Коллоквиум по линейной алгебре и геометрии.

Каждый вариант состоит из одного теоретического вопроса и трех теоретических задач. Ответы должны сопровождаться полным обоснованием.

Вариант 1.

1. Линейное подпространство. Линейная оболочка множества векторов.
2. Существует ли преобразование координат, которое переводит билинейную функцию $g(x,y) = x^1y^2 - x^2y^1$ в функцию $h(x,y) = x^1y^2 + x^2y^1$?
3. Для любых ли векторов a, b, c евклидова пространства выполнено $(a,b)+(b,c) \geq (a,c)$?
4. На пространстве многочленов степени не выше 2 задан базис функционалов $\varepsilon^1 = p(0)$, $\varepsilon^2 = p(2)$, $\varepsilon^3 = p(3)$. К какому базису из многочленов $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ он двойственен?

Вариант 2.

1. Размерность линейного пространства.
2. Существует ли преобразование координат, которое переводит билинейную функцию $g(x,y) = x^1y^1 - x^2y^2$ в функцию $h(x,y) = x^1y^2 + x^2y^1$?
3. Найдутся ли такие ненулевые многочлены $p, q, r \in \mathbb{R}_2[x]$, что $\int\limits_1^3 p(x)r(x)dx = \int\limits_1^3 q(x)r(x)dx = \int\limits_1^3 p(x)q(x)dx = 0$?
4. Пусть f — такой функционал на пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ (степени не выше 2), что $f(p) = p(0) + 2p'(1)$ для всех $p \in \mathbb{R}_2[x]$. Найдите координаты f в базисе, двойственном к базису $1+x$, $x+x^2$, $1+x+x^2$.

Вариант 3.

1. Связь размерности подпространства и размерности пространства.
2. Является ли функция $f(p) = \int\limits_0^1 p^2(x)dx - \left(\int\limits_0^1 p(x)dx\right)^2$ квадратичной функцией в пространстве $\mathbb{R}_2[x]$?
3. Пусть $V = Mat(2,\mathbb{R})$, L — подпространство кососимметрических матриц. Найти ортогональное дополнение к L и базис в этом дополнении, если скалярное произведение в V определено как $(A,B) = tr(A^TB)$.
4. Пусть $V = \mathbb{R}_2[t]$. Найдите матрицу перехода от базиса, двойственного к базису $e_0 = 1, e_1 = t, e_2 = t^2$ к базису, двойственному базису $e_0 = 1, e_1 = 1+t, e_2 = 1+2t+t^2$.

Вариант 4.

1. Фактор-пространство.
2. Определить индексы инерции квадратичной формы с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Образуют ли все решения матричного уравнения $AXB = C$ (где A, B, C — квадратные матрицы одного размера) аффинное пространство?

4. Линейное отображение $\mathcal{A} : V \to W$ в базисах e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2 имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти координаты вектора $\mathcal{A}(e_3 - e_2)$ в базисе f_1, f_2.

Вариант 5.

1. Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств.

2. Является ли функция $f(p,q) = \int\limits_0^{2\pi} p(x)q'(x)dx$ билинейной кососимметричной в линейной оболочке $<1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x>$?

3. Можно ли выразить расстояние от вектора e_n до линейной оболочки векторов $e_1, \ldots, e_{n-1}$ через скалярные произведения всех этих векторов?

4. Пусть f — такой функционал на пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ (степени не выше 2), что $f(p) = p(0) + 2p(1)$ для всех $p \in \mathbb{R}_2[x]$. Найдите координаты f в базисе, двойственном к базису $\frac{1}{2}x(x-1)$, $-(x-1)(x+1)$, $\frac{1}{2}x(x+1)$.

Вариант 6.

1. Изоморфизм линейных пространств.

2. Найти левое и правое ядро билинейной функции $f(p,q) = \int\limits_0^1 p(x)q'(x)dx$ на пространстве линейных многочленов $\mathbb{R}_1[x]$.

3. Докажите, что длина проекции на вектор v равна расстоянию до подпространства векторов, ортогональных вектору v.

4. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ — линейное отображение пространства всех многочленов в себя, переводящее каждый многочлен $p(x)$ в его вторую производную, $\mathcal{A}(p) = p''$. Найти ядро и образ $\mathcal{A}$.

Вариант 7.

1. Матрица линейного отображения. Ее зависимость от базисов.

