

Геометрия и топология — 4 (конспект, 2023 г.)

Общая топология

Определения

1. Топология. Индуцированная топология. База, предбаза. Дискретная и антидискретная топология.
2. Топология на метрическом пространстве.
3. Замыкание. Лемма: Замыкание замкнуто. ($\forall x \notin \bar{A} \exists U_x : U_x \cap A = \emptyset$. На самом деле, даже $U_x \cap \bar{A} = \emptyset$: если нет, то пусть $y \in U_x \cap \bar{A}$. Любая окрестность V точки y содержит точку из A , в частности, $V \cap U_x$, значит, $U_x \cap A \neq \emptyset$ — противоречие. $X \setminus \bar{A} = \cup_x U_x$ — открыто).
4. Непрерывное отображение, непрерывность в точке.

Лемма 1 *Непрерывность = непрерывность в каждой точке.*

Доказательство. $\Rightarrow$: очевидно.

$\Leftarrow$: Пусть $V \subset Y$ открытое. Для любой $y \in V$ и любой $x \in f^{-1}(y)$ существует такая окрестность U_x , что $f(U_x) \subset V$. Положим $U = \cup_x U_x$. Оно открыто, и $U = f^{-1}(V)$. $\square$

5. Гомеоморфизм.
6. Связность, линейная связность. Лемма. Пример.
7. Компактность.

Лемма 2 *Замкнутое подпространство компакта компактно.*

Доказательство. Дополнение к замкнутому — открытое. Добавим его к покрытию. $\square$

Лемма 3 *Образ компакта компактен.*

Доказательство. Прообраз открытого покрытия — открытое покрытие. $\square$

Лемма 4 (Лебега) *X — метрический компакт, U_α — открытое покрытие, тогда существует такое $r > 0$, что $B_r(x)$ содержится хотя бы в одном U_α .*

Доказательство. Для каждого $x \in X$ найдем такое $\epsilon_x > 0$, что B_{ϵ_x} содержится в некотором U_α . Рассмотрим покрытие шарами $B_{\epsilon_x/2}(x)$ и выберем из него конечное подпокрытие $B_{\epsilon_{x_i}/2}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Положим $r = \min\{\epsilon_{x_i}/2 : i = 1, \dots, n\}$. Тогда каждая точка x лежит в одном из шаров вида $B_{\epsilon_{x_i}/2}(x_i)$, поэтому каждый шар $B_r(x)$ лежит в одном из шаров вида $B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$. $\square$

8. Хаусдорфовость. Лемма: хаусдорфовость = диагональ замкнута. Лемма: У любой последовательности не более одного предела.

Лемма 5 *Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. (а) для любой $x \in X$ существует открытая окрестность U множества A и открытая окрестность V точки x , которые не пересекаются (для каждой $y \in A$ найдем U_y и V_y , выберем конечное подпокрытие U_{y_i} , тогда $\cap_i V_{y_i}$ открыто);

(б) для каждой $x \notin A$ выберем такую окрестность, тогда их объединение открыто и является дополнением к A . $\square$

Теорема 6 *Биективное непрерывное отображение компакта X на хаусдорфово пространство Y — гомеоморфизм.*

Доказательство. Достаточно проверить, что образ замкнутых подмножеств замкнут (непрерывность обратного). Пусть $A \subset X$ замкнуто. Тогда A компактно. Тогда $f(A)$ компактно, и, как компактное подмножество в хаусд. — замкнуто. $\square$

Топология на произведении двух пространств, непрерывность проекций, минимальность топологии произведения среди топологий, для которых проекции непрерывны. Топология произведения бесконечного числа пространств.

Упражнение. Сходимость последовательности точек $x_n \in X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ равносильна поточечной сходимости, т.е. тому, что последовательность $p_\alpha(x_n)$ сходится для каждого $\alpha \in A$.

Компактность и направленности

Множество Λ называется частично упорядоченным, если на нем введено отношение частичного порядка $\leq$, т.е. про некоторые пары элементов $\lambda, \mu \in \Lambda$ известно, что $\lambda \leq \mu$. Это отношение должно удовлетворять очевидным требованиям: рефлексивность: $\lambda \leq \lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$; антисимметричность: одновременно не может быть $\lambda \leq \mu$ и $\mu \leq \lambda$, если они различны; транзитивность: если $\lambda \leq \mu$ и $\mu \leq \nu$, то $\lambda \leq \nu$.

Частично упорядоченное множество Λ называется направленным, если для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ найдется такое $\nu \in \Lambda$, что $\lambda \leq \nu$ и $\mu \leq \nu$.

Отображение $\Lambda \rightarrow X, \lambda \mapsto x_\lambda$, называется направленностью (или сетью) в X . В некоторых аспектах с направленностями можно обращаться также, как с последовательностями, которые суть отображения натуральных чисел в X .

$x \in X$ называется точкой накопления для направленности $\{x_\lambda\}$, если для любой открытой окрестности U точки x и для любого $\lambda \in \Lambda$ найдется такое $\mu \in \Lambda$, что $\lambda \leq \mu$ и $x_\mu \in U$.

Лемма 7 Из любой направленности x_λ с точкой накопления x можно выбрать поднаправленность, к ней сходящуюся.

Доказательство. Положим $M = \{(\lambda, U) : \lambda \in \Lambda, U \text{ — окрестность } x\}$, и упорядочим: $(\lambda, U) \leq (\mu, V)$ если $\lambda \leq \mu$ и $V \subset U$. Для каждой пары (λ, U) выберем такое x_μ , которое удовлетворяет $x_\mu \in U$ и $\mu \geq \lambda$. Получаем сеть $(x_\mu)_{\mu \in M}$. $\square$

Теорема 8 Компактность равносильна тому, что любая направленность имеет точку накопления.

Доказательство. 1. Пусть X компактно, но существует направленность $\{x_\lambda\}$ без точек накопления. Это значит, что для любой $x \in X$ существует такая окрестность U_x этой точки и $\lambda \in \Lambda$, что $x_\mu \notin U_x$ для всех $\mu \geq \lambda$. Из покрытия $\{U_x\}$ выберем конечное подпокрытие $U_{x_i}, i = 1, \dots, n$. По точке x_i выберем λ_i так, что $x_\mu \notin U_{x_i}$ при $\mu \geq \lambda_i$, и возьмем $\mu \geq \lambda_i, i = 1, \dots, n$. Тогда $x_\mu \notin U_{x_i}, i = 1, \dots, n$, что противоречит тому, что $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$.

2. Обратно, пусть любая направленность имеет предельную точку, но X не компактно. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие, в котором не существует конечного подпокрытия. В качестве направленности возьмем множество Λ всех конечных подмножеств в A , упорядоченное по включению (т.е. $\lambda \leq \mu$ если $\lambda \subset \mu$). Построим направленность без предельных точек — это даст противоречие с предположением. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ выберем точку x в дополнении к $\bigcup_{\alpha \in \lambda} U_\alpha$ — это дополнение непусто, т.к. иначе это даст конечное подпокрытие. Пусть $x \in X$ — точка накопления для направленности $\{x_\lambda\}$. Поскольку $\{U_\alpha\}$ — покрытие, существует такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in U_{\alpha_0}$. По определению точек накопления, для любого λ существует $\mu \geq \lambda$, при котором $x_\mu \in U_{\alpha_0}$. Возьмем $\lambda = \{\alpha_0\}$, тогда существует $\mu \geq \{\alpha_0\}$, при котором $x_\mu \in U_{\alpha_0}$. Раз $\mu \geq \{\alpha_0\}$, то $\alpha_0 \in \mu$, и $x_\mu \in \bigcup_{\alpha \in \mu} U_\alpha$, что противоречит тому, что $x_\mu \in U_{\alpha_0}$. $\square$

Теорема 9 (Тихонов) Если X_α компактно для любого $\alpha \in A$, то $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{x_\lambda\}$ — произвольная направленность в X . Тогда $\{p_\alpha(x_\lambda)\}$ — направленность в X_α . Компактность X_α означает наличие точки накопления $x^{(\alpha)} \in X_\alpha$.

Для $I \subset A$ назовем $p = (p_{\alpha \in I}^{(\alpha)})$ частичной точкой накопления для данной направленности, если она такова для ограничения на I . Пусть P — множество всех частичных точек накопления.

Упорядочим его: если $I \subset J$, то $(p^{(\alpha)})_{\alpha \in I} \leq (q^{(\alpha)})_{\alpha \in J}$ если $p^{(\alpha)} = q^{(\alpha)}$ при $\alpha \in I$. P непусто (возьмем I состоящим из одного элемента). Пусть p_β — вполне упорядоченное подмножество (цепочка) в P . Здесь p_β — точка пространства $\prod_{\alpha \in I_\beta} X_\alpha$. Рассмотрим точку $p \in \prod_{\alpha \in \cup_\beta I_\beta} X_\alpha$, определенную на каждом I_β как p_β (эти точки при разных β согласованы). Тогда p — тоже частичная точка накопления. Действительно, пусть U — окрестность точки p вида $\prod_{i=1}^n U_{\alpha_i} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n} X_\alpha$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I = \cup_\beta I_\beta$. Т.к. этих индексов конечное число, они все лежат в одном из I_β , а над ним ограничение p — предельная точка.

По Лемме Цорна в P существует максимальный элемент. Пусть его "область определения" I меньше A , и $\gamma \notin I$. Перейдем от направленности с точкой накопления к поднаправленности, которая к этой точке сходится (переобозначать не будем). Из компактности X_γ следует наличие точки накопления $p^\gamma \in X_\gamma$ для сети $\{x_\lambda^\gamma\}_{\lambda \in \Lambda}$. Тогда $((p^\alpha)_{\alpha \in I}, p^\gamma) \in \prod_{\alpha \in I \cup \{\gamma\}} X_\alpha$ будет частичной точкой накопления больше максимальной — противоречие. Значит, в $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ есть точка накопления. $\square$

Фактор-топология

Фактор-пространства. Классы эквивалентности. Открытые множества — у которых открыт прообраз.

Лемма 10 Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, $R(S)$ — отношение эквивалентности на X (Y), и если $x_1 \sim x_2$, то $f(x_1) \sim f(x_2)$. Тогда f индуцирует непрерывное отображение $\tilde{f} : X/R \rightarrow Y/S$ (замыкающее диаграмму).

Доказательство. Пусть $a \in X/R$, $p_X(x) = a$, положим $\tilde{f}(a) = p_Y(x)$. Корректность очевидна. Пусть U — открытое множество в Y/S . Тогда $p_X^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U)) = f^{-1}(p_Y^{-1}(U))$ открыто, значит, $\tilde{f}^{-1}(U)$ открыто. $\square$

Лемма 11 Пусть X регулярно, $A \subset X$ замкнуто, тогда X/A хаусдорфово.

Склеивка: $A \subset X$, $f : A \rightarrow Y$, тогда $X \cup_f Y = X \sqcup Y / \sim$, где $a \sim f(a)$, $a \in A$. Цилиндр и конус отображения.

$$\mathbb{D}^{n+1}/\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n+1}.$$

Действие группы.

$$\mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n.$$

Поверхности.

Компактно-открытая топология

X, Y — топологические пространства, $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений. Предбаза: $V_{K,U} = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset U\}$.

Лемма 12 Если X дискретно, то отображение $F : C(X, Y) \rightarrow \prod_{x \in X} Y$, $F(f) = (f(x))_{x \in X}$, является гомеоморфизмом.

Доказательство. Компактность дискретного множества — конечность. Поэтому предбаза к.-о. топологии состоит из множеств вида $V_{x,U} = \{f \in C(X, Y) : f(x) \in U\}$. Но это в точности предбаза топологии произведения. $\square$

Лемма 13 Если X компактно, то к.-о. топология задается предбазой $V_U = \{f \in C(X, Y) : f(X) \subset U\}$.

Лемма 14 Если X компактно, а Y метрическое (с метрикой d), то формула $d(f, g) = \|f - g\| = \max_{x \in X} d(f(x), g(x))$ задает метрику на $C(X, Y)$, и эта метрика задает на $C(X, Y)$ к.-о. топологию.

Лемма 15 Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность непрерывных функций (т.е. отображений из X в $\mathbb{R}$). Ее сходимость в к.-о. топологии равносильна равномерной сходимости на компактных подмножествах.

Лемма 16 Пусть X, Y, Z — топологические пространства. Тогда отображение $F : C(X \times Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z))$, заданное формулой $\{[F(f)](x)\}(y) = f(x, y)$, корректно определено.

Доказательство. Надо проверить непрерывность отображения $F(f) : X \rightarrow C(Y, Z)$ (то, что $[F(f)](x)$ непрерывно для любого $x \in X$, очевидно). Пусть $L \subset Y$ компактно, $W \subset Z$ открыто; возьмем $V_{L,W} \subset C(Y, Z)$. Пусть $[F(f)](x_0) \in V_{L,W}$, т.е. $f(x_0, L) \subset W$. Для непрерывности в x_0 нужно найти такую окрестность U точки x_0 , что $f(U, L) \subset W$. Для каждого $y \in L$ можно найти такие окрестности $U_y \subset X$ и $V_y \subset Y$ точек x_0 и y соответственно, что $f(U_y \times V_y) \subset W$ (т.к. f непрерывно). Пользуясь компактностью L , можно оставить лишь конечное число $U_i \times V_i$ таких окрестностей, покрывающее $x_0 \times L$. Беря $U = \bigcap_i U_i$, получаем требуемую окрестность. $\square$

Замечание. При дополнительных предположениях на данные пространства указанное отображение является непрерывным, а при более сильных предположениях — гомеоморфизмом.

Например, если X и Y компактны, а Z — метрическое, то F — изометрия. Действительно, если $f, g \in C(X \times Y, Z)$, то $d(f, g) = \sup_{(x,y) \in X \times Y} d(f(x, y), g(x, y))$, а $d(F(f), F(g)) = \sup_{x \in X} \sup_{y \in Y} d(f(x, y), g(x, y))$, что одно и то же.

