Лекция 9 (19.04.2021)

6.3. **Представление в виде матричных алгебр.** Пусть $p \in A$ — проектор, тогда имеем разложение

$$p \oplus (1-p) = 1 \in \tilde{A},$$

и соответственно, для любого $a \in A$:

$$a = pap + pa(1-p) + (1-p)ap + (1-p)a(1-p). \tag{25}$$

Возникает отображение

$$\varphi_p : A \to M_2(A), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} pap & pa(1-p) \\ (1-p)ap & (1-p)a(1-p) \end{pmatrix}.$$

Определим

$$\psi : M_2(A) \to A, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mapsto a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Задача 84. Проверить, что φ_p задает C^*-изоморфизм на свой образ, причем обратное отображение задается ψ. Убедиться, что на всем $M_2(A)$ отображение ψ — не изоморфизм, и даже не гомоморфизм.

Конечно, в общей ситуации представление (25) (или φ_p) далеко от представления A в виде матричной алгебры: "слагаемые слишком не похожи друг на друга". Поэтому следует ограничиться следующей ситуацией: $p \sim (1-p)$ и A — с единицей. Тогда выберем такую частичную изометрию v, что $v^*v = p$, $vv^* = 1-p$, и определим

$$\psi_v : M_2(A) \to A, \quad \psi_v \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := pa_{11}p + a_{12}v^* + va_{21} + va_{22}v^*,$$

$$\varphi_v : A \to M_2(pAp), \quad f_v(a) := \begin{pmatrix} pap & pav \\ v^*ap & v^*av \end{pmatrix}$$

(матричные элементы принадлежат pAp, поскольку $v = vp$, $v^* = pv^*$).

Задача 85. Проверить, что

$$\psi_v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \psi_v \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = p, \quad \psi_v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \psi_v \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = p,$$

$$\psi_v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \psi_v \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v^*, \quad \psi_v \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \psi_v \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix} = v.$$

Доказать, что $\varphi_v : A \to M_2(pAp)$ — C^*-изоморфизм, причем обратный задается ψ_v.

Предложение 6.28. *Пусть $p_1, \dots, p_n$ — попарно ортогональные эквивалентные проекторы в алгебре A с единицей, причем $p_1 \oplus \dots \oplus p_n = 1$. Тогда A изоморфна $M_n(p_1Ap_1)$.*

Доказательство. Выберем такие частичные изометрии v_k, $k = 1, \dots, n$, что $v_1 = p_1$, $v_k^*v_k = p_1$, $v_kv_k^* = p_k$. Тогда $v_k^* = v_k^*p_k = v_k^*v_kv_k^* = p_1v_k^*$ и $v_k = v_kp_1$ (см. предложение 6.14), так что $n \times n$-матрица

$$\varphi_n(a) := \begin{pmatrix} v_1^*av_1 & v_1^*av_2 & \dots & v_1^*av_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n^*av_1 & v_n^*av_2 & \dots & v_n^*av_n \end{pmatrix}$$

принадлежит $M_n(p_1Ap_1)$. Пусть $\psi_n : M_n(p_1Ap_1) \to A$ сопоставляет матрице $\|b_{ij}\|$ сумму $\sum_{i,j=1}^n v_i b_{ij} v_j^*$. Тогда

$$\psi_n \circ \varphi_n(a) = \sum_{i,j=1}^n v_i v_i^* a v_j v_j^* = \sum_{i,j=1}^n p_i a p_j = \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) a \left(\sum_{j=1}^n p_j\right) = a.$$

Обратно,

$$[\varphi_n \circ \psi_n(a_{ij})]_{rs} = v_r^* \left(\sum_{i,j} v_i a_{ij} v_j^*\right) v_s = p_1 a_{rs} p_1 = a_{rs},$$

поскольку

$$v_r^* v_i = \begin{cases} p_1, & r = i; \\ v_r^* p_r p_i v_i = 0, & r \neq i. \end{cases}$$