2. Пусть $V = \mathbb{R}_n[x]$ Дана функция $q_1(P) = \int_0^1 (P'(x))^2\,dx$. Доказать, что эта функция является квадратичной, и записать соответствующую ей симметричную билинейную функцию.

3. Приведите пример такого набора векторов в $\mathbb{R}^5$, что для его линейной оболочки W выполнено $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$, где V задано системой
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Пусть V — бесконечномерное пространство, а ϕ — некоторый нетривиальный линейный функционал на нем. Какова размерность пространства $V/\operatorname{Ker}\phi$?

Вариант 8.

1. Теорема о размерностях ядра и образа линейного отображения.

2. Пусть $V = \mathbb{R}_2[x]$ Дана функция $q_1(P) = \int_0^1 P(x)P'(x)\,dx$. Записать матрицу этой квадратичной функции в стандартном базисе многочленов.

3. Являются ли следующие множества X матриц A размера $n \times n$ линейными пространствами? а) $X = \{A \mid trA = 0\}$; б) X — множество матриц ранга $\leqslant 3$; в) $X = \{A \mid A^T + A = 0\}$?

4. Пусть $V = Mat(2, \mathbb{R})$, L — подпространство симметрических матриц. Найти ортогональное дополнение к L и базис в этом дополнении, если скалярное произведение в V определено как $(A, B) = tr(A^T B)$.

Вариант 9.

1. Неравенство Коши-Буняковского для случая комплексных чисел.

2. Пусть f и g — неотрицательно определённые квадратичные функции. Всегда ли $h(v) = \sqrt{f(v)g(v)}$ будет квадратичной функцией?

3. Пусть в пространстве V заданы 3 подпространства L_1, L_2, L_3 такие, что для $i \neq j$ $L_i \cap L_j = \{0\}$, причем $V = L_1 + L_2 + L_3$. Верно ли, что для любого $v \in V$ разложение в сумму $v = v_1 + v_2 + v_3$, $v_i \in L_i$, единственно?

4. Пусть $V = Mat_2(\mathbb{R})$ — пространство матриц размера 2×2. Рассмотрим отображение $\mathcal{M} \colon V \to V$, $\mathcal{M}(A) = A + 2A^T + 2tr(A) \cdot E$, где $A \in V$, E — единичная матрица. Докажите, что $\mathcal{M}$ — линейное отображение, запишите матрицу этого отображение, взяв в качестве базисов в области определения и области значений отображения $\mathcal{M}$ стандартный базис в $Mat_2(\mathbb{R})$(состоящий из матричных единиц).

Вариант 10.

1. Ортогонализация Грама-Шмидта.

2. Может ли левое ядро некоторой билинейной функции быть нулевым, а правое — ненулевым?

3. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2 пространства $V = Mat_3(\mathbb{R})$ матриц размера 3×3 с вещественными коэффициентами, $L_1 = \{A \mid A + A^T = 0\}$, $L_2 = \{A \mid A + 2A^T = 0\}$.

4. Являются ли следующие линейные функции на $\mathbb{R}_3[x]$ линейно зависимыми: $l_1(P) = P'(1)$, $l_2(P) = 2P(2)$, $l_3(P) = P(0)$?

Вариант 11.

1. Ортогональное дополнение.

2. Верно ли, что симметричная билинейная функция отрицательно определена, если знаки нижних правых угловых миноров ее матрицы чередуются, начиная с минуса?

3. Подпространство $U \subset \mathbb{R}^n$ задано системой из k однородных линейных уравнений. Выберите правильные утверждения:
   1. $\dim U = n - k$;
   2. $\dim U = k$;
   3. $\dim U < k$;
   4. $\dim U < n - k$;
   5. Все не верны.

4. Пусть $V = \mathbb{R}_2[t]$. Представьте первый вектор базиса, двойственного к базису $e_0 = 1, e_1 = t, e_2 = t^2$, в виде линейной комбинации функций $l_0(P) = P(0)$, $l_1(P) = P'(0)$, $l_2(P) = P''(0)$.

Вариант 12.

1. Проекция и ортогональная составляющая. Расстояние от вектора до подпространства.

2. Верно ли, что симметричная билинейная функция отрицательно определена, если знаки нижних правых угловых миноров ее матрицы чередуются?