Теорема 17 (Вейерштрасса об аппроксимации) Пусть $X = \mathbb{D}^m \subset \mathbb{R}^m$, $C(X)$ — пространство непрерывных функций на X , $P \subset C(X)$ — подмножество полиномиальных функций. Тогда P плотно в $C(X)$.

Доказательство. 1. Подмножество $S \subset C(X)$ называется решеткой, если для любых $f, g \in S$ $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in S$. Расширим P до решетки S , включив в нее всевозможные максимумы и минимумы полиномов. Другими словами, S — минимальная решетка, содержащая P .

2. **Задача из матанализа.** Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен p , что $\max_{x \in [-1,1]} |p(x) - |x|| < \varepsilon$. Это единственная функция, которую надо аппроксимировать многочленами, для доказательства общего случая. Аналогично, для любого $N > 0$ существует многочлен такой p , что $\max_{x \in [-N, N]} |p(x) - |x|| < \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что $p(0) = 0$.

3. Пусть $f \in C(X)$, $\varepsilon > 0$, и существует многочлен q с $\|f - q\| < \varepsilon$. Тогда существует такой многочлен r , что $\| |f| - r \| < 2\varepsilon$. Действительно, достаточно аппроксимировать $|q|$. Пусть $\max_{x \in X} |q(x)| = N$, и пусть p — многочлен из предыдущего пункта, тогда $r(x) = p(q(x))$ — искомый многочлен.

4. Заметим, что $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}((f + g) + |f - g|)$, $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}((f + g) - |f - g|)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и для любой функции $f \in S$ существует такой многочлен p , что $\|f - p\| < \varepsilon$.

5. Для любых двух точек $x, y \in X$ и для любых $a, b \in \mathbb{R}$ существует такой многочлен p , что $p(x) = a$, $p(y) = b$. Поэтому для них и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $f \in S$, что $|f(x) - a| < \varepsilon$, $|f(y) - b| < \varepsilon$.

6. Теперь доказательство теоремы сводится к следующему утверждению. Пусть $f \in C(X)$, и для любых $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая $g \in S$, что $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, $|f(y) - g(y)| < \varepsilon$. Тогда $f \in \bar{S}$.

Пусть $g_{x,y} \in S$ удовлетворяет условиям $|f(x) - g_{x,y}(x)| < \varepsilon$, $|f(y) - g_{x,y}(y)| < \varepsilon$. Положим

$$U_x(y) = \{z \in X : g_{x,y}(z) > f(z) - \varepsilon\}.$$

Тогда $y \in U_x(y)$, т.е. это открытое покрытие X . Выберем конечное подпокрытие $U_x(y_1), \dots, U_x(y_n)$. Положим

$$h_x = \max\{g_{x,y_1}, \dots, g_{x,y_n}\}.$$

Т.к. любая точка $z \in X$ лежит в одном из $U_x(y_i)$, получаем, что $h_x(z) \geq g_{x,y_i}(z) > f(z) - \varepsilon$. Кроме того, по предположению,

$$h_x(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Теперь определим $V(x) = \{z \in X : h_x(z) < f(z) + \varepsilon\}$. Это — открытая окрестность точки x . Опять из покрытия множествами $V(x)$, $x \in X$, конечное подпокрытие $V(x_j)$. Положим $f_0 = \min\{h_{x_1}, \dots, h_{x_m}\} \in S$. Произвольная точка z лежит в одном из $V(x_j)$, поэтому $f_0(z) \leq h_{x_j} < f(z) + \varepsilon$, а так как $h_x(z) > f(z) - \varepsilon$, то $f_0(z) > f(z) - \varepsilon$. Итак, для любого $z \in X$ $|f(z) - f_0(z)| < \varepsilon$. $\square$

Следствие 18 Любое непрерывное отображение $f : \mathbb{D}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ аппроксимируется многочленами (т.е. $\|f - g\|$ может быть сделано сколь угодно малым, где g — многочлен).

Следствие 19 Пусть $m < n$. Для любого непрерывного отображения $f : \mathbb{D}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое (гладкое) отображение $g : \mathbb{D}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $\|f - g\| < \varepsilon$, и $g(\mathbb{D}^m)$ имеет меру 0. В частности, g не сюръективно.

Доказательство. Аппроксимируем f многочленом g и заметим, что g удовлетворяет условию Липшица: существует такое $C > 0$, что $|g(x) - g(y)| < C|x - y|$ для любых $x, y \in \mathbb{D}^m$. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x, t) = g(x)$. Липшицевость означает контроль размера кубов или шаров: если $B \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса (куб со стороной) r , то $F(B)$ содержится в шаре (кубе) радиуса (со стороной) Cr , поэтому множества меры 0 переводятся этим отображением в множества меры 0. □

Следствие 20 Пусть $A \subset \mathbb{D}^n$ замкнуто, $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, ограничение которого на A — гладкая функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое гладкое отображение g , что $\|f - g\| < \varepsilon$ и $f|_A = g|_A$.

Доказательство. В качестве P возьмем множество гладких отображений, совпадающих на A с f , и расширим ее до решетки, с помощью всевозможных максимумов и минимумов. Если p аппроксимирует функцию модуля и $p(0) = 0$, то $\frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ аппроксимируется отображением $\frac{1}{2}(f + g + p(f - g))$, и, если $f|_A = g|_A$, то $\max\{f, g\}$ аппроксимируется отображением, равным $f|_A$ на A . Аналогично, минимум. Рассуждение из п. 6 проводим для дополнения к внутренности A (которая может быть пустой; в точках границы A функция g из п. 6 должна совпадать с f). □

Еще одно обобщение — на случай (почти) произвольных пространств:

Теорема 21 (Стоуна–Вейерштрасса) Пусть X — хаусдорфово компактное пространство, $P \subset C(X)$ — подмножество функций, замкнутое относительно сложения и умножения функций. Если для любых двух точек $x, y \in X$ существует функция $f \in P$, для которой $f(x) \neq f(y)$, то для любой функции $f \in C(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $g \in P$, что $\|f - g\| < \varepsilon$.

Доказательство аналогично доказательству для многочленов. Достаточно заметить, что замкнутость относительно алгебраических операций и указанное свойство “разделения точек” обеспечивают выполнение условий из пункта 6.

Теорема 22 (Уитни об аппроксимации) Пусть M — компактное гладкое многообразие, $N \subset \mathbb{R}^k$ — компактное гладкое подмногообразие, $f : M \rightarrow N$ — непрерывное отображение. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и гладкое отображение $g : M \rightarrow N$, что $\|f - g\| < \varepsilon$.

Доказательство. Мы используем другую теорему Уитни, которую в рамках этого курса не доказываем. Вот ее формулировка: Если $N \subset \mathbb{R}^k$ — гладкое подмногообразие размерности n , то существует такое $\varepsilon > 0$, что ε -окрестность N_ε подмногообразия N диффеоморфна $N \times \mathbb{D}^{k-n}$.

Пусть $q : N_\varepsilon \rightarrow N$ — гладкое отображение, соответствующее проекции $N \times \mathbb{D}^{k-n} \rightarrow N$ при указанном диффеоморфизме. Аппроксимируем отображение f гладким отображением $h : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ и заметим, что его образ лежит в N_ε , поэтому можно взять композицию с q : $g = q \circ h : M \rightarrow N$. □

Гомотопии

Гомотопия. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемость.

CW-пространства

Подмножество $e = e^k \subset X$ в пространстве X называется клеткой размерности k , если существует такое непрерывное отображение $f : \mathbb{D}^k \rightarrow X$, что его ограничение на $\mathbb{S}^{k-1} \subset \mathbb{D}^k$ является гомеоморфизмом, и $e = f(\mathbb{S}^{k-1})$.

Хаусдорфово пространство X называется клеточным, если его можно представить в виде объединения непересекающихся клеток, $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{\alpha} e_{\alpha}^k$ так, чтобы выполнялись аксиомы:

(C) граница любой клетки e^k содержится в конечном числе клеток размерности $\leq k$;

(W) подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap \bar{e}^k$ замкнуто для любой клетки e^k .

Объединение клеток размерности $\leq k$ называется k -мерным остовом пространства X .

Упражнение: Доказать, что k -мерным остов замкнут.

Приклеивание клетки. Если дано отображение $\varphi : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow X$ в клеточное пространство X , и его образ лежит в $k-1$ -мерном остове, то пространство $\mathbb{D}^k \cap X$ можно профакторизовать по отношению эквивалентности $\sim$, которое объединяет в один класс точки $x \in \mathbb{S}^{k-1}$ и $\varphi(x)$.

Клеточное подпространство — замкнутое подпространство, состоящее из клеток.

Антипримеры:

Полуинтервал $[0, 1)$.

$\mathbb{D}^2$ с разбиением на одну 2-мерную клетку (сам диск без границы) и бесконечное количество нульмерных клеток — точек границы — не удовлетворяет (C), но удовлетворяет (W).

Букет бесконечного числа отрезков $X = \bigvee_{i=1}^{\infty} [0, 1]$. На i -том отрезке возьмем точку $1/i$, и из всех таких точек составим множество $A \subset X$. Пересечение A с каждой клеткой состоит из одной точки, поэтому замкнуто, но само A не замкнуто. (Однако, топологию можно изменить так, чтобы X стало клеточным: на объединении $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]$ отрезков зададим топологию набором открытых множеств вида $U_1 \cup \dots \cup U_n \cup [0, 1] \cup [0, 1] \cup \dots$).

Примеры: $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{R}^{\infty}$ (топология: A замкнуто, если $A \cap \mathbb{R}^n$ замкнуто для любого n), $\mathbb{S}^{\infty}, \mathbb{R}P^{\infty}, \mathbb{C}P^n$ ($\mathbb{D}^{2n} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n+1}, z_n \geq 0\}$, $(z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_0 : z_1 : \dots : z_n]$; клетки $e^{2k} = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n], z_k \neq 0, z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}$), поверхности.

Если X, Y — клеточные, $X \times Y$ разбивается на клетки вида $e \times e'$, где e — клетки в X , e' — в Y (если клеток бесконечно много, иногда могут возникнуть проблемы).

Если $Y \subset X$ — клеточное подпространство, то X/Y клеточно. Остаются клетки, не входившие в Y , и нульмерная клетка, соответствующая Y .

Свойство продолжения гомотопии

Подпространство $A \subset X$ называется *ретрактом*, если существует такое отображение $r : X \rightarrow X$, что $r(X) = A$ и $r|_A = \text{id}_A$.

Оно называется *деформационным ретрактом*, если r гомотопно id_X .

Примеры: $x_0 \times Y \subset X \times Y$; $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Пара (X, A) обладает *свойством продолжения гомотопии*, если любое отображение из $X \times 0 \cup A \times I \subset X \times I$ в произвольное пространство Z продолжается до отображения из $X \times I$ в Z .

Теорема 23 Пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии $\iff X \times 0 \cup A \times I$ — ретракт $X \times I$

Доказательство.

$\implies$: Возьмем $Z = X \times 0 \cup A \times I$ и продолжим тождественное отображение до отображения $X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$. Это отображение и есть ретракция.

$\impliedby$: Пусть $r : X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ — ретракция. Ее композиция с $f : X \times 0 \cup A \times I \rightarrow Z$ — требуемое продолжение.

□

Теорема 24 Пусть (X, A) — клеточная пара. Тогда она обладает свойством продолжения гомотопии.

Доказательство. Начнем с наблюдения, что $\mathbb{D}^n \times 0 \cup \mathbb{S}^{n-1} \times I$ — ретракт $\mathbb{D}^n \times I$ (рисунок), т.е. существует ретракция $R : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow \mathbb{D}^n \times 0 \cup \mathbb{S}^{n-1} \times I$.

Докажем существование соответствующей ретракции. Будем строить ее индуктивно, по клеткам, не лежащим в A . Пусть e^0 — нульмерная клетка вне A . Положим $r(e^0 \times t) = e^0 \times 0, t \in I$. Построив так отображение на 0-мерном остове, перейдем к индукции по размерности клеток. Пусть e^n — клетка вне A , а ретракция r уже определена на остове X^{n-1} . Пусть $f : \mathbb{D}^n \rightarrow X^n$ — характеристическое отображение. Продолжим отображение r , заданное на $X^{n-1} \times I$, на $(X^{n-1} \cup e^n) \times I$ (это можно делать одновременно по всем клеткам данной размерности одновременно). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^n \times I & \xrightarrow{R} & \mathbb{D}^n \times 0 \cup \mathbb{S}^{n-1} \times I \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ f(\mathbb{D}^n) \times I & \xrightarrow{r} & f(\mathbb{D}^n) \times 0 \cup f(\mathbb{S}^{n-1}) \times I. \end{array}$$

Нижняя стрелка определена так: если $x = f(y)$, то $r(x) = f(R(y))$. Если $f(y) = f(z)$, то $y, z \in \mathbb{S}^{n-1}$, поэтому r определено корректно.

В случае бесконечной размерности нужно еще дополнительно проверять непрерывность r — упражнение. □

Теорема 25 Если пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии и A стягиваемо, то отображение факторизации $q : X \rightarrow X/A$ является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Стягиваемость A означает существование гомотопии $h : A \times I \rightarrow A$, соединяющей тождественное отображение id_A (при $t = 0$) и отображение A в некоторую точку $a_0 \in A$ (при $t = 1$). Зададим отображение $H : X \times 0 \cup A \times I \rightarrow X$, $H(x, 0) = x$, $H(a, t) = h(a, t)$, $x \in X$, $a \in A$. По предположению, H продолжается до отображения $F : X \times I \rightarrow X$, при этом $F_0 = \text{id}_X$, и $F_t(A) \subset A$ для любого $t \in I$, поэтому корректно определена гомотопия $f_t : X/A \rightarrow X/A$, замыкающая коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_t} & X \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{f_t} & X/A. \end{array}$$

При $t = 1$ $F_1(A) = a_0$, поэтому корректно определено отображение $g : X/A \rightarrow X$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_1} & X \\ q \downarrow & \nearrow g & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{f_1} & X/A. \end{array}$$

Отображения g и q взаимно обратны с точностью до гомотопии: $gq = F_1 \sim F_0 = \text{id}_X$, $qg = f_1 \sim f_0 = \text{id}_{X/A}$. □

Теорема о клеточной аппроксимации

Теорема 26 Пусть X, Y — CW -пространства, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Тогда существует такое гомотопное ему отображение $g : X \rightarrow Y$, что $g(X^k) \subset Y^k$ для всех k .