Итак, φ_n и ψ_n взаимно обратны, а значит, биективны. Очевидно, что они сохраняют сложение и сопряжение. Проверим мультипликативность (достаточно, например, для φ_n):

$$[\varphi_n(a)\varphi_n(b)]_{rs} = \sum_{k=1}^n v_r^* a v_k v_k^* b v_s = v_r^* a \left(\sum_{k=1}^n p_k\right) b v_s = v_r^* a b v_s = [\varphi_n(ab)]_{rs}.$$

□

Лемма 6.29. *Пусть A — с единицей, а $w \in A$ — изометрия. Пусть $p := ww^*$. Тогда отображение $a \mapsto waw^*$ задает изоморфизм A на pAp.*

Доказательство. Поскольку $waw^* = ww^*waw^*ww^* = pwaw^*p$ (см. предложение 6.14), то образ указанного отображения содержится в pAp. Очевидно, что оно — аддитивный $*$-гомоморфизм. Мультипликативность следует из $w^*w = 1$. Сюръективность следует из представления $pap = ww^*aww^* = w(w^*aw)w^*$. Для доказательства инъективности заметим, что если $waw^* = 0$, то $0 = w^*(waw^*)w = a$. □

Таким образом, мы должны наложить еще одно ограничение и прийти к следующему определению.

Определение 6.30. Проектор p в унитальной C^*-алгебре A называется *половинным*, или *собственным*, если p и $1-p$ эквивалентны 1.

Замечание 6.31. Очевидно, что в этой ситуации $p \sim (1-p)$ и можно представить $p = v^*v$, где v — изометрия, а не частичная изометрия.

6.4. **Группа Гротендика.** Формализуем процесс погружения полугруппы в группу, например, $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$.

Пусть H — коммутативная полугруппа (множество с ассоциативной и коммутативной операцией), а K — ее подполугруппа. Будем использовать мультипликативные обозначения, хотя ситуация коммутативная.

Зададим следующее отношение эквивалентности $\equiv$ на $H \times K$:

$$\begin{aligned} (h_1, k_1) \equiv (h_2, k_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists y_1, y_2 \in K : \quad (h_1 y_1, k_1 y_1) = (h_2 y_2, k_2 y_2) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in K : \quad h_1 k_2 x = k_1 h_2 x. \end{aligned}$$

Пару (h,k) можно представлять себе как $\frac{h}{k}$.

Задача 86. Если определить просто $(h_1, k_1) \equiv (h_2, k_2) \Leftrightarrow h_1 k_2 = h_2 k_1$, то не будет транзитивности.

Лемма 6.32. *Условия, действительно, равносильны и задают отношение эквивалентности.*

Доказательство. Пусть выполнено второе. Возьмем $y_1 = k_2 x$, $y_2 = k_1 x$. Тогда

$$h_1 y_1 = h_1 k_2 x = k_1 h_2 x = h_2 y_2, \quad k_1 y_1 = k_1 k_2 x = y_2 k_2,$$

и выполнено первое. Обратно, пусть выполнено первое. Возьмем $x = y_1 y_2$. Тогда

$$h_1 k_2 x = h_1 k_2 y_1 y_2 = (h_1 y_1)(k_2 y_2) = h_2 y_2 k_1 y_1 = h_2 k_1 x,$$

и второе выполнено. Рефлексивность и симметричность (из второго варианта определения) очевидны. Пусть $(h_1, k_1) \equiv (h_2, k_2)$ и $(h_2, k_2) \equiv (h_3, k_3)$, т.е. существуют такие $x_1, x_2 \in K$, что $h_1 k_2 x_1 = k_1 h_2 x_1$, $h_2 k_3 x_2 = k_2 h_3 x_2$. Тогда

$$(h_1 k_3)(k_2 x_1 x_2) = k_1 h_2 x_1 k_3 x_2 = k_1 x_1 k_2 h_3 x_2 = (k_1 h_3)(k_2 x_1 x_3),$$