3. Изоморфны ли следующие вещественные линейные пространства: пространство реккурентных последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ с условием $a_{n+4} = a_{n+2} + a_n$ и пространство четных многочленов степени не выше 7?

4. Пусть $V = \mathbb{R}_2[t]$. Найдите базис в V, для которого функции $l_1(P) = P(0), l_2(P) = P'(1), l_3(P) = P''(2)$ являются двойственным базисом.

Вариант 13.

1. Псевдорешение системы линейных уравнений.

2. Пусть $V = \mathbb{R}_n[x]$ Дана функция $q_1(P) = \int_0^1 P(x)P'(x)\,dx$. Доказать, что эта функция является квадратичной, и записать соответствующую ей симметричную билинейную функцию.

3. Пусть A матрица $n \times m$ и подпространства U и V заданы системой уравнений $Ax = 0$ и $A^T y = 0$ в пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Выберите правильное отверждение:
   1. $\dim U = \dim V$;
   2. $\dim U + \dim V = n + m - \operatorname{rank} A$;
   3. $\dim U - \dim V = n - m$;
   4. Все не верны.

4. Пусть $v \in \mathbb{R}^3$. Отображение $\mathcal{A}_v$ из $\mathbb{R}^3$ в $Mat_3(\mathbb{R})$ задано формулой $\mathcal{A}_v(x) = v^T x$, $x\mathbb{R}^3$ (произведение строки на столбец координат). Найдите размерность ядра и образа отображения $\mathcal{A}_v$. Зависит ли эта размерность от выбора вектора v?

Вариант 14.

1. Матрица Грама. Ее зависимость от базиса.

2. Найдите ядро билинейной формы $G_C(A, B) = tr(ACB^T)$, заданной на пространстве $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Изоморфны ли следующие вещественные линейные пространства: пространство верхнетреугольных матриц размера 3 и пространство нечетных многочленов степени не выше 12?

4. Даны векторы $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0)$; $b_1 = (0, 1, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1)$. Найти пересечение подпространств $<a_1, a_2>$ и $<b_1, b_2>$ и дать геометрическую интерпретацию.

Вариант 15.

1. Объем n-мерного параллелепипеда. Связь с матрицей Грама.

2. Пусть $V = \mathbb{R}_2[x]$ Дана функция $q_1(P) = \int_0^1 (P'(x))^2\,dx$. Записать матрицу этой квадратичной функции в стандартном базисе многочленов.

3. Пусть l — линейная функция на линейном пространстве. Является ли множество $\{x : l(x) = 1\}$ аффинным подпространством?

4. Какие отображения задают изоморфизм векторного пространства $\mathbb{R}^2$ в себя?
   1. Поворот вокруг начала координат
   2. Гомотетия с центром в начале координат
   3. Параллельный перенос
   4. Ортогональная проекция на прямую
   5. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$
   6. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 4x+2y \end{pmatrix}$

Вариант 16.

1. Билинейные функции. Матрица билинейной функции, ее зависимость от базиса.

2. Задает ли формула $(A, B) = \mathrm{tr} AB$ евклидово скалярное произведение на пространстве квадратных матриц?

3. Пусть V — конечномерное пространство, а ϕ — некоторый нетривиальный линейный функционал на нем. Верно ли, что всегда существует базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V такой, что ϕ является функционалом взятия первой координаты в нем: $\phi(v) = x^1$, где $v = x^i e_i$?

4. Приведите примеры квадратичных функций q на линейном пространстве, для которых множество $\{x : q(x) = 0\}$ является (не является) аффинным подпространством.

Вариант 17.

1. Правое и левое ядро билинейной функции.

2. Пусть $V = \mathbb{R}_2[t]$. Найти какой-нибудь базис в ядре линейной функции $l(P) = \int_0^1 P(t)dt$

3. Может ли матрица $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ быть матрицей Грама?

4. Пусть $V = Mat(2, \mathbb{R})$, $q(A) = tr(A^T C A)$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что эта функция является квадратичной, и записать соответствующую ей симметричную билинейную функцию.

Вариант 18.

1. Симметричные и кососимметричные билинейные функции. Квадратичные функции.

2. Является ли матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ матрицей перехода от одного базиса к другому?

3. Задает ли формула $(A, B) = \mathrm{tr} AB^T$ евклидово скалярное произведение на пространстве квадратных матриц?