Доказательство.

Лемма 27 (о свободной точке) Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — ограниченное открытое множество, $\varphi : U \rightarrow \text{Int } \mathbb{D}^n$ — непрерывное отображение, $d^n \subset \text{Int } \mathbb{D}^n$ — шар меньшего размера, $V = \varphi^{-1}(d^n) \subset U$. Тогда, в предположении $k < n$, существует такое отображение $\psi : U \rightarrow \text{Int } \mathbb{D}^n$, что $\varphi(x) = \psi(x)$ при $x \in U \setminus V$, и существует точка $y \in d^n$, не лежащая в $\psi(U)$.

Доказательство. Рассмотрим в шаре d^n концентрические шары $d_1 \subset d_2 \subset d_3 \subset d_4 \subset d^n$ радиусов $r/5, 2r/5, 3r/5, 4r/5$, где r — радиус d^n . Для $\varepsilon = r/5$ аппроксимируем отображение φ на d_2 гладким отображением φ' с точностью до этого ε . Зададим отображение ψ формулой

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \varphi(x) \notin d_3; \\ t\varphi'(x) + (1-t)\varphi(x), & \varphi(x) \in d_3 \setminus d_2; \\ \varphi'(x), & \varphi(x) \in d_2, \end{cases}$$

где $t = 3-5\rho$, а ρ — расстояние от $\varphi(x)$ до центра шариков. Тогда φ и ψ совпадают вне $V = \varphi^{-1}(d^n)$, и ψ гладко отображает $\varphi^{-1}(d_2)$ в d_3 , причем $\psi(x) \notin d_1$ если x лежит вне $\varphi^{-1}(d_2)$. Остается вспомнить, что образ $\psi(V)$ имеет меру 0, поэтому в d_1 существует точка вне этого образа. $\square$

Лемма 28 Пусть $A \subset X$ — компактное подпространство в клеточном пространстве. Тогда A пересекается не более, чем с конечным числом (замыканий) клеток.

Доказательство. От противного: пусть имеется бесконечное число таких клеток e_α , что $A \cap \bar{e}_\alpha \neq \emptyset$. В каждом непустом пересечении выберем точку p_α . Пусть P — множество всех таких клеток, а $P_\alpha = P \setminus p_\alpha$. По аксиоме (W), множества P и P_α замкнуты, и X хаусдорфово, поэтому никакая точка p_α не может быть точкой накопления для множества P . Но A компактно, поэтому точка накопления существует. Это может быть лишь при условии, что P конечно. $\square$

Индукция по клеткам X . Предполагаем, что f уже клеточно на остове X^{k-1} и, возможно, на некоторых клетках размерности k . Обозначим соответствующее клеточное подпространство через $A \subset X$, и не будем менять отображение f на A . Рассмотрим клетку e^k , на которой f не клеточно, и выберем в Y клетку e^n максимальной размерности, пересекающуюся с $f(e^k)$. Если $n \leq k$, то делать ничего не надо, поэтому рассмотрим случай $n > k$. Пусть $h : \mathbb{D}^k \rightarrow X$, $k : \mathbb{D}^n \rightarrow Y$ — характеристические отображения этих клеток. Положим $U = h^{-1}(f^{-1}(e^n) \cap e^k)$. Определим отображение $\varphi : U \rightarrow \text{Int } \mathbb{D}^n$ как композицию

$$\varphi : U \xrightarrow{h} e^k \cap f^{-1}(e^n) \xrightarrow{f} e^q \xrightarrow{k^{-1}} \text{Int } \mathbb{D}^n.$$

Пусть $d^n \subset \text{Int } \mathbb{D}^n$ — меньший шар, $V = \varphi^{-1}(d^n)$, и пусть $\psi : U \rightarrow \text{Int } \mathbb{D}^n$ — отображение, построенное в лемме о свободной точке. Определим $f' : A \cup_h e^k \rightarrow Y$ формулой

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если } x \notin h(U); \\ g(x) & \text{если } x \in h(U), \end{cases}$$

где g есть композиция

$$g : h(U) \xrightarrow{h^{-1}} U \xrightarrow{\psi} \text{Int } \mathbb{D}^n \xrightarrow{k} e^n \subset Y.$$

Ясно, что f' совпадает с f на A , гомотопно f , и оставляет хотя бы одну точку e^n свободной. Это позволяет “сдуть” образ клетки e^k на границу клетки e^n , т.е. построить гомотопию к отображению $f'' : A \cup_h e^k \rightarrow Y$, образ которой лежит в Y^{n-1} .

По теореме о поднятии гомотопии, отображение f'' можно продолжить на весь X с сохранением гомотопности с f .

Заметим, что такое изменение f можно строить одновременно по всем клеткам размерности k .

Если размерность X конечна, то доказательство закончено. Если нет, то нужно построить бесконечную последовательность гомотопий с параметрами из $[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}]$, причем k -я гомотопия постоянна на клетках размерности $\leq k$, откуда следует ее непрерывность.

Фундаментальная группа

Пусть (X, x_0) — пространство с отмеченной точкой. Фиксируем на окружности $\mathbb{S}^1$, параметризованной углом $t/2\pi \in [0, 1]$, точку s_0 , отвечающую значению $t = 0$.

Непрерывное отображение $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ называется *путём*. Непрерывное отображение $\alpha : (\mathbb{S}^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ (переводящее отмеченную точку в отмеченную точку) называется *петлёй*. Петли α_0 и α_1 называются гомотопными, если существует гомотопия α_s , $s \in [0, 1]$, при которой $\alpha_s(s_0) = x_0$ для любого $s \in [0, 1]$. Если петли α и β гомотопны, будем писать $\alpha \sim \beta$. Класс гомотопической эквивалентности петли α будем обозначать $[\alpha]$.

Композицией (произведением) петель α и β называется петля γ , определенная формулой $\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2; \\ \beta(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$ Эту композицию будем обозначать $\alpha \cdot \beta$ или просто $\alpha\beta$.

Лемма 29 Пусть $\alpha_0 \sim \alpha_1$, $\beta_0 \sim \beta_1$, тогда $\alpha_0 \cdot \beta_0 \sim \alpha_1 \cdot \beta_1$.

Лемма 30 $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \sim (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Доказательство. Пусть $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — гомеоморфизм, переводящий $[0, 1/2]$ в $[0, 1/4]$, и $[1/2, 3/4]$ в $[1/4, 1/2]$, и пусть φ_s , $s \in [0, 1]$, — гомотопия, соединяющая φ с тождественным отображением отрезка $[0, 1]$. Тогда $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \circ \varphi_t$ — гомотопия, соединяющая $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ с $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. $\square$

Обозначим через ϵ постоянную петлю, $\epsilon(t) = x_0$ при всех $t \in [0, 1]$. Тогда аналогичным образом доказывается

Лемма 31 $\alpha \cdot \epsilon \sim \alpha \sim \epsilon \cdot \alpha$ для любой петли α .

Для петли α обозначим $\bar{\alpha}$ петлю, заданную формулой $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ (т.е. пробегаемую в обратном направлении).

Лемма 32 $\alpha \cdot \bar{\alpha} \sim \bar{\alpha} \cdot \alpha \sim \epsilon$ для любой петли α .

Доказательство. Гомотопия между $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ и ϵ задается формулой

$$\alpha_s(t) = \begin{cases} \alpha(2t(1 - s)), & t \in [0, 1/2]; \\ \alpha(2(1 - t)(1 - s)), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

$\square$

$\pi_1(X, x_0)$ — определение, индуцирование гомоморфизмов отображениями, гомотопии, сохраняющие отмеченные точки.

Лемма 33 Отображение $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ индуцирует гомоморфизм групп $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ по формуле $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Если $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ гомотопны с сохранением отмеченных точек, то $f_* = g_*$. Если $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, то $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Зависимость от отмеченной точки (связность)

$\phi_\gamma : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, $\phi_\delta \phi_\gamma^{-1}([\alpha]) = [\delta \bar{\gamma} \alpha \gamma \bar{\delta}] = [\beta]^{-1}[\alpha][\beta]$, поэтому если $\pi_1(X, x_0)$ абелева, то изоморфизм единственный.

Лемма 34 Пусть $F_s : X \rightarrow Y$ — гомотопия, соединяющая отображения $f, g : X \rightarrow Y$, и пусть $\gamma(s) = F_s(x_0)$ — путь, соединяющий точки $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Тогда $f_* = \phi_\gamma \circ g_*$.

Доказательство. Достаточно доказать, что петли $f \circ \alpha$ и $\bar{\gamma} \alpha \gamma$ гомотопны. Рассмотрим цилиндр $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ в качестве $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Тождественная петля нижнего основания гомотопна последовательному прохождению пути из $(1, 0, 0)$ в $(1, 0, 1)$, тождественной петли верхнего основания и обратного пути из $(1, 0, 1)$ в $(1, 0, 0)$. Взяв композицию с F_s , получаем требуемую гомотопию. $\square$

Следствие 35 Если $f : X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ — изоморфизм.

Доказательство. Пусть $g : Y \rightarrow X$ — гомотопически обратное отображение. Тогда $g_* f_* = \phi_\gamma$ для некоторого пути γ . Поэтому f_* — мономорфизм, а g_* — эпиморфизм. Меняя местами f_* и g_* , получаем требуемое. $\square$

π_1 для стягиваемых пространств, для сфер, для окружности.

Приложения фундаментальной группы окружности

1. Граница диска не является ретрактом диска. $\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{D}^2) \rightarrow \pi_1(S^1)$ нулевое.

Теорема 36 (Брауэр) Непрерывное отображение диска в себя имеет неподвижную точку.

Доказательство. Если вектор, соединяющий x с $f(x)$ ненулевой для любого $x \in \mathbb{D}^2$, то с его помощью можно определить ретракцию диска на его границу. $\square$

2. Основная теорема алгебры: любой многочлен над полем $\mathbb{C}$, отличный от константы, имеет корень.

Доказательство. Пусть многочлен $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ не имеет корней, и $n \geq 1$. Для каждого $r \geq 0$ определим петлю $\phi_r : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\phi_r(t) = \frac{p(re^{2\pi it})}{p(r)}$ (нет корней $\Rightarrow \phi_r(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, 1]$). Рассматривая r как параметр, видим, что петли ϕ_{r_1} и ϕ_{r_2} гомотопны. Поскольку при $r = 0$ петля постоянная, при любом r петля ϕ_r гомотопна постоянной, т.е. $[\phi_r] = 0$ в $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$.

Выберем $r > \max\{|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|, 1\}$, тогда при $|z| = r$

$$|z|^n = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|)|z|^{n-1} > |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0|.$$

Рассмотрим многочлен $p_s(z) = z^n + s(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0)$, $s \in [0, 1]$. При выбранном r многочлен $p_s(z)$ не имеет корней при $|z| = r$, поэтому по той же формуле, что и $\phi_r(t)$, получаем петлю $\phi_r(t, s)$ для каждого $s \in [0, 1]$. Ясно, что петли $\phi_r(t, 0)$ и $\phi_r(t, 1)$ гомотопны. Но $\phi_r(t, 0) = r^n e^{2\pi i n t}$ представляет элемент $n \in \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, а $[\phi_r(t, 1)] = 0$. $\square$

Свободные произведения групп, теорема ван Кампена

Пусть G, H — группы. Рассмотрим множество W всех слов (состоящих из букв — элементов этих групп) одного из следующих видов: $g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_n h_n$, $g_1 h_1 g_2 h_2 \dots h_{n-1} g_n$, $h_1 g_1 h_2 g_2 \dots g_{n-1} n h_n$, $h_1 g_1 h_2 g_2 \dots h_n g_n$, где $g_i \in G \setminus \{e_G\}$, $h_i \in H \setminus \{e_H\}$, а также пустого слова. Такие слова назовем *приведенными*. Определим умножение двух слов как приписывание одного слова к другому, и последующее приведение, т.е. умножение в одной из двух данных групп, если последняя буква первого слова и первая буква второго слова принадлежат одной и той же группе.

Лемма 37 W — группа.

Доказательство. Нейтральный элемент — пустое слово, обратный к слову w — слово, составленное из обратных к буквам, причем в обратном порядке. Остается проверить ассоциативность умножения. Это можно сделать непосредственно, разобрав несколько случаев, а можно более концептуально: построить инъективный гомоморфизм $L : W \rightarrow \Sigma(W)$ в группу $\Sigma(W)$ перестановок множества W .

Пусть $a, b \in W$. Положим $L_a(w) = aw$ (если слово aw не приведенное, приведем его). Нужно проверить, что $L_a L_b = L_{ab}$. Взяв в качестве w пустое слово, получаем инъективность L . Таким образом, W — подгруппа. $\square$

Обозначение: $G * H$.

Примеры $\mathbb{Z}, \mathbb{F}_n$. Задание групп образующими и соотношениями. Абеленизация.

Амальгамированное свободное произведение.

Пусть K — группа, $\alpha : K \rightarrow G$, $\beta : K \rightarrow H$ — гомоморфизмы. Рассмотрим в $G * H$ нормальную подгруппу N , порожденную всеми элементами вида $\alpha(k)\beta(k^{-1})$, $k \in K$. Положим $G *_K H = G * H / N$.

Теорема 38 (ван Кампен) Пусть $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ — открытые подмножества, $x_0 \in A \cap B$. Предположим, что A , B и $A \cap B$ линейно связны. Пусть $\alpha : \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$, $\beta : \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(B)$. Тогда $\pi_1(X) \cong \pi_1(A) *_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B)$.