т.е. $h_1 k_3 x = k_1 h_3 x$ при $x = k_2 x_1 x_2 \in K$ и выполнено второе условие, так что $(h_1, k_1) \equiv (h_3, k_3)$. Транзитивность установлена. $\square$

Обозначим $[H][K]^{-1} := (H \times K)/\equiv$, класс эквивалентности будем обозначать $[.]$. Заметим, что на классах корректно определено умножение по формуле

$$[(h_1, k_1)]\,[(h_2, k_2)] := [(h_1 h_2, k_1, k_2)]$$

(как умножение дробей). Действительно, пусть $(h_1, k_1) \equiv (h'_1, k'_1)$, $(h_2, k_2) \equiv (h'_2, k'_2)$:

$$h_1 k'_1 x_1 = k_1 h'_1 x_1, \qquad h_2 k'_2 x_2 = k_2 h'_2 x_2, \qquad x_1, x_2 \in K.$$

Тогда

$$(h_1 h_2)(k'_1 k'_2)(x_1 x_2) = (h_1 k'_1 x_1)(h_2 k'_2 x_2) = (k_1 h'_1 x_1)(k_2 h'_2 x_2) = (h'_1 h'_2)(k_1 k_2)(x_1 x_2).$$

Мы говорим, что в H *полугруппа с сокращениями,* если $h_1 h = h_2 h$ влечет $h_1 = h_2$.

Заметим, что всегда $(x, x) \equiv (y, y)$, $x, y \in K$. Обозначим соответствующий класс через 1. Тогда для любых $h \in H$, $k \in K$,

$$1[(h, k)] = [(xh, xk)] = [(h, k)], \text{ поскольку } (xh)kk' = h(xk)k' \text{ для любого } k' \in K.$$

Значит, $[H][K]^{-1}$ — абелева полугруппа с единицей (моноид). Более того, $[(k_2, k_1)]$ является обратным к $[(k_1, k_2)]$, если $k_1, k_2 \in K$. Действительно,

$$[(k_1, k_2)]\,[(k_2, k_1)] = [(k_1 k_2, k_2 k_1)] = 1.$$

В частности, $[H][H]^{-1}$ является абелевой группой.

Определение 6.33. Абелева группа $G(H) := [H][H]^{-1}$ называется *группой Гротендика H.*

Определим отображение

$$\iota : H \to [H][K]^{-1}, \quad \iota(h) := [(hk, k)], \quad k \in K.$$

Очевидно, что отображение ι корректно определено (не зависит от k) и согласуется с интуицией для $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto \frac{nk}{k}$.

Предложение 6.34. *(1) Отображение ι — гомоморфизм, который инъективен тогда и только тогда, когда H — полугруппа с сокращениями на элементы K^3.*

(2) Для всякого $k \in K$ элемент $\iota(k)$ обратим в $[H][K]^{-1}$.

(3) *Всякий элемент $[H][K]^{-1}$ может быть записан в виде $\iota(h)\iota(k)^{-1}$, $h \in H$, $k \in K$.*

Доказательство. Гомоморфность очевидна:

$$\iota(h)\iota(g) = [(hk,k)]\,[(gk,k)] = [((hg)k^2,k^2)] = \iota(hg).$$

Пусть $\iota(h) = \iota(h')$ тогда и только тогда, когда $h = h'$. Это значит, что $h = h'$ тогда и только тогда, когда существует такой $x \in K$, что $hkkx = h'kkx$, что и требовалось в первом пункте.

Пункт второй сразу следует из рассуждения перед определением 6.33.