4. Пусть $V = \mathbb{R}^2$. Найдите матрицу тождественного отображения $Id \colon V \to V$(каждый вектор переходит сам в себя), взяв в качестве базиса в области определения Id базис $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, а в качестве базиса в области значений Id базис $e'_1 = (2, 1)$, $e'_2 = (1, 2)$.

Вариант 19.

1. Ограничение билинейной функции на подпространство. Невырожденность билинейной функции.

2. Рассмотрим пространство многочленов степени не выше 2. Задает ли евклидово скалярное произведение формула (а) $(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$? (б) $(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$?

3. Будет ли объединение базиса подпространства L_1 и базиса подпространства L_2 базисом $L_1 \oplus L_2$?

4. Изоморфны ли следующие вещественные линейные пространства: пространство реккурентных последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ с условием $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ и пространство матриц с нулевым следом размера 2?

Вариант 20.

1. Ортогональное дополнение относительно (косо)симметричной билинейной функции. Его размерность.

2. Пусть $e_1, \dots, e_n$, базис пространства V и U его подпространство размерности $k, 0 < k < n$. Выберите правильное(ые) утверждение(я):
   1. Найдутся k векторов из e, лежащих в U;
   2. Ни один из векторов e не лежит в U;
   3. Найдутся меньше k но больше нуля векторов из e, принадлежащих U.
   4. Все утверждения не верны.

3. Любой ли многочлен со старшим коэффициентом $(-1)^n$ (при t^n) может быть характеристическим для некоторой матрицы порядка n (над полем комплексных чисел)?

4. Пусть q — квадратичная функция на линейном пространстве. Является ли множество $\{x : q(x) = 1\}$ аффинным подпространством?

Вариант 21.

1. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения относительно (косо)симметричной билинейной функции. Второе ортогональное дополнение относительно такой функции.

2. Пусть $U \subset V$ — линейное подпространство. Верно ли, что существует подпространство W такое, что $U \oplus W = V$? Если да, то однозначно ли определено W?

3. Образуют ли матрицы со следом равным 1, аффинное подпространство?

4. Известно, что 1 — корень характеристического многочлена пары квадратичных форм f и g. Докажите, что найдётся такой вектор v, что для любого вектора u выполнено $f(u,v) = g(u,v)$.

Вариант 22.

1. Симметричные билинейные функции на одномерном пространстве. Кососимметричные функции на двумерном пространстве.

2. Билинейная функция в некотором базисе имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Существует ли базис, в котором эта билинейная функция имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?

3. Образуют ли все решения матричного уравнения $AX = B$ (где A, B — квадратные матрицы одного размера) аффинное пространство?

4. Пусть x, y — координаты в $\mathbb{R}^2$ и V_1 — ось x. Для каких V_2 справедливо равенство $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2$?
   1. V_2 — {начало координат}
   2. V_2 — прямая $x = y$
   3. V_2 — верхняя полуплоскость $y > 0$
   4. V_2 — ось x
   5. V_2 — ось y.

Вариант 23.

1. Нормальный вид симметричных билинейных функций (над полями действительных и комплексных чисел).

2. Верно ли, что объединение базиса подпространства L_1 и базиса подпространства L_2 будет базисом $L_1 + L_2$?

3. Образуют ли все решения матричного уравнения $XA = B$ (где A, B — квадратные матрицы одного размера) аффинное пространство?

4. Существет ли трехмерное подпространство, ограничение на которое кососимметрической билинейной функции $b(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q'(x)\,dx - \int_0^1 Q(x)P'(x)\,dx$ на пространстве многочленов $\mathbb{R}_6[x]$ будет невырождено?

Вариант 24.

1. Нормальный вид кососимметричных билинейных функций.

2. Пусть $L \subset V$ — линейное подпространство в линейном пространстве V, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. Можно ли выбрать из этого базиса часть векторов, чтобы они образовали базис L?

3. Является ли множество многочленов, удовлетворяющих условию $\int_0^1 p(x)\,dx = 1$, аффинным пространством?

4. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ две линейные функции на вещественном конечномерном линейном пространстве V. Найти матрицу симметрической квадратичной функции $f(x)g(y) + f(y)g(x)$, если $f(x) = f_i x^i, g(x) = g_i x^i$.

Вариант 25.

1. Единственность нормального вида симметричных билинейных функций над полем комплексных чисел, для кососимметричных функций.