Доказательство. Пусть $a : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$ и $b : \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(X)$ — отображения, индуцированные вложениями. Сопоставим слову $g_1 h_1 \cdots g_m h_m \in \pi_1(A) * \pi_1(B)$ петлю $a(g_1)b(h_1) \cdots a(g_m)b(h_m)$, $g_j \in \pi_1(A)$, $h_j \in \pi_1(B)$, и аналогично — другим типам слов. Это дает гомоморфизм $f : \pi_1(A) * \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(X)$.

Покажем сюръективность f . Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ — петля. По лемме Лебега существует разбиение отрезка точками t_i , $i = 1, \dots, n$ так, что $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ содержится в одном из множеств A или B . Обозначим участок петли γ от точки $\gamma(t_i)$ до точки $\gamma(t_{i+1})$ через γ_i , и соединим каждую точку $\gamma(t_i)$ с x_0 таким путем ρ_i , что если t_i лежит в одном из множеств A , B или $A \cap B$, то и весь путь ρ_i лежит в этом же множестве. Тогда для каждого i композиция $\bar{\rho}_i \gamma_i \rho_i$ является петлей, и $\gamma \sim (\bar{\rho}_1 \gamma_1 \rho_1) \cdots (\bar{\rho}_n \gamma_n \rho_n)$. Но каждая петля — элемент либо $\pi_1(A)$, либо $\pi_1(B)$, т.е. мы нашли слово, которое f отображает в $[\gamma]$.

Пусть γ — петля в $A \cap B$. Тогда $f(\alpha([\gamma])\beta([\gamma]^{-1})) = 1$, поэтому $f(n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Остается показать, что из $f(g) = 1$ следует, что $g \in N$.

$f(g) = 1$ означает, что петля, представляющая g , гомотопна постоянной петле. Пусть $F : [0, 1]^2 \rightarrow X$ — соответствующая гомотопия. По лемме Лебега существует такое конечное покрытие квадрата $[0, 1]^2$ квадратами, что образ каждого маленького квадрата целиком лежит либо в A , либо в B (метрику на квадрате надо взять такую, чтобы шары были квадратами). Еще ихмельчая их, можно получить такое разбиение отрезка $[0, 1]$ точками t_i , $i = 1, \dots, n$, что $F([t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}])$ лежит целиком либо в A , либо в B . Пользуясь линейной связностью X , выберем пути σ_{ij} , соединяющие x_0 с точками $F(t_i, t_j)$ с условием, как и ранее, что если точка $F(t_i, t_j)$ лежит в одном из множеств A , B или $A \cap B$, то и весь путь σ_{ij} лежит в этом же множестве. Злоупотребляя формальностями, мы будем называть путь $F(t, t_j)$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ (соотв. $F(t, s)$, $t_j \leq s \leq t_{j+1}$) петлей, подразумевая его композицию с путями $\sigma_{i,j}$ и $\bar{\sigma}_{i+1,j}$ (соотв. с путями $\sigma_{i,j}$ и $\bar{\sigma}_{i,j+1}$).

Петля $F(t, 0)$ представляет элемент g , и может быть записана в виде слова в $\pi_1(A) * \pi_1(B)$. Петля $f(t, 1)$ — постоянная. Между ними имеется конечное число петель $F(t, t_j)$, и мы будем последовательно переходить от петли $F(t, t_j)$ к $F(t, t_{j+1})$. Для каждого такого перехода понадобится еще n переходов. Рассмотрим петлю, состоящую из двух участков: $F(t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, и постоянного пути $F(1, s)$, $0 \leq s \leq t_1$. От этой петли перейдем к петле, состоящей из участков $F(t, 0)$, $0 \leq t \leq t_{n-1}$, и $F(t_{n-1}, s)$, $0 \leq s \leq t_1$. Эти две петли отличаются на квадрате $[t_{n-1}, 1] \times [0, t_1]$, и слова, соответствующие этим петлям, могут отличаться последними двумя буквами. Возможны две ситуации: (а) все 4 буквы (две последние в обоих словах) лежат в одной из групп $\pi_1(A)$ или $\pi_1(B)$ — тогда произведения этих двух букв задают один и тот же элемент этой же группы, т.к. пути, обходящие прямоугольник с разных сторон, гомотопны; (б) эти 4 буквы — из разных групп. Тогда, поскольку весь прямоугольник попадает в одно из множеств A или B , можно сделать так, чтобы все 4 буквы были из одной и той же группы. Например, если $h \in \pi_1(B)$, то $h = \beta(x)$ нужно заменить на $\alpha(x)\beta(x)^{-1} \cdot \beta(x) \in \pi_1(A)$. При этом возникает подслово $\alpha(x)\beta(x)^{-1} \in N$, т.е. соответствующие слова отличаются на слово из N . Передвигаясь так справа налево, и снизу вверх, мы переходим от слова g к пустому слову с помощью приписывания слов из N . Это и значит, что $g \in N$.

□

Следствие 39 Пусть X есть букет пространств X_α , $\alpha \in A$. Тогда $\pi_1(X) = *_{\alpha \in A} \pi_1(\alpha)$.

Теорема 40 Любое линейно связное клеточное пространство X гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной 0 -мерной клеткой.

Доказательство. Выберем одну 0 -мерную клетку e и соединим ее путями с остальными. По теореме о клеточной аппроксимации, эти пути можно считать лежащими в одномерном остове X^1 .

Для каждого такого пути γ приклеим двумерный диск по отображению нижней полуокружности в γ . При этом появляются две дополнительные клетки — одномерная (верхняя полуокружность) и двумерная (собственно диск). Так получается новое клеточное пространство $\tilde{X}$. Обозначим через Y подпространство, состоящее из e и добавленных одномерных клеток. Тогда $\tilde{X}/Y$ — клеточное. Пара $(\tilde{X}, Y)$ обладает свойством продолжения гомотопии, а Y стягиваемо, поэтому $\tilde{X}$ и $\tilde{X}/Y$ гомотопически эквивалентны. Кроме того, X является деформационным ретрактом $\tilde{X}$ (гомотопия тождественного отображения $\tilde{X}$ и ретракции на X строится для каждого диска деформацией в его проекцию на нижнюю полуокружность).

□

Пусть Y — клеточное пространство, к которому приклеивается двумерная клетка e^2 по характеристическому отображению $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$. Тогда отображение f задает петлю, т.е. элемент $\pi_1(Y)$, причем можно считать, что эта петля лежит в одномерном остове.

Теорема 41 Пусть X — клеточное пространство с одной 0 -мерной клеткой, одномерными клетками $\{e_\alpha^1\}_{\alpha \in A}$, двумерными клетками $\{e_\beta^2\}_{\beta \in B}$, и, возможно, с клетками старших размерностей. Тогда $\pi_1(X)$ есть группа, заданная образующими a_α и соотношениями b_β .

Доказательство. Так как 1 -мерный остов X^1 есть букет окружностей, $\pi_1(X^1)$ есть свободная группа $*_{\alpha \in A} \mathbb{Z}$ с образующими a_α . Доклеим к X^1 остальные клетки. При приклеивании одной клетки e^n к уже существующему пространству Y (это X^1 с частью приклеенных клеток) разобъем $Y' = Y \cup_f e^n$ (здесь f — характеристическое отображение границы диска, по которому и происходит приклеивание) на два открытых множества $A = Y' \setminus y_0$ и $B = Y' \setminus Y$ (здесь точка $y_0 \in e^n$ — центр приклеиваемого диска). Тогда $A \cap B$ гомеоморфно открытому диску с выколотым центром. Выберем отмеченную точку внутри $A \cap B$ и применим теорему ван Кампена.

Заметим, что A гомотопически эквивалентно Y , поэтому $\pi_1(A) \cong \pi_1(Y)$; B — диск $\mathbb{D}^n$, поэтому $\pi_1(B) = \{1\}$; а так как $A \cap B$ гомеоморфно диску с выколотой точкой, то при $n > 2$ $\pi_1(A \cap B) = \{1\}$, а при $n = 2$ $\pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}$. Поэтому при $n > 2$ $\pi_1(Y') = \pi_1(Y)$, т.е. приклеивание клеток размерности $n > 2$ не меняет фундаментальную группу. Остается разобрать случай $n = 2$.

Нужно вычислить ядро N отображения $\pi_1(Y) * \{1\} \rightarrow \pi_1(Y')$. По теореме ван Кампена оно совпадает с образом отображения $\pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$, который есть свободная подгруппа в $\pi(A)$, порожденная петлей f .

□

Накрытия

Тройка (Y, p, X) , где X и Y — линейно связные пространства, а $p : Y \rightarrow X$ — непрерывное сюръективное отображение, называется *накрытием*, если у любой точки $x \in X$ существует такая окрестность $U \ni x$, что $p^{-1}(U) = \cup_\alpha V_\alpha$ — объединение непересекающихся открытых множеств в Y , причем $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ — гомеоморфизм для каждого α .

Обычно еще дополнительно предполагается, что X локально линейно связно (т.е. любая окрестность содержит линейно связную окрестность).

Пример: Гавайская серьга.

Примеры накрытий и не накрытий.

Лемма 42 Пусть (Y, p, X) — накрытие. Для любого пути $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ и для любой такой точки $y \in Y$, что $p(y) = \gamma(0)$, существует единственный путь $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Y$, удовлетворяющий $\tilde{\gamma}(0) = y$ и $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Доказательство. Для каждой точки $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, выберем окрестность U как в определении накрытия, и выберем конечное подпокрытие U_j , $j = 1, \dots, m$ пути γ . По лемме Лебега выберем разбиение $[0, 1]$ точками t_i , $i = 1, \dots, n$, так, чтобы каждый отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ отображался бы целиком в одну из U_j . Пусть V — окрестность точки y , гомеоморфно проектирующаяся на окрестность U_1 точки $\gamma(0)$. Гомеоморфизм позволяет однозначно определить $\tilde{\gamma}$ на отрезке $[0, t_1]$. Повторяя это конечное число раз, получаем $\tilde{\gamma}$.

□

Следствие 43 Пусть (Y, p, X) — накрытие, $f : Z \rightarrow Y$, $F : Z \times I \rightarrow X$ и $p \circ f = F_0$. Тогда существует такое отображение $\tilde{F} : Z \times I \rightarrow Y$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Для каждой точки $z \in Z$ мы уже умеем поднимать путь $t \mapsto F(z, t)$ в Y . Остается проверить непрерывность, но она очевидна, т.к. окрестности в Y и их проекции в X гомеоморфны. □

Следствие 44 Гомоморфизм $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, p(y_0))$ инъективен, и его образ состоит из тех петель в X , которые поднимаются до петель в Y .

Доказательство. Пусть γ — петля в Y , и $p \circ \gamma$ — петля в X , гомотопная постоянной. Пусть $F : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow X$ — гомотопия, соединяющая $p \circ \gamma$ с постоянной петлей, а $\tilde{F}$ — ее поднятие в Y . Поднятие постоянной петли $\tilde{F}_1$ постоянно, т.е. $\tilde{F}_1(t) = y_0$, а $\tilde{F}_0(t) = \gamma(t)$, где $t \in [0, 1]$ — параметр на окружности (отождествляем 0 и 1). Также $\tilde{F}_s(0) = y_0$ для всех $s \in [0, 1]$ так как $p(\tilde{F}_s(0)) = F_s(0) = p(y_0)$. Второе утверждение очевидно. □

Теорема 45 Пусть (Y, p, X) — накрытие, $y_0 \in Y$, $x_0 = p(y_0)$ — отмеченные точки, и $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$, где Z линейно связно. Включение $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$ равносильно тому, что существует (и единственно) поднятие $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$, т.е. отображение, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & (Y, y_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Z, z_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0). \end{array}$$

Доказательство. Если поднятие $\tilde{f}$ существует, то имеет место включение $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Обратно, пусть это включение имеет место. Выберем путь γ от точки z_0 до точки z . Его можно поднять до пути $\tilde{\gamma}$ от точки y_0 (напомним, что $p(y_0) = x_0 = f(z_0)$) до некоторой точки $y = \tilde{\gamma}(1)$. Положим $\tilde{f}(z) = y$. Если γ' — другой путь от z_0 до z , то мы могли бы вместо y получить другую точку y' . Рассмотрим петлю $\gamma \cdot \gamma'$. Тогда путь, составленный из поднятий $\tilde{\gamma}$ и обратного к $\tilde{\gamma}'$ должен быть петлей (а не просто путем) так как класс петли $\gamma\tilde{\gamma}'$ попадает в $p_*(\pi_1(Y, y_0))$.

Непрерывность $\tilde{f}$ в точке z можно проверить, беря достаточно малые окрестности V точки $\tilde{f}(z)$. Поскольку f непрерывно, то существует окрестность W точки z , для которой $f(W) \subset U$, где $U = p(V)$. Поскольку $p|_V$ — гомеоморфизм между U и V , получаем, что $\tilde{f}(W) \subset V$. □

Универсальное накрытие

Пространство X называется *полулокально односвязным*, если для каждой точки $x \in X$ и ее открытой окрестности V имеется такая окрестность $U \subset V$, что любая петля в U может быть

стянута в точку в X (т.е. гомотопия может вылезать за пределы U). Это эквивалентно тому, что отображение $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ тривиально.

Опять Гавайская серьга.

С этого момента до окончания темы про накрытия будем считать, что X линейно связно, локально линейно связно и полулокально односвязно! Такие пространства будем называть “хорошими”.

Теорема 46 Если X — “хорошее” пространство, то существует накрытие $p : \tilde{X} \rightarrow X$ с односвязным $\tilde{X}$.

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in X$ и определим $\tilde{X}$ как множество равенством

$$\tilde{X} = \{[\gamma] : \gamma \text{ — путь, выходящий из } x_0\}.$$

Отображение p определим как $p([\gamma]) = \gamma(1)$.

Для того, чтобы задать топологию на $\tilde{X}$, рассмотрим совокупность $\mathcal{U}$ всех открытых подмножеств в X , для которых отображение $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ тривиально. $\mathcal{U}$ составляет базу топологии на X (т.к. X “хорошее”).

