

Список вопросов к экзамену по линейной алгебре и геометрии (2019/20 учебный год, III поток)

- (1) Линейное пространство. Определение, примеры. Линейная оболочка. Понятие об аффинном пространстве.
- (2) Линейная (не)зависимость системы векторов. Размерность.
- (3) Базис. Координаты. Зависимость координат от базиса.
- (4) Подпространство. Размерность подпространства. Дополнение базиса подпространства до базиса пространства. Фактор-пространство.
- (5) Пересечение и сумма подпространств. Теорема об их размерностях. Прямая сумма. Внешняя прямая сумма.
- (6) Линейные функции на линейном пространстве. Их координаты, их зависимость от базиса. Двойственное пространство. Двойственный базис.
- (7) Изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности.
- (8) Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Зависимость ее от базиса. Пространство линейных отображений, его размерность.
- (9) Ядро и образ линейного отображения. Теорема об их размерностях.
- (10) Евклидовы и эрмитовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника.
- (11) Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
- (12) Ортогональное дополнение, его свойства. Проекция и ортогональная составляющая.
- (13) Расстояние от вектора до подпространства, угол между вектором и подпространством.
- (14) Метод наименьших квадратов. Псевдорешение.
- (15) Матрица Грама. Ее изменение при заменах базиса. Объем n -мерного параллелепипеда. Связь невырожденности матрицы Грама и линейной независимости векторов. Неотрицательность определителя.
- (16) Билинейные функции. Линейное пространство $B(V)$. Правое и левое ядро, их размерности. Невырожденность. Полуторалинейные функции.
- (17) Матрица билинейной функции, ее изменение при заменах базиса. (Косо)симметричные функции. Эрмитовы полуторалинейные функции.
- (18) Ортогональное дополнение относительно (косо)симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение.
- (19) Симметричные билинейные и эрмитовы полуторалинейные функции в одномерном пространстве. Кососимметричные билинейные функции в одномерном и двумерном пространстве.
- (20) Нормальный вид симметричных билинейных функций над полями \mathbf{R} и \mathbf{C} , эрмитовых полуторалинейных функций.
- (21) Нормальный вид кососимметричных билинейных функций.
- (22) Единственность нормального вида (косо)симметричных билинейных функций. Теорема инерции.
- (23) Теорема Якоби об угловых минорах. Критерий Сильвестра.
- (24) Псевдоевклидовы пространства. Типы векторов в псевдоевклидовых пространствах. Группа $O(p, q)$ псевдоевклидовых замен координат. Описание групп $O(2)$ и $O(1, 1)$.
- (25) Приведение симметрической билинейной функции к каноническому виду в евклидовом пространстве.
- (26) Обобщенный характеристический многочлен. Пример пары квадратичных форм, которую нельзя одновременно привести к диагональному виду.
- (27) Теорема об одновременном приведении одной квадратичной функции к каноническому виду, а другой (положительно определенной) – к нормальному виду.
- (28) Линейные операторы. Обратимость оператора. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора на инвариантное подпространство. Вид матрицы оператора, обладающего инвариантным подпространством.
- (29) Собственные значения и собственные векторы. Существование нетривиальных инвариантных подпространств в случае алгебраически замкнутого поля. Приведение матрицы оператора к верхнетреугольному виду.
- (30) Операторы проектирования. Их алгебраическая и геометрическая характеристика.
- (31) Диагонализируемые операторы, их характеристика.
- (32) Многочлены от операторов. Аннулирующий многочлен, его существование. Минимальный многочлен. Характеристический многочлен. Корни минимального и характеристического многочлена.
- (33) Теорема Гамильтона–Кэли.
- (34) Корневые подпространства. Стабилизация.
- (35) Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств (для случая алгебраически замкнутого поля).
- (36) Теорема Жордана о приведении к нормальной форме. Формулировка, сведение доказательства к случаю