Дополнительный список задач

(1) Показать, что любой автоморфизм α алгебры Тёплица $\mathcal{T}$ индуцирует автоморфизм $\tilde{\alpha}$ алгебры $C(\mathbb{T})$ непрерывных функций на окружности, $\tilde{\alpha}(f) = f \circ h$, где $f \in C(\mathbb{T})$, а h — гомеоморфизм $\mathbb{T}$, сохраняющий ориентацию.

(2) Обратно, если h — гомеоморфизм $\mathbb{T}$, сохраняющий ориентацию, найдите такой компактный оператор K, что $T_h + K$ унитарно эквивалентен T_z. Выведите из этого, что существует автоморфизм алгебры Тёплица, который индуцирует h как в предыдущей задаче.

(3) Докажите, что множество обратимых элементов алгебры Тёплица $\mathcal{T}$ связно.

(4) Пусть $S_1, \dots, S_n$ — изометрии, порождающие алгебру Кунца $\mathcal{O}_n$. Покажите, что $\{S_1, S_2S_1, S_2^2\}$ порождают в $\mathcal{O}_2$ подалгебру, изоиморфную $\mathcal{O}_3$. Обобщите это и покажите, что $\mathcal{O}_{k(n-1)+1}$ вкладывается в $\mathcal{O}_n$.

(5) Покажите, что $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & S_2 \end{pmatrix}$ и $T_2 = \begin{pmatrix} S_1 & S_2S_1 & S_2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ порождают алгебру матриц $M_3(\mathcal{O}_2)$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_2$. Выведите из этого, что $M_3(\mathcal{O}_2)$ и $\mathcal{O}_2$ изоморфны.

(6) Докажите, что обратимые элементы плотны в C^*-алгебре A тогда и только тогда, когда обратимые элементы плотны в алгебре матриц $M_n(A)$ над A (n произвольное).

(7) Пусть $H_0 \subset H$ — подпространство бесконечной размерности и коразмерности в гильбертовом пространстве H. Пусть U, V — унитарные операторы, удовлетворяющие условиям $U^2 = I$, $U(H_0) = H_0^\perp$; $V^3 = I$, $H_0^\perp = V(H_0) \oplus V^2(H_0)$. Пусть $A = C^*(U, V)$ — C*-алгебра, порожденная этими двумя операторами. Доказать, что $A = C_r(G)$ (приведенная групповая алгебра), где $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$) (свободное произведение групп $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_3$. (Указание: запишите элементы группы несократимыми словами из букв u, v, где u — образующая $\mathbb{Z}_2$, а v — образующая $\mathbb{Z}_3$; положите $H = l_2(G)$, H_0 — функции на G, равные 0 на словах, начинающихся со степени v).

(8) C*-алгебра A называется конечной, если из условий, что $p, q \in A$ — проекторы, $p \le q$ и $p \sim q$ (эквивалентность по фон Нейману) следует, что $p = q$. Докажите, что конечность A равносильна тому, что любая изометрия в A унитарна.

(9) Докажите, что если C*-алгебра A сепарабельна, то группы $K_0(A)$ и $K_1(A)$ счётны.

(10) Пусть A, B — C*-алгебры. Тогда $0 \to A \to A \oplus B \to B \to 0$ — точная последовательность. Докажите, что граничный гомоморфизм $\delta : K_1(B) \to K_0(A)$ нулевой.

(11) Пусть $T \in \mathbb{B}(H)$ — фредгольмов оператор, $\delta : K_1(Q(H)) \to K_0(\mathbb{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ — граничный гомоморфизм, индуцированный точной последовательностью $0 \to \mathbb{K}(H) \to \mathbb{B}(H) \to Q(H) \to 0$. Докажите, что $\operatorname{ind} T = \delta([q(T)])$, где $q : \mathbb{B}(H) \to Q(H)$ — фактор-гомоморфизм.

(12) Пусть $C(\mathbb{T}^1)$ — алгебра непрерывных функций на окружности, $M_n(C(\mathbb{T}^1)) = C(\mathbb{T}^1; M_n)$. Отображение $\phi : M_n(C(\mathbb{T}^1)) \to M_{2n}(C(\mathbb{T}^1))$ задано формулой

$$[\phi(f)](t) = u(t)\operatorname{diag}(f(t/2), f((t+1)/2))u(t)^*,$$

где $u : [0,1] \to U_2$ — унитарный путь, соединяющий $u(0) = 1$ с $u(1) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Найти $\phi_* : K_*(M_n(C(\mathbb{T}^1))) \to K_*(M_{2n}(C(\mathbb{T}^1)))$.