Для $U \in \mathcal{U}$ и пути γ из x_0 в какую-нибудь точку из U положим

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta] : \eta \text{ — путь в } U, \eta(0) = \gamma(1)\} \subset \tilde{X}.$$

Лемма 47 Пусть $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$. Тогда $U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$.

Доказательство. Из $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ следует, что $\gamma' = \gamma \cdot \eta$, где η — путь в U . Тогда элементы множества $U_{[\gamma']}$ имеют вид $\gamma' \cdot \eta \cdot \mu$, где μ — тоже путь в U , поэтому принадлежат $U_{[\gamma]}$. Аналогично получаем обратное включение $U_{[\gamma]} \subset U_{[\gamma']}$. $\square$

Лемма 48 Совокупность множеств $U_{[\gamma]}$ может быть базой топологии.

Доказательство. Нужно проверить, что пересечение двух множеств этой совокупности содержит множество из этой совокупности. Если $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$ непусто, то существует такой путь γ'' , что $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$. Тогда $U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]}$ и $U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma']}$. Тогда $\gamma''(1) \in U \cap V$. Пусть $W \subset U \cap V$, тогда $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$. $\square$

Зададим топологию на $\tilde{X}$ с помощью этой базы.

Рассмотрим ограничение $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \rightarrow X$. Ясно, что его образ лежит в U . Он совпадает с U т.к. U линейно связно. Это ограничение инъективно, т.к. все петли в U гомотопны. Если $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = [\gamma]$, и $U \subset X$, то $\tilde{x} \in U_{[\gamma]}$ и $p(U_{[\gamma]}) = U$, поэтому p непрерывно.

Пусть $[\gamma] \neq [\gamma']$, и пусть $U_{[\gamma]}$ и $U_{[\gamma']}$ пересекаются, т.е. существует такой путь γ'' , что $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$. Тогда по лемме 47 $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']} = U_{[\gamma'']}$ — противоречие. Значит, при разных $[\gamma]$ множества $U_{[\gamma]}$ не пересекаются, поэтому $(\tilde{X}, p, X)$ — накрытие (надо еще проверить линейную связность, что мы сделаем ниже).

Остается проверить, что $\tilde{X}$ односвязно. Для точки $[\gamma] \in \tilde{X}$ определим путь γ_s , $s \in [0, 1]$, формулой

$$\gamma_s(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{при } 0 \leq t \leq s; \\ \gamma(s) & \text{при } s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Путь $s \mapsto [\gamma_s]$ — путь в $\tilde{X}$, являющийся поднятием пути γ в X ; он начинается в $[x_0]$ (класс постоянного пути, соответствующего точке x_0) и заканчивается в точке $[\gamma]$. Заметим, что γ здесь произвольное, откуда следует линейная связность $\tilde{X}$.

Покажем, что $P = p_*(\pi_1(\tilde{X}, [x_0]))$ равно 0 в $\pi_1(X, x_0)$. Элементы P — петли в X , которые поднимаются до петель (а не путей) в $\tilde{X}$. Пусть $[\gamma] \in P$. Подняте γ , как мы видели, начинается в $[x_0]$ и заканчивается в $[\gamma]$. Если это петля, то $[\gamma] = [x_0]$, т.е. γ гомотопна постоянной петле. Значит, P состоит из тривиального элемента. $\square$

Лемма 49 Пусть $(\tilde{X}, p, X)$ и (Y, q, X) — накрытия, $\tilde{X}$ односвязно. Тогда существует такое отображение $r : \tilde{X} \rightarrow Y$, что $(\tilde{X}, r, Y)$ — накрытие, и $q \circ r = p$.

Доказательство. Это следует из теоремы о поднятии отображений. $\square$

Теорема 50 Пусть X — “хорошее” пространство. Для каждой подгруппы $H \subset \pi_1(X, x_0)$ существует такое накрытие (Y, p, X) , что $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = H$.

Доказательство. Зададим на $\tilde{X}$ отношение эквивалентности: $[\gamma] \sim [\gamma']$ если $\gamma(1) = \gamma'(1)$ и $[\bar{\gamma} \cdot \gamma'] \in H$. Пусть $Y = \tilde{X} / \sim$. Отображение $q : Y \rightarrow X$ определим как $q([\gamma]) = \gamma(1)$. Y линейно связно, а так как при дополнительной факторизации мы целиком отождествляем некоторые компоненты связности из прообраза $p^{-1}(U)$, $q^{-1}(U)$ по-прежнему есть объединение множеств, гомеоморфных U , т.е. (Y, q, X) — накрытие.

Для петли γ в (X, x_0) ее поднятие в $\tilde{X}$ начинается в $[x_0]$ и заканчивается в $[\gamma]$. Тогда образ этого поднятия в Y будет петлей тогда и только тогда, когда $[\gamma] \sim [x_0]$, т.е. $[\gamma] \in H$. $\square$

Два накрытия над X , $((Y_i, y_i^0), p_i, (X, x_0))$, $i = 1, 2$, называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм f , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (Y_1, y_1^0) & \xrightarrow{f} & (Y_2, y_2^0) \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

коммутативной.

Теорема 51 Два накрытия (Y_i, p_i, X) , $i = 1, 2$, изоморфны тогда и только тогда, когда $(p_1)_*(\pi_1(Y_1)) = (p_2)_*(\pi_1(Y_2))$.

Доказательство. Если накрытия изоморфны, то образы их фундаментальных групп совпадают. Докажем, что верно обратное. Если $(p_1)_*(\pi_1(Y_1)) = (p_2)_*(\pi_1(Y_2))$, то по теореме о поднятии отображения p_1 можно поднять до отображения $\tilde{p}_1 : Y_1 \rightarrow Y_2$. Аналогично поднимаем p_2 до $\tilde{p}_2 : Y_2 \rightarrow Y_1$. При этом $p_2 \tilde{p}_1 = p_1$, $p_1 \tilde{p}_2 = p_2$. Из единственности поднятия следует, что $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 = \text{id}$, $\tilde{p}_2 \tilde{p}_1 = \text{id}$, что и доказывает изоморфность накрытий. $\square$

Фундаментальная группа графа

Графом называется одномерное клеточное пространство. Нульмерные клетки — вершины, одномерные — ребра. Дерево — это граф без циклов (= стягиваемый: если дерево локально конечно, то оно гомеоморфно метрическому пространству, в котором длина каждого ребра равна 1; фиксируем одну из вершин, тогда к каждой из нее ведет единственный путь, по нему и строим гомотопию). Подграф максимален, если содержит все вершины графа (но необязательно все ребра).

Лемма 52 Связный граф содержит максимальное дерево. Любое дерево содержится в максимальном дереве.

Доказательство. Имеется частичный порядок по включению. Найдем максимальное дерево в этом смысле. Если есть вершина, которая не входит в это максимальное дерево, то, благодаря связности, соединим ее ребром — получим дерево, большее, чем максимальное. $\square$

Лемма 53 Пусть X — связный граф, $T \subset X$ — максимальное дерево. Тогда $\pi_1(X)$ есть свободная группа с образующими — ребрами из $X \setminus T$.

Доказательство. Т.к. T стягиваемо, фактор-отображение $X \rightarrow X/T$ есть гомотопическая эквивалентность. Но X/T — букет окружностей. $\square$

Лемма 54 Любое накрывающее пространство над графом есть граф.

Доказательство. Накрытие есть тоже одномерное клеточное пространство. $\square$

Как следствие, получаем

Теорема 55 (Нильсен–Шрайер) Любая подгруппа свободной группы свободна.

Когомологии де Рама

Сведения из линейной алгебры:

V — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{R}$, $T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ — полилинейная функция (тензор). Если $e_1, \dots, e_n$ — базис V , то $T_{i_1, \dots, i_p} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ — координаты T . Если $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ — базис в двойственном пространстве, двойственный к $e_1, \dots, e_n$, то $\varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_p}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_p}^{i_p}$, и $T = T_{i_1, \dots, i_p} \varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_p}$. Обозначим множество всех таких полилинейных функций через $\Theta^p = \Theta^p(V)$.

Полилинейная функция T кососимметрична, если для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_p$ имеет место равенство $T_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}} = (-1)^\sigma T_{i_1, \dots, i_p}$. (почему это определение не зависит от выбора базиса?) Кососимметричные полилинейные функции называют *внешними формами*.

Множество всех кососимметричных полилинейных функций порядка p обозначим через Λ^p . Формула $Alt(T)_{i_1, \dots, i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_p} (-1)^\sigma T_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}}$ задает оператор проектирования Θ^p на подпространство Λ^p . Часто множитель $\frac{1}{p!}$ не используют, тогда получаем оператор, отличающийся от проектора на числовой множитель, что не имеет особого значения.

Если $T \in \Lambda^p$, $S \in \Lambda^q$, то $T \otimes S$ не обязано лежать в Λ^{p+q} , но можно определить операцию *внешнего произведения* $T \wedge S = Alt(T \otimes S)$. Она обладает свойствами

- линейность по каждому сомножителю;
- ассоциативность;
- антикоммутативность, $T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T$.

В координатах внешние формы можно записать как суммы по упорядоченному набору индексов: $T = \sum_{i_1 < \dots < i_p} T_{i_1, \dots, i_p} \varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p}$.

Если $p > \dim V$, то единственная внешняя форма порядка p — нулевая. Если $p = 1$, внешние формы — линейные функционалы на V . При $p = 0$ внешние формы — константы.

Сведения из дифференциальной геометрии:

Пусть $(x^1, \dots, x_n)$ — локальные координаты в карте многообразия M . Они задают базис $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ в касательном пространстве $V = T_x(M)$ в точке $x \in M$. Двойственным базисом двойственного пространства служат дифференциалы $dx^1, \dots, dx^n$. Тензорное поле на этом многообразии есть набор гладких функций $T_{i_1, \dots, i_p}(x)$, которые при замене локальных координат изменяются по формуле $\tilde{T}_{i_1, \dots, i_p} d\tilde{x}^{i_1} \otimes \dots \otimes d\tilde{x}^{i_p} = T_{j_1, \dots, j_p} \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_p}$.

Кососимметричные тензорные поля называются *дифференциальными формами*, обозначаются обычно греческими буквами, и в локальных координатах записываются в виде $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Множество всех дифференциальных форм порядка p на M обозначается $\Lambda^p(M)$. Оно, очевидно, является линейным пространством.

Пусть $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, $(x^1, \dots, x^m)$ — локальные координаты в окрестности точки $x \in M$, $(y^1, \dots, y^n)$ — локальные координаты в окрестности точки $f(x) \in N$. Отображение f индуцирует линейное отображение касательных пространств $f_* : T_x(M) \rightarrow T_{f(x)}(N)$ по формуле $f_*(a^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$, где $a = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x(M)$. Соответственно, линейные функции отображаются в противоположную сторону: если $l : T_{f(x)}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная функция, то $f^*(l)(a) = l(f_*(a))$. Это дает линейное отображение $f^* : \Lambda^1(N) \rightarrow \Lambda^1(M)$.

Аналогично, имеется отображение $f^* : \Lambda^p(N) \rightarrow \Lambda^p(M)$ для полилинейных функций: если ω — полилинейная функция от p векторных аргументов, то $f^*(\omega)$ определяется формулой $f^*(\omega)(a_1, \dots, a_p) = \omega(f_*(a_1), \dots, f_*(a_p))$, где $a_1, \dots, a_p \in T_x(M)$.

В локальных координатах f^* можно записать так: если $l = l_i dy^i \in \Lambda^1(N)$, то $f^*(l) = l_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$; аналогично, если $\omega = \omega_{i_1, \dots, i_p} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p} \in \Lambda^p(N)$, то $f^*(\omega) = \omega_{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$.

Легко видеть, что верна формула $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.

Также очевидно, что если $g : N \rightarrow R$, то $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Внешнее дифференцирование

Пусть $\omega \in \Lambda^p(M)$, записанная в локальных координатах в виде $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Определим в этих координатах (в этой же карте) внешнюю форму $d\omega$ формулой

$$d\left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\right) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\omega_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_{k; i_1 < \dots < i_p} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Для склеивания формул в пересекающихся картах нужно определить, как ведет себя эта форма при замене координат. Разберем сначала случай $p = 1$. Тогда $\omega = \sum_i \omega_i dx^i = \sum_{i,j} \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$,

$$d\left(\sum_{i,j} \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j\right) = \sum_{i,j,l} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial y^l} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^l \wedge dy^j + \omega_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^l} dy^l \wedge dy^j\right) = \sum_{i,j,l} \frac{\partial \omega_i}{\partial y^l} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^l \wedge dy^j$$

(здесь мы пользуемся тем, что если $b_{jl} = b_{lj}$, то $\sum_{j,l} b_{jl} dy^l \wedge dy^j = 0$). Аналогично получаем

$$d\left(\sum_{i_1 < \dots < i_p; j_1, \dots, j_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{j_p}} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p}\right) = \sum_{l; i_1 < \dots < i_p; j_1, \dots, j_p} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}}{\partial y^l} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{j_p}} dy^l \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p}.$$

Сравним формулы для $d\omega$ в обеих системах координат:

$$\sum_{k; i_1 < \dots < i_p} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

и

$$\sum_{l; i_1 < \dots < i_p; j_1, \dots, j_p} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}}{\partial y^l} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{j_p}} dy^l \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p}.$$

Поскольку $dx^{i_r} = \frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{j_r}} dy^{j_r}$, $r = 1, \dots, p$, и $\frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^k} = \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}}{\partial y^l} \frac{\partial x^l}{\partial x^k}$, получаем, что переход от одной системы координат к другой происходит по той же формуле, что для внешних форм порядка $p+1$ (т.е. умножением на $p+1$ экземпляров $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}$).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Лемма 56 *Отображение $d : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)$ корректно определено.*

Оно, очевидно, является линейным отображением линейных пространств, и характеризуется следующим важным свойством.