2. Изоморфны ли следующие вещественные линейные пространства: пространство симметричных матриц 3 на 3 и пространство четных многочленов степени не более 11?

3. Образуют ли все решения матричного уравнения $X + X^T = E$ (где E — единичная матрица) аффинное пространство?

4. Верно ли, что если левое ядро билинейной функции совпадает с правым, то она либо симметричная, либо кососимметричная?

Вариант 26.

1. Теорема инерции.

2. Пусть l_1, l_2 — линейные функции. Верно ли, что $q(x) = l_1(x)l_2(x)$ — квадратичная функция? Какая симметричная билинейная функция ей соответствует?

3. Найдутся ли такие ненулевые многочлены $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$, что $\int\limits_1^3 p(x)dx = \int\limits_1^3 q(x)dx = \int\limits_1^3 p(x)q(x)dx = 0$?

4. Пусть $V = \mathbb{R}_2[t]$. Найдите матрицу перехода от базиса, двойственного к базису $e_0 = 1, e_1 = t, e_2 = t^2$ к базису, двойственному базису $e_0 = 1, e_1 = 1 - t, e_2 = 1 - 2t + t^2$.

Вариант 27.

1. Теорема Якоби об угловых минорах. Критерий Сильвестра.

2. Для любой $n \times n$ матрицы A зададим функцию $f(x) = (Ax, x)$, где $(,)$ стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$. Показать, что f квадратична и найти матрицу соответствующей симметрической билинейной формы F.

3. Являются ли отображения $A \to \operatorname{tr} A$, $A \to \det A$ линейными функционалами?

4. Какую размерность может иметь пересечение двух трёхмерных подпространств пятимерного пространства?

Вариант 28.

1. Приведение симметричной билинейной функции к каноническому виду в евклидовом пространстве.

2. Верно ли, что на пространстве над полем характеристики 0 пространство всех билинейных функций представляется в виде суммы (прямой суммы) пространства симметричных билинейных функций и пространства кососимметричных билинейных функций?

3. Докажите, что если $<e_1, e_2, e_3> \cap <f_1, f_2, f_3> \neq 0$, то вектора $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ линейно зависимы. Верно ли обратное?

4. Приведите пример билинейной функции, для которой правое ядро не совпадает с левым.

Вариант 29.

1. Обобщенный характеристический многочлен, инвариантность его корней. Пример пары квадратичных функций, которые нельзя одновременно привести к диагональному виду.

2. Может ли матрица $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ быть матрицей Грама?

3. Приведите пример вырожденной кососимметричной билинейной формы, ограничение, которой на какое-нибудь подпространство было бы невырождено.

4. Являются ли следующие множества X матриц A размера $n \times n$ линейными пространствами? а) X — множество необратимых матриц; б) X — множество матриц ранга 1; в) $X = \{A \mid tr(A^T \cdot A) = 0\}$?

Вариант 30.

1. Теорема о приведении к диагональному виду пары квадратичных функций, одна из которых положительно определена.

2. Пусть $V = Mat(2, \mathbb{R})$, $q(A) = tr(A^T C A)$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Записать матрицу этой квадратичной функции в стандартном базисе матричных единиц.

3. Пусть $V = Mat_3(\mathbb{R})$ — пространство матриц размера 3×3 с вещественными коэффициентами. Найти размерность в подпространстве $L = \{A \mid A - A^T + tr(A)E = 0\}$.

4. Образуют ли линейное пространство функции на $\mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению: $f' - f = 0$? Операции стандартные.

Вариант 31.

1. Эрмитовы и косоэрмитовы полуторалинейные функции.

2. Являются ли следующие вещественные линейные пространства изоморфными: пространство кососимметричных матриц размера 4×4 и пространство многочленов от 2 переменных степени не выше 2?

3. В евклидовом пространстве квадратичная функция q достигает на единичной сфере (т.е. на множестве векторов длины 1) максимума на векторе a, и минимума на векторе b. Верно ли, что $a \perp b$?

4. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ две линейные функции на вещественном конечномерном линейном пространстве V. Выберите правильные утверждения:

   1. $f(x)g(y)$ билинейная функция;
   2. Количество положительных квадратов в нормальном виде квадратичной функции $f^2(x) + g^2(x)$ равен двум;
   3. Количество положительных квадратов в нормальном виде квадратичной функции $f^2(x) + g^2(x)$ не больше двух;
   4. Все неправильно.