Наконец, выкладка

$$[(h,k)] = [(h,k)]\,[(k,k)]\,[(k,k)] = [(hk,k)]\,[(k,k^2)] = [(hk,k)]\,[(kk,k)]^{-1} = \iota(h)\iota(k)^{-1}$$

доказывает третий пункт. □

Теорема 6.35. *Полугруппа $[H][K]^{-1}$ обладает следующим универсальным свойством. Пусть S — полугруппа с единицей и $\phi : H \to S$ — такой гомоморфизм полугрупп, что K отображается в обратимые элементы S. Тогда ϕ пропускается через ι, причем единственным образом, т.е. существует и притом единственный такой гомоморфизм $\psi : [H][K]^{-1} \to S$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\iota"'] & S \\ & {[H][K]^{-1}} \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Начнем с единственности. Пусть имеется гомоморфизм ψ с требуемыми свойствами. Тогда его значение на любом элементе определено однозначно:

$$\psi[(h,k)] = \psi(\iota(h)\iota(k)^{-1}) = (\psi\circ\iota)(h)\,((\psi\circ\iota)(k))^{-1} = \phi(h)\phi(k)^{-1}$$

(мы воспользовались тем, что K отображается в обратимые). Единственность доказана, и формула дает нам единственно возможное определение ψ: $\psi[(h,k)] = \phi(h)\phi(k)^{-1}$. Тогда

$$(\psi\circ\iota)(h) = \psi[(hk,k)] = \phi(hk)\phi(k)^{-1} = \phi(h)\phi(k)\phi(k)^{-1} = \phi(h).$$

Необходимо проверить корректность и гомоморфность. Пусть $(h',k') \equiv (h,k)$, так что $h'kx = k'hx$, $x \in K$. Тогда

$$\phi(h)\phi(k')\phi(x) = \phi(h')\phi(k)\phi(x), \qquad \phi(h)\phi(k)^{-1} = \phi(h')\phi(k')^{-1}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\phi(K)$ состоит из обратимых операторов. Наконец,

$$\psi[(hh',kk')] = \phi(hh')\phi(kk')^{-1} = \phi(h)\phi(k)^{-1}\phi(h')\phi(k')^{-1} = \psi[(h,k)]\psi[(h',k')].$$

□

Следствие 6.36. *Пусть* $\phi : H_1 \to H_2$ *— гомоморфизм коммутативных полугрупп с единицей. Тогда существует, причем единственный, гомоморфизм* $\psi : G(H_1) \to G(H_2)$*, дополняющий следующую диаграмму до коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"'] & H_2 \arrow[d, "\iota"] \\ G(H_1) \arrow[r, "\psi"'] & G(H_2). \end{tikzcd}$$

Доказательство. Надо взять в предыдущей теореме $S = G(H_2)$ и $\iota\phi$ в качестве ϕ, и вспомнить, что в данном случае $\iota(H_2)$ состоит из обратимых элементов. □

Предложение 6.37. *Пусть* K *содержит такой элемент* ∞*, что* $h \cdot \infty = \infty$ *для всех* $h \in H$*. Тогда* $[H][K]^{-1} = 0$*.*

Доказательство. Для любых $h \in H$, $k \in K$ имеем

$$(h, k) \equiv (h \cdot \infty, k \cdot \infty) = (\infty, \infty) \equiv 1.$$

□

Пример 6.38. (=упражнения)

1. Пусть $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +)$. Тогда $G(\mathbb{N}) = [\mathbb{N}][\mathbb{N}]^{-1} = \mathbb{Z}$, а $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ инъективно. Элементы $\mathbb{Z}$ представляются как разности натуральных чисел.
2. Пусть $\mathbb{N}^* = (\mathbb{N}, \times)$. Тогда $G(\mathbb{N}^*) = \mathbb{Q}_+$ (положительные рациональные числа по умножению), а $[\mathbb{Z}][\mathbb{N}]^{-1} = \mathbb{Q}$.
3. Если добавить к $\mathbb{N}^*$ ноль, то $G(\mathbb{N}^* \cup \{0\}) = 0$.