Лемма 57 $d^2 = 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} d^2\left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\right) &= d\left(\sum_{k; i_1 < \dots < i_p} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\right) \\ &= \sum_{k, l; i_1 < \dots < i_p} \frac{\partial^2 \omega_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^k \partial x^l} dx^l \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 58 Если $\alpha \in \Lambda^p(M)$, $\beta \in \Lambda^q(M)$, то $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.

Доказательство. Запишем в локальных координатах $\alpha = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$, $\beta = \sum \beta_{j_1, \dots, j_q} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$, где dx^α (соотв. dx^β) обозначает $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ (соотв. $dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$). Также для краткости обозначим $\alpha_{i_1, \dots, i_p}$ и $\beta_{j_1, \dots, j_q}$ через α_* и β_* . Тогда

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \sum \frac{\partial(\alpha_* \beta_*)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\ &= \sum \frac{\partial \alpha_*}{\partial x^k} \beta_* dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta + \sum \alpha_* \frac{\partial \beta_*}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\ &= \sum \frac{\partial \alpha_*}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge \beta_* dx^\beta + \sum \alpha_* dx^k \wedge dx^\alpha \wedge \frac{\partial \beta_*}{\partial x^k} dx^\beta \\ &= d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d(\beta) \end{aligned}$$

(знак появился при перестановке dx^k и dx^α).

□

Заметим, что d это не одно отображение, а набор отображений $d = d_k : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$. Для удобства мы иногда будем указывать индекс у d . В частности, $d^2 = 0$ можно записать как $d_k \circ d_{k-1} = 0$ для всех k .

Пусть $\dim M = n$. Рассмотрим последовательность линейных пространство и их отображений

$$0 \xrightarrow{0} \Lambda^0(M) \xrightarrow{d_0} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{k-1}} \Lambda^k(M) \xrightarrow{d_k} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Lambda^n(M) \xrightarrow{0} 0.$$

Лемма 59 Из $d_k \circ d_{k-1} = 0$ следует, что $\text{Im } d_{k-1} \subset \text{Ker } d_k$.

Определим когомологии равенством $H^k(M) = \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1}$.

Форма ω называется замкнутой (или циклом), если $d\omega = 0$, т.е. если $\omega \in \text{Ker } d$. Множество $\text{Ker } d$ всех циклов порядка k часто обозначается $Z^k(M) \subset \Lambda^k(M)$. Форма ω называется точной (или границей), если существует такая форма α , что $\omega = d\alpha$. Множество $\text{Im } d$ всех границ порядка k часто обозначается $B^k(M) \subset Z^k(M)$. В этих обозначениях $H^k(M) = Z^k(M) / B^k(M)$.

Пример: Когомологии одноточечного пространства.

$\Lambda^k(pt) = 0$ при $k > 0$ и $\Lambda^0(pt) = \mathbb{R}$. Отображение d равно нулю. Поэтому $H^k(pt) = \begin{cases} 0 & \text{при } k > 0; \\ \mathbb{R} & \text{при } k = 0. \end{cases}$

Пример: Когомологии в размерности 0.

Пусть M — связное многообразие. Тогда $H^0(M) \cong \mathbb{R}$. Действительно, $B^0(M) = 0$, т.е. $H^0(M) = Z^0(M)$. Пусть $g \in \Lambda^0(M)$, т.е. функция. $dg = 0$ равносильно тому, что g постоянна, т.е. $Z^0(M)$ — постоянные функции. Если M состоит из нескольких компонент связности, то $Z^0(M)$ — локально постоянные функции.

Пример: Когомологии окружности.

$H^0(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$; $H^k(\mathbb{S}^1) = 0$ при $i > 1$. Остается вычислить $H^1(\mathbb{S}^1)$. Пусть φ — угловой параметр на окружности, $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{S}^1)$. По соображениям размерности, $d\omega = 0$, поэтому $Z^1(\mathbb{S}^1) = \Lambda^1(\mathbb{S}^1)$. Для того, чтобы $\omega = dg$ для некоторой функции g , нужно проинтегрировать $\omega = f(\varphi)d\varphi$. Первообразная g должна удовлетворять условию $g(2\pi) = g(0)$. Определим линейное отображение $Z^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $\omega \mapsto \int_0^{2\pi} \omega$. Ясно, что это эпиморфизм, я его ядро совпадает с $B^1(\mathbb{S}^1)$.

Пусть $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Оно индуцирует отображение $f^* : \Lambda^k(N) \rightarrow \Lambda^k(M)$.

Лемма 60 $df^* = f^*d$.

Доказательство. Заметим, что это равенство достаточно проверять в локальных координатах. Сначала проверим утверждение в случае $\omega = \varphi \in \Lambda^0(N)$.

$$f^*(d\varphi) = f^*\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^i} dy^i\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} dx^j = d(f^*(\varphi)).$$

Теперь пусть $\omega = \omega_i dy^i \in \Lambda^1(N)$. Тогда

$$\begin{aligned} df^*(\omega_i dy^i) &= d(\omega_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}) \\ &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^k \wedge dx^j + \omega_i \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge dx^j \\ &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^k \wedge dx^j, \end{aligned}$$

а

$$f^*(d(\omega_i dy^i)) = f^*(\frac{\partial \omega_i}{\partial y^l} dy^l \wedge dy^i) = \frac{\partial \omega_i}{\partial y^l} \frac{\partial y^l}{\partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^k \wedge dx^j = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^k \wedge dx^j.$$

Случай произвольного порядка можно расписать аналогично, а можно воспользоваться индукцией, благодаря тому, что любую форму можно записать как сумму форм вида $\alpha \wedge \beta$, где порядок α и β меньше порядка их внешнего произведения, а затем воспользоваться формулами $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$ и $d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha) \wedge \beta \pm \alpha \wedge d(\beta)$.

□

Следствие 61 $f^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M)$; $f^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$. Поэтому корректно определено отображение когомологий $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$.

Гомотопическая инвариантность когомологий

Теорема 62 Пусть $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ — гомотопные гладкие отображения. Тогда отображения f_1^* и f_0^* из $H^*(N)$ в $H^*(M)$ совпадают.

Доказательство. Пусть $F : M \times I \rightarrow N$ — гомотопия, соединяющая f_0 и f_1 . По относительной версии теоремы о гладкой аппроксимации, существует гладкое отображение $M \times I$ в N , совпадающее с F на границе цилиндра, т.е. гомотопные отображения гладко гомотопны. Далее мы будем считать F уже гладким.

Пусть $\omega \in \Lambda^k(N)$, тогда $F^*(\omega) \in \Lambda^k(M \times I)$ (тут надо либо работать с формами на многообразии с краем, либо расширить замкнутый отрезок до открытого интервала $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$). В качестве карт на $M \times I$ можно взять $U_\alpha \times I$, где U_α — карты на M . Запишем $F^*(\omega)$ в локальных координатах $(t, x^1, \dots, x^m)$ в карте $U_\alpha \times I$: $F^*(\omega) = \omega_{1;i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \omega_{2;i_1, \dots, i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dt$ (мы сгруппировали вместе слагаемые с и без dt). Это позволяет разложить $F^*(\omega)$ на две формы, ω_1 и ω_2 . Если то же самое сделать в карте $U_\beta \times I$, получатся формы ω'_1 и ω'_2 . Поскольку якобиан перехода от $(t, x^1, \dots, x^m)$ к $(1, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ блочно-диагональный, на пересечении карт формы ω_k и ω'_k ($k = 1, 2$) совпадают, т.е. указанное разложение корректно определяет формы ω_1 и ω_2 глобально на $M \times I$, и

$$F^*(\omega) = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt.$$

Положим

$$h(\omega) = \int_0^1 \omega_2 dt.$$

Эта формула задает отображение $h : \Lambda^k(N) \rightarrow \Lambda^{k-1}(M)$.

Для различения дифференциалов, будем указывать пространство в качестве индекса.

Поскольку $df^* = f^*d$,

$$\begin{aligned} F^*d_N(\omega) &= d_{M \times I}F^*(\omega) = d_{M \times I}(\omega_1 + \omega_2 \wedge dt) \\ &= d_M(\omega_1) \pm \frac{\partial}{\partial t} \omega_1 \wedge dt + d_M(\omega_2 \wedge dt) \\ &= d_M(\omega_1) + \left(d_M(\omega_2) \pm \frac{\partial}{\partial t} \omega_1 \right) \wedge dt \end{aligned}$$

(знак можно уточнить, но это нам не потребуется).

Тогда

$$h(d_N(\omega)) = \int_0^1 \left(d_M(\omega_2) \pm \frac{\partial}{\partial t} \omega_1 \right) dt = \int_0^1 d_M(\omega_2) dt \pm (\omega_1|_{t=1} - \omega_1|_{t=0}).$$

Но $\int_0^1 d_M(\omega_2) dt = d_M(h(\omega))$, поэтому

$$h(d_N(\omega)) - d_M(h(\omega)) = \pm(\omega_1|_{t=1} - \omega_1|_{t=0}).$$

Заметим, что $\omega_1|_{t=\tau} = (F_\tau)^*(\omega)$, где $F_\tau(x) = F(x, \tau)$. В итоге получается, что

$$(f_1)^*(\omega) - (f_0)^*(\omega) = \pm(hd_N - d_Mh)(\omega).$$

Если ω замкнута, т.е. $d_N(\omega) = 0$, то $(f_1)^*(\omega) - (f_0)^*(\omega) = \pm d_M(h(\omega))$ — точная форма. Это означает, что $(f_1)^*(\omega)$ и $(f_0)^*(\omega)$ определяют один и тот же элемент в факторпространстве $Z^k(M)/B^k(M)$. □

Следствие 63 Если M и N гомотопически эквивалентны, то $H^*(M) \cong H^*(N)$. В частности, $H^*(\mathbb{R}^n) \cong H^*(pt)$.

Комплексы. Точная последовательность Майера–Виеториса

Комплексом L^* линейных пространств называется (конечная или бесконечная) последовательность линейных пространств и их отображений

$$\dots \xrightarrow{d_{k-2}} L^{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} L^k \xrightarrow{d_k} L^{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} \dots$$

где $d_k d_{k-1} = 0$ для всех k . Последнее условие означает, что $\text{Im } d_{k-1} \subset \text{Ker } d_k$. Если при этом для всех k выполнено $\text{Im } d_{k-1} = \text{Ker } d_k$, то комплекс называется точной последовательностью. Факторпространства $H^k(L^*) = \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1}$ называются когомологиями комплекса L^* . Когомологии точной последовательности нулевые. Когомологии комплекса внешних форм — когомологии многообразия.

Короткой точной последовательностью называется последовательность линейных пространств

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

где f инъективно, а g сюръективно, т.е. $C = B/A$.

Пусть U_1, U_2 — открытое покрытие многообразия $X = U_1 \cup U_2$, и пусть $Z = U_1 \cap U_2$. Вложение $i_r : Z \subset U_r$, $r = 1, 2$, индуцирует отображение $i_r^* : \Lambda^k(U_r) \rightarrow \Lambda^k(Z)$, а вложение $j : U_1 \sqcup U_2 \rightarrow X$ индуцирует отображение $j^* : \Lambda^k(X) \rightarrow \Lambda^k(U_1) \oplus \Lambda^k(U_2) = \Lambda^k(U_1 \sqcup U_2)$. Для $(\alpha, \beta) \in \Lambda^k(U_1) \oplus \Lambda^k(U_2)$ положим $I(\alpha, \beta) = i_1^*(\alpha) - i_2^*(\beta)$.

Лемма 64 Последовательность

$$0 \longrightarrow \Lambda^k(X) \xrightarrow{j^*} \Lambda^k(U_1) \oplus \Lambda^k(U_2) \xrightarrow{I} \Lambda^k(Z) \longrightarrow 0$$

точна для каждого k .

Доказательство. Очевидно, j^* инъективно, и $\text{Im } j^* \subset \text{Ker } I$. Если $I(\alpha, \beta) = 0$, то α и β совпадают на Z , и можно определить $\omega \in \Lambda^k(X)$ как α на U_1 и как β на U_2 (и они согласованы на Z). Тогда $(\alpha, \beta) = j^*(\omega)$, т.е. $\text{Im } j^* = \text{Ker } I$. остается проверить сюръективность I . Пусть φ_1, φ_2 — гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию (U_1, U_2) (если умеем строить непрерывное разбиение единицы, то применяем гладкую аппроксимацию). Пусть $\omega \in \Lambda^k(Z)$. Положим $\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_2(x)\omega(x) & \text{при } x \in \text{supp } \varphi_2 \cap U_1; \\ 0 & \text{при } x \in U_1 \setminus \text{supp } \varphi_2, \end{cases} \quad \beta(x) = \begin{cases} -\varphi_1(x)\omega(x) & \text{при } x \in \text{supp } \varphi_1 \cap U_2; \\ 0 & \text{при } x \in U_2 \setminus \text{supp } \varphi_1. \end{cases}$

Тогда $(\alpha, \beta) \in \Lambda^k(U_1) \oplus \Lambda^k(U_2)$, и $I(\alpha, \beta) = \alpha|_Z - \beta|_Z = (\varphi_1 + \varphi_2)\omega = \omega$. □

Рассмотрим три комплекса, A^* , B^* и C^* , связанные между собой отображениями $f_k : A^k \rightarrow B^k$ и $g_k : B^k \rightarrow C^k$. Далее мы не будем писать индексы у отображений, т.к. они однозначно определяются из контекста. Предположим, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{d} & A^{k-1} & \xrightarrow{d} & A^k & \xrightarrow{d} & A^{k+1} \xrightarrow{d} \dots \\
 & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\
 \dots & \xrightarrow{d} & B^{k-1} & \xrightarrow{d} & B^k & \xrightarrow{d} & B^{k+1} \xrightarrow{d} \dots \\
 & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g \\
 \dots & \xrightarrow{d} & C^{k-1} & \xrightarrow{d} & C^k & \xrightarrow{d} & C^{k+1} \xrightarrow{d} \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

коммутативна, а столбцы — короткие точные последовательности.

Покажем, что эта диаграмма задает отображение $\partial : H^k(C^*) \rightarrow H^{k+1}(A^*)$.

