору p, причем $\|p - q_\lambda\| < 1$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда имеется такая направленность $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ унитарных элементов в A, что $\|1 - u_\lambda\| \to 0$ и $q_\lambda = u_\lambda p u_\lambda^*$ для каждого $\lambda \in \Lambda$.*

Доказательство. По конструкции из предложения 6.22 сопоставление $q_\lambda \mapsto u_\lambda$ непрерывно, поэтому u_λ сходится к $u_p = 1$, поскольку

$$z_p = (2p-1)(2p-1)+1 = 4p-2p-2p+1+1 = 2.$$

$\square$

Следствие 6.24. *Пусть p и q — проекторы в A.*

(1) Тогда p гомотопен q тогда и только тогда когда существует такая гомотопия u_t унитарных элементов $\tilde{A}$, что $u_0 = 1$ и $p = u_1 q u_1^*$.

(2) Более того, если задана некоторая гомотопия p_t между p и q, то ее можно представить в виде $p_t = u_t p u_t^*$ для некоторой гомотопии u_t унитарных элементов $\tilde{A}$.

(3) Если A без единицы, то каждый u_t можно выбрать нормализованным.

(4) Если A без единицы, проектор p_0 или p_1 принадлежит A и они связаны гомотопией p_t проекторов в $\tilde{A}$, то гомотопия на самом деле пролегает в A: $p_t \in A$.

Доказательство. Достаточность в первом утверждении очевидна. Обратно, разобьем отрезок $[0,1]$ на столь малые отрезки $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, что $\|p_{t_i} - p_t\| < 1$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$. На каждом из отрезков применим предложение 6.22. Получим непрерывные семейства унитарных элементов $\tilde{A}$:

$$u_t^i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad u_{t_i}^i = 1, \quad p_t = u_t^i p_{t_i} (u_t^i)^*.$$

Для $t \in [t_j, t_{j+1}]$ положим $u_t := u_t^j u_{t_j}^{j-1} \dots u_{t_1}^0$. Это — искомая гомотопия, доказывающая второе утверждение, из которого следует более слабое: необходимость в первом.

Нормализованность следует из явной конструкции в предложении 6.22.

Наконец, четвертое утверждение следует (считаем, что $p_0 \in A$) из того, что $abc \in A$, если $b \in A$, а $a, c \in \tilde{A}$ (берем $b = p_0$, $a = u_t$, $c = u_t^*$). $\square$

Предложение 6.25. *$p \sim_h q \Rightarrow p \sim_u q \Rightarrow p \sim q$.*

Доказательство. Первая импликация доказана в 6.24, а вторая — в предложении 6.18. $\square$

Задача 83. Докажите, что обратные импликации не имеют места. Для второй рассмотрите $A = B(H)$, тождественный проектор и нетождественный проектор с бесконечномерным образом, а для первой — $A = M_2(C(S^3))$.

Предложение 6.26.

$$p \sim q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$p \sim_u q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Доказательство. Пусть v — такая частичная изометрия, что $p = v^*v$ и $q = vv^*$. Рассмотрим $u = \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} \in M_2(\tilde{A})$. Тогда (см. предложение 6.14)

$$\begin{aligned} u^*u &= \begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} v^*v+1-p & v^*-v^*q+v^*-pv^* \\ v-qv+v-vp & 1-q+vv^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} uu^* &= \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} vv^*+1-q & v-vp+v-qv \\ v^*-pv^*+v^*-v^*q & 1-p+v^*v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, u — унитарный, но не нормализованный. Кроме того,

$$\begin{aligned} u\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}u^* &= \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} vp & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vpv^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Первая часть доказана.

Пусть теперь $q = upu^*$. В соответствии с теоремой 6.4 выберем гомотопию $w_t \in U_2(\tilde{A})$, связывающую $w_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$ и $w_1 = \begin{pmatrix} uu^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $p_t := w_t \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w_t^*$ — гомотопия проекторов, связывающая

$$p_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} upu^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с $p_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. При этом гомотопия пролегает не во всем $M_2(\tilde{A})$, а в $M_2(A)$, поскольку сомножитель $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ лежит там. □

Предложение 6.27. *Если p и q — проекторы, то проекторы* $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ *гомотопны.*

Доказательство. Определим гомотопию аналогично z_t в (20). □