Пусть $[c] \in H^k(C^*)$, т.е. $c \in C^k$ и $d(c) = 0$. Благодаря сюръективности g существует такое $b \in B^k$, что $c = g(b)$. Из коммутативности диаграммы $g(d(b)) = d(g(b)) = d(c) = 0$, т.е. $d(b) \in \text{Ker } g = \text{Im } f$, следовательно, существует такое $a \in A^{k+1}$, что $d(b) = f(a)$. Из коммутативности диаграммы получаем $f(d(a)) = d(f(a)) = d^2(b) = 0$, и из инъективности f получаем, что $d(a) = 0$. Тогда a задает элемент $[a] \in H^{k+1}(A^*)$. Положим $\partial([c]) = [a]$.

Лемма 65 *Отображение ∂ определено корректно.*

Доказательство. Пусть $c' \in [c]$. Это значит, что существует такое $c_0 \in C^{k-1}$, что $d(c_0) = c' - c$. По нему построим b' и a' . Возьмем $b_0 \in B^{k-1}$ так, чтобы $g(b_0) = c_0$. Тогда $g(b' - b - d(b_0)) = c' - c - g(d(b_0)) = c' - c - d(g(b_0)) = 0$, поэтому $g(b' - b - d(b_0)) \in \text{Im } f$, откуда получаем существование такого $a_0 \in A^k$, что $b' - b - d(b_0) = f(a_0)$. Из коммутативности получаем $f(d(a_0)) = d(f(a_0)) = d(b' - b - d(b_0)) = f(a' - a)$, и инъективность f означает, что $d(a_0) = a' - a$, поэтому $[a'] = [a]$. □

Заметим, что отображение комплексов $f : A^k \rightarrow B^k$, коммутирующее с дифференциалом, индуцирует отображение их когомологий. Действительно, пусть $a \in A^k$, $d(a) = 0$. Тогда определим $f^* : H^k(A^*) \rightarrow H^k(B^*)$ равенством $f^*([a]) = [f(a)]$.

Лемма 66 *Отображение f^* определено корректно.*

Доказательство. Поскольку $d(f(a)) = f(d(a)) = 0$, $f(a) \in \text{Ker } d$. Если $a' - a = d(a_0)$, то $f(a') - f(a) = f(d(a_0)) = d(f(a_0))$, т.е. $f(a') - f(a) \in \text{Im } d$. □

Теорема 67 *Последовательность*

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^k(A^*) \xrightarrow{f^*} H^k(B^*) \xrightarrow{g^*} H^k(C^*) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} \dots$$

точна.

Доказательство. Легкая часть: композиции $g^* \circ f^*$, $\partial \circ g^*$, $f^* \circ \partial$ равны 0, т.е. это комплекс. Сложнее проверить точность.

1. $\text{Ker } g^* = \text{Im } f^*$.

Пусть $[b] \in \text{Ker } g^*$, т.е. $[g(b)] = 0$, т.е. $g(b) = d(c_1)$ для некоторого $c_1 \in C^{k-1}$. Пусть $b_1 \in B^{k-1}$, $g(b_1) = c_1$. Тогда $g(d(b_1)) = d(g(b_1)) = d(c_1) = g(b)$, т.е. $g(b - d(b_1)) = 0$, $b - d(b_1) \in \text{Ker } g = \text{Im } f$, поэтому существует такое $a \in A^k$, что $b - d(b_1) = f(a)$. Поскольку $d(b) = 0$, $d(a) = d(b) - d^2(b_1) = 0$. Получаем $f^*([a]) = [b]$.

2. $\text{Ker } \partial = \text{Im } g^*$.

Пусть $[c] \in \text{Ker } \partial$, a и b — как в определении отображения ∂ . Раз $\partial([c]) = 0$, существует такое a_1 , что $d(a_1) = a$. Обозначим $b_1 = f(a_1)$. Тогда $g(b - b_1) = c - g(f(a_1)) = c$. Но $d(b - b_1) = f(a) - d(f(a_1)) = f(d(a_1)) - d(f(a_1)) = 0$. Ясно, что $g^*([b - b_1]) = [c]$.

3. $\text{Ker } f^* = \text{Im } \partial$.

Пусть $[a] \in \text{Ker } f^*$. Тогда $f(a) = d(b)$ для некоторого $b \in B^*$. Обозначим $c = g(b)$. Тогда $d(c) = d(g(b)) = g(d(b)) = g(f(a)) = 0$. Остается заметить, что $\partial([c]) = [a]$, т.е. $[a] \in \text{Im } \partial$. $\square$

Следствие 68 (Точная последовательность Майера–Виеториса) Пусть U_1, U_2 — открытое покрытие X , $U_1 \cap U_2 = Z$. Тогда последовательность

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^k(X) \xrightarrow{I^*} H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \xrightarrow{j^*} H^k(Z) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(X) \xrightarrow{I^*} H^{k+1}(U_1) \oplus H^{k+1}(U_2) \xrightarrow{j^*} \dots$$

точна.

Рассмотрим на сфере $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, атлас, состоящий из двух карт: U_+ и U_- , полученных выкидыванием южного (p_-) и северного (p_+) полюса соответственно. Обе карты стягиваемы (поэтому $H^0(U_r) = \mathbb{R}$; $H^k(U_r) = 0$ при $k > 0$), а $Z = U_1 \cap U_2$ гомотопически эквивалентно экватору, т.е. $\mathbb{S}^{n-1}$. Тогда последовательность Майера–Виеториса примет вид:

При $k = 0$:

$$\dots \xrightarrow{0} H^0(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{j^*} H^0(Z) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{I^*} 0 \xrightarrow{j^*} \dots$$

При $n \geq 2$, все нулевые когомологии здесь равны $\mathbb{R}$, поэтому (например, по размерностям) $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$.

При $k \geq 1$:

$$\dots \longrightarrow 0 \oplus 0 \xrightarrow{j^*} H^k(Z) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{I^*} 0 \xrightarrow{j^*} \dots$$

откуда получаем $H^k(\mathbb{S}^{n-1}) \cong H^{k+1}(\mathbb{S}^n)$, и индуктивно получаем

$$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{при } k = 0, n; \\ 0 & \text{при остальных } k. \end{cases}$$

Степень отображения

Пусть $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Оно индуцирует отображение $df : T_x(M) \rightarrow T_{f(x)}(N)$ касательных пространств. Точка $x \in M$ называется регулярной, если $(df)(x)$ — сюръективно. Для существования регулярных точек необходимо, чтобы $\dim M \geq \dim N$.

Точка $y \in N$ называется регулярным значением отображения f , если все точки прообраза $f^{-1}(y)$ регулярны (если прообразов нет, то регулярность проверять не для чего, поэтому в этом случае y тоже считается регулярным значением).

Следующее утверждение мы примем без доказательства.

Теорема 69 (Теорема Сарда) Множество нерегулярных значений гладкого отображения является множеством меры 0.

Одним из следствий теоремы Сарда является лемма о свободной точке.

Рассмотрим случай, когда $\dim M = \dim N$, и эти многообразия компактные, связные и ориентируемые. Считаем, что локальные координаты в этих многообразиях выбраны так, что якобианы при переходе от карты к карте положительны.

Лемма 70 Пусть $y \in N$ — регулярная точка. Тогда количество ее прообразов конечно.

Доказательство. Т.к. $f^{-1}(y)$ замкнутое подмножество в компактном многообразии M , оно компактно. По теореме об обратной функции (якобиан невырожден), f является биективным в некоторой окрестности каждой точки $x \in f^{-1}(y)$, поэтому множество $f^{-1}(y)$ дискретно. Дискретность и компактность значат конечность. $\square$

Для фиксированных ориентаций на M и N определим $\text{sgn}_x(f)$ как знак якобиана в точке $x \in M$, т.е. $+1$ или -1 .

Определим степень $\deg(f)$ отображения $f : M \rightarrow N$ гладких компактных связных ориентируемых многообразий равной размерности как сумму $\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}_x(f)$, где $y \in N$ — регулярное значение.

Теорема 71 (1) Степень отображения не зависит от выбора регулярного значения y ;
(2) Если $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ гладко гомотопны, то $\deg(f_0) = \deg(f_1)$.

Доказательство. Заметим, что (1) следует из (2). Если $y_1, y_2 \in N$, возьмем окрестность несамопересекающегося пути, соединяющего эти точки. Если окрестность достаточно мала, то она диффеоморфна диску, и тогда можно построить диффеоморфизм φ многообразия N , гомотопный тождественному и постоянный вне этой окрестности, при котором y_1 переходит в y_2 . Тогда $\deg(f)$ в точке y_1 , равна $\deg(\varphi \circ f)$ в точке y_2 , но гомотопическая инвариантность означает, что $\deg(f) = \deg(\varphi \circ f)$. Итак, достаточно доказать (2).

Пусть $F : M \times I \rightarrow N$ — гладкое отображение, совпадающее с f_r на $M \times \{r\}$, $r = 0, 1$, и пусть точка $y \in N$ регулярна для f_0 и f_1 (но, возможно, нерегулярна для F). Пусть U_r — окрестность точки y , для которой f_r биективно отображает некоторые окрестности точек из $f_r^{-1}(y)$ на U_r , и пусть R — множество регулярных значений для F , $A = U_0 \cap U_1 \cap R \subset N$. По теореме Сарда, A является дополнением к множеству меры 0, поэтому непусто. Пусть $z \in A$. Тогда степени отображения f_r , $r = 0, 1$, вычисленные в точках y и z , совпадают.

Благодаря регулярности, $F^{-1}(z)$ — гладкое многообразие с краем, причем край лежит в крае $M \times I$. Размерность этого многообразия равна 1, поэтому оно является объединением окружностей и отрезков. Окружности лежат целиком внутри $M \times I$ (кстати, почему они не могут иметь общих точек с границей? — ядро отображения $(F_r)_* : T_x(M) \rightarrow T_{F_r(x)}(N)$, равное пересечению ядра $F_* : T_x(M \otimes I) \rightarrow T_{F(x)}(N)$ с $T_x(M)$, должно иметь размерность 0), поэтому на значение $\deg(f_0)$ и $\deg(f_1)$ не влияют. Каждый отрезок имеет две граничные точки, a и b , лежащие на компонентах связности границы $M \times I$. Теорема будет доказана, если мы докажем следующее утверждение: если концы отрезка лежат в разных компонентах связности, например, $a \in M \times \{0\}$, а $b \in M \times \{1\}$, то $\text{sgn}_a(f_0) = \text{sgn}_b(f_1)$, а если оба конца отрезка лежат в одной компоненте связности, например, в $M \times \{0\}$, то $\text{sgn}_a(f_0) = -\text{sgn}_b(f_0)$. В первом случае каждой точке из $f_0^{-1}(z)$ соответствует точка из $f_1^{-1}(z)$ с тем же знаком якобиана, во втором случае вклад в сумму от точек a и b взаимно уничтожается.

Возьмем в $X \times I$ две локальные системы координат. Если U_α — карта в M с локальными координатами $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$, то $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, t)$ будут локальными координатами в $U_\alpha \times I$. Возьмем достаточно малую окрестность W отрезка с концами a и b , и окрестность V точки z с локальными координатами $(y^1, \dots, y^n)$ так, чтобы $W \cap F^{-1}(V)$ было бы диффеоморфно $V \times I$. Тогда, обозначив параметр вдоль отрезка с концами a и b через s , получим, что $(y^1, \dots, y^n, s)$ — локальные координаты в $W \cap F^{-1}(V)$.

Рассмотрим случай, когда $a, b \in M \times \{0\}$, $a \in U_\alpha$, $b \in U_\beta$. Тогда $\frac{\partial t}{\partial s}|_a$ и $\frac{\partial t}{\partial s}|_b$ имеют разные знаки. Это значит, что вектор $\frac{\partial}{\partial s}$ в точках a и b лежит в разных полупространствах относительно гиперплоскости $T(M \otimes \{0\}) \subset T(M \otimes I)$ (направления внутрь и наружу определены глобально на всем $M \times I$).

Благодаря ориентированности $M \times I$, знаки якобианов $\frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, t)}{\partial(y^1, \dots, y^n, s)}|_a$ и $\frac{\partial(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n, t)}{\partial(y^1, \dots, y^n, s)}|_b$ совпадают. В касательном пространстве $T_a(M \otimes I)$ подпространство $T_a(M \otimes \{0\})$ есть линейная оболочка как векторов $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$, так и векторов $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}$, поэтому в разложении по базису $\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial y^j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y^j}$ коэффициент при $\frac{\partial}{\partial t}$ равен 0, т.е. $\frac{\partial t}{\partial y^j}|_a = 0$.

Таким образом, в точках a и b имеем $\frac{\partial t}{\partial y^j} = 0$, поэтому якобиан можно разложить по последнему столбцу (в котором почти все нули), например, в точке a

$$\frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, t)}{\partial(y^1, \dots, y^n, s)}|_a = \frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \cdot \frac{\partial t}{\partial s}|_a.$$

Поэтому знаки $\frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)}|_a$ и $\frac{\partial(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)}|_b$ различны. Аналогично, если точки a и b лежат в разных компонентах границы, то знаки $\frac{\partial t}{\partial s}|_a$ и $\frac{\partial t}{\partial s}|_b$ совпадают, поэтому совпадают знаки у $\frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)}|_a$ и $\frac{\partial(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)}|_b$. □

Свойства степени.

1. $\deg(\text{id}_M) = 1$ для любого многообразия M (связного компактного ориентируемого).
2. Если $\deg(f) \neq 0$, то $f : M \rightarrow N$ сюръективно. От противного: если не сюръективно, то степень можно вычислять в точке, не лежащей в образе f , а там она 0.
3. Если $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$, то $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$.

Если рассматривать сферу $\mathbb{S}^2$ как компактификацию комплексной плоскости, то можно определить отображение $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ формулой $f(z) = z^n$ если $z \in \mathbb{C}$, т.е. $z \neq \infty$, и $f(\infty) = \infty$. Тогда $\deg(f) = n$.

1 Локально тривиальные расслоения

Четверка (E, B, F, p) , где E, B, F — пространства, а $p : E \rightarrow B$, называется *локально тривиальным расслоением*, если у любой точки пространства B есть такая окрестность U , что $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times F$.

Пространства $E/B/F$ называются тотальным пространством/базой/слоем расслоения. Если часть пространств/отображений в расслоении ясна из контекста, мы их можем опускать. Так, если база и слой зафиксированы, то расслоением мы можем называть само тотальное пространство.

Примеры: Накрытия; произведение $E = B \times F$; $(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathbb{C}P^n, \mathbb{S}^1, p)$, где $p(z) = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$, $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$; лист Мёбиуса.

Два расслоения, (E_1, B, F, p_1) и (E_2, B, F, p_2) *изоморфны*, если существует такой гомеоморфизм $f : E_1 \rightarrow E_2$, что $p_2 \circ f = p_1$. Расслоение *тривиально*, если оно изоморфно произведению.

Если $A \subset B$, то $(p^{-1}(A), A, F, p|_A)$ — ограничение расслоения на A . Оно очевидно локально тривиально.

Конструкция расслоений.

Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие пространства B , $\text{Homeo}(F)$ — группа гомеоморфизмов пространства F , и пусть заданы отображения $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Homeo}(F)$, удовлетворяющие свойствам:

- $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$;
- $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$.

Такой набор отображений называется *функциями склейки*.

Пусть $h : \sqcup_i U_i \rightarrow B$ — отображение, индуцированное вложениями. В пространстве $\sqcup_i U_i \times F$ определим отношение эквивалентности $(x, f) \sim (x', f')$ (здесь $x \in U_i$, $x' \in U_j$, $f, f' \in F$), если $h(x) = h(x')$ и $f' = \varphi_{ij}(f)$.

Обратно, если дано покрытие B окрестностями U_i , над каждой из которых расслоение тривиально (с тривиализацией $\varphi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times F$), то отображения $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Homeo}(F)$, заданные формулой $[g_{ij}(x)](f) = p r_F \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, f)$, удовлетворяют указанным свойствам.

Пусть (E, B, F, p) — расслоение, $f : X \rightarrow B$. Обратным образом (или пулбэком) расслоения называется расслоение (Y, X, F, π) , где $Y = \{(x, e) : x \in X, e \in E, f(x) = p(e)\} \subset X \times E$, $\pi(x, e) = x$. Конечно, надо проверить локальную тривиальность. Пусть $U \subset B$ и $\varphi : E|_U \rightarrow U \times F$ — гомеоморфизм. Пусть $V = f^{-1}(U) \subset X$, $W = \pi^{-1}(V) \subset Y$, тогда $\psi : W \rightarrow V \times F$, заданный формулой $\psi(x, e) = (x, p_F(\varphi(e)))$, где $p_F : U \times F \rightarrow F$ — проекция на второй сомножитель, является гомеоморфизмом (с обратным отображением $(x, f) \mapsto (x, \varphi^{-1}(x, f))$).

Мы будем обозначать пространство расслоения-пулбэка через $Y = f^*(E)$.

Примеры: ограничение расслоения есть пулбэк для отображения вложения; если B — точка, то пулбэк — произведение $Y = X \times F$.

Теорема 72 Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, (E, B, F, p) — расслоение, $h : X \times I \rightarrow B$ — гомотопия, соединяющая отображения $h_0, h_1 : X \rightarrow B$. Тогда расслоения $h_0^*(E)$ и $h_1^*(E)$ изоморфны.

Доказательство. Начнем с утверждения, что расслоение $(E, Z \times I, F, p)$ тривиально тогда и только тогда, когда его ограничения $E|_{Z \times [0, c]}$ и $E|_{Z \times [c, 1]}$ тривиальны для некоторого $0 < c < 1$. Из тривиальности большего расслоения следует тривиальность меньших, остается доказать обратное. Пусть $\varphi_0 : E|_{Z \times [0, c]} \rightarrow Z \times [0, c] \times F$ и $\varphi_1 : E|_{Z \times [c, 1]} \rightarrow Z \times [c, 1] \times F$ — тривиализирующие гомеоморфизмы. Их ограничения на $Z \times \{c\}$ задают отображение $g_{01} : Z \times \{c\} \rightarrow \text{Homeo}(F)$: $\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(z, c, f) = (z, c, g_{01}(f))$. Тогда отображение $(z, t) \mapsto \bar{g}_{01}(z, c)(\varphi_1(z, t))$, где $z \in Z$, $t \in I$, $\bar{g}(z, t, f) = (z, t, g(f))$, $f \in F$, задает другую тривиализацию $E|_{Z \times [c, 1]}$, которая совпадает с φ_0 на $Z \times \{c\}$.

Пусть Y — расслоение над $X \times I$. Благодаря компактности, для любой точки $x \in X$ можно найти конечное разбиение отрезка точками t_i и окрестности U_i так, что ограничения расслоения на $U_i \times [t_i, t_{i+1}]$ тривиальны. Положим $U = \cap_i U_i$. Тогда, по доказанному, $Y|_{X \times I}$ также тривиально.

Выберем конечное подпокрытие U_k окрестностями такого вида. Пусть ρ_k — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, т.е. функции $\rho_k : X \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющие условиям $\text{supp } \rho_k \subset U_k$ и $\sum_k \rho_k = 1$.

Положим $\lambda_n = \sum_{k=1}^n \rho_k$ ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_N = 1$ — постоянные функции). Пусть $X_n \subset X \times I$ — график функции λ_n . Заметим, что X_n и X_{n+1} отличаются лишь на U_{n+1} , на котором расслоение тривиально. Проекция $q_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ индуцирует изоморфизм расслоений $Y|_{X_{n+1}}$ и $Y|_{X_n}$ (там, где X_n и X_{n+1} совпадают, это тождественное отображение, а на U_{n+1} оба расслоения тривиальны). Но при $n = 0$ мы получаем $h_0^*(E)$, а при $n = N$ — $h_1^*(E)$. □

Следствие 73 Если B стягиваемо, то любое расслоение над ним тривиально.

Следствие 74 Пусть U_i — покрытие B , $g_{ij;0}, g_{ij;1} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Homeo}(F)$ — гомотопные функции склейки, E_0 и E_1 — соответствующие расслоения. Тогда они изоморфны.

Векторные расслоения

Пусть $\{U_i\}$ — покрытие пространства X . В качестве слоя возьмем векторное пространство $\mathbb{R}^n$. Группа $\text{Homeo}(\mathbb{R}^n)$ большая, уменьшим ее до $G = GL_n(\mathbb{R})$, а еще лучше до $G = O(n)$. Расслоение с функциями склейки $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ (т.е. принимающие значения в группе G) называется (вещественным) векторным расслоением. Аналогично можно определить комплексные векторные расслоения.

Можно дать определение, более похожее на определение локально тривиальных расслоений. Векторное расслоение — это локально тривиальное расслоение $(E, B, \mathbb{R}^n, p)$, в котором каждый слой $p^{-1}(x)$, $x \in X$, снабжен структурой линейного пространства, и тривиализирующие гомеоморфизмы $f_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ являются линейными отображениями слоя над произвольной точкой в $\mathbb{R}^n$.

Пример. Пусть $X \times \mathbb{R}^n$ — тривиальное векторное расслоение. Пусть $P : X \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ — непрерывное отображение в множество операторов на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее равенству $(P(x))^2 = P(x)$, $x \in X$ (т.е. отображение со значениями в проекторах). Из непрерывности следует, что ранг

$k = P(x)$ не зависит от x . Подпространство $\{(x, \xi) : x \in X, \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \in \text{Im} P(x)\}$ является векторным расслоением над X со слоем $\mathbb{R}^k$.

Пример. Многообразие Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$ — это многообразие, точками которого являются все k -мерные подпространства в $\mathbb{R}^n$. Топологию на $G_k(\mathbb{R}^n)$ проще задать метрикой: пусть L_1, L_2 — два подпространства размерности k , P_1, P_2 — ортогональные проекторы на эти подпространства; положим $\rho(L_1, L_2) = \|p_1 - p_2\|$, где $\|a\| = \max_{|\xi| \leq 1} |a\xi|$ — так называемая операторная норма (легко проверить, что $\|a\|^2$ равна $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, где λ_i — собственные значения оператора a^*a). Подпространство $\{(x, \xi) : x \in G_k(\mathbb{R}^n), \xi \in x\}$ является векторным расслоением, оно называется каноническим.

Пример. Касательное расслоение многообразия. Функции склейки — якобианы. Аналогично, если многообразие вложено в евклидово пространство, то можно определить нормальное расслоение.

Два векторных расслоения *изоморфны* если существует такой гомеоморфизм $f : E_1 \rightarrow E_2$, что $p_2 \circ f = p_1$ (это как для общих локально тривиальных расслоений) и ограничение f на $(E_1)|_x$ есть линейное отображение для всех $x \in X$.

Пример. Изоморфность двух тривиальных расслоений $E_1 = X \times \mathbb{R}^n$ и $E_2 = X \times \mathbb{R}^n$ означает существование отображения $\alpha : X \rightarrow GL_n(\mathbb{R}^n)$ (тогда $f(x, \xi) = (x, \alpha(x)\xi)$, $x \in X, \xi \in \mathbb{R}^n$).

Пример. Пусть $Y = A \cup B$, $X = A \cap B$, расслоения над A и B тривиальны. Пусть $g : X \rightarrow GL_n(\mathbb{R}^n)$. Склеим (определим) расслоение E_g над Y , отождествляя $(x, \xi) \in A \times \mathbb{R}^n$ с $(x, g(x)\xi) \in B \times \mathbb{R}^n$. Если $g_1, g_2 : X \rightarrow GL_n(\mathbb{R}^n)$, $E_i = E_{g_i}$ — соответствующие расслоения, то изоморфность E_1 и E_2 означает, что существуют отображения $\alpha : A \rightarrow GL_n(\mathbb{R}^n)$, $\beta : B \rightarrow GL_n(\mathbb{R}^n)$, для которых на A $f(x, \xi) = (x, \alpha(x)\xi)$, а на B — $f(x, \xi) = (x, \beta(x)\xi)$, и, если $x \in X$, то $\alpha(x) = g_2^{-1}(x)\beta(x)g_1(x)$ — это видно из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (x, \xi) & \xrightarrow{g_1} & (x, g_1(x)\xi) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ (x, \xi) & \xrightarrow{g_2} & (x, g_2(x)\xi), \end{array}$$

т.е. на X имеет место равенство $g_2\alpha = \beta g_1$.

Расслоения над надстройкой.

Пусть SX — надстройка над X , т.е. фактор $X \times I$ по отождествлению, склеивающему все точки $(x, 0)$ в одну, и все точки $(x, 1)$ — в одну. Например, сфера $\mathbb{S}^n$ есть надстройка над $\mathbb{S}^{n-1}$.

Лемма 75 *Множество n -мерных векторных расслоений над SX с точностью до изоморфизма находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством гомотопических классов отображений из X в $G = GL_n(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Надстройку можно покрыть двумя подмножествами — S_+ и S_- , каждое из которых есть конус над X , т.е. стягиваемо. Поэтому ограничение векторного расслоения на каждое из этих подмножеств — тривиально. Две тривиализации позволяют построить функцию склейки $g : X \rightarrow G$ ($S_+ \cap S_-$ — это окрестность X , гомеоморфная $X \times (1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon)$). Обратно, любая функция склейки $g : X \rightarrow G$ позволяет склеить расслоение из двух тривиальных. Если две функции склейки гомотопны, то расслоения изоморфны. Обратно, пусть функции склейки g_1, g_2 определяют изоморфные векторные расслоения. Изоморфизм между ними задает отображения $\alpha_{\pm} : S_{\pm} \rightarrow G$ так, что $g_1 \cdot \alpha_+|_X = \alpha_-|_X \cdot g_2$. Поскольку отображение $\alpha_{\pm}|_X$ продолжается до отображения конуса $S_{\pm}$, существует гомотопия, соединяющая это отображение с отображением в точку (например, в единицу группы). Поэтому $g_1 \cdot \alpha_+|_X$ гомотопно g_1 . Аналогично, $\alpha_-|_X \cdot g_2$ гомотопно g_2 . Поэтому g_1 и g_2 гомотопны. □

Пусть $(E_1, X, \mathbb{R}^n, p_1)$ и $(E_2, X, \mathbb{R}^n, p_2)$ — два векторных расслоения, $i : E_1 \subset E_2$ — послойно линейное отображение, $p_2 \circ i = p_1$, и ограничение i на $p_1^{-1}(x)$ есть мономорфизм линейных пространств. Тогда первое расслоение называется подрасслоением второго.

Теорема 76 *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $(E, X, \mathbb{R}^n, p)$ — векторное расслоение. Тогда это расслоение есть подрасслоение тривиального расслоения.*

Доказательство. По предположению, можно выбрать конечное покрытие U_i , $i = 1, \dots, k$, так, чтобы ограничения расслоения на каждое U_i были тривиальны. Зафиксируем тривиализации $h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$. Пусть $\pi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — проекции на второй сомножитель. Пусть также φ_i — разбиение единицы, подчиненное данному покрытию. Определим $g_i : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $g_i(v) = \varphi_i(p(v))\pi_i h_i(v)$; $g : E \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$ формулой $g(v) = (g_1(v), \dots, g_k(v))$; и $f : E \rightarrow X \times \mathbb{R}^{nk}$ формулой $f(v) = (p(v), g(v))$. Линейность g очевидна, а мономорфность следует из того, что равенство $g(v) = 0$ означает $g_i(v) = 0$ для всех i . Пусть $\xi \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$, $x \in U_i$, $v = h_i^{-1}(x, \xi)$. Тогда $g_i(v) = \varphi_i(x)\xi$. беря сумму по всем окрестностям, содержащим точку x , получаем, что $\sum_i g_i(v) = \xi \neq 0$, что противоречит предположению, что все $g_i(v)$ равны 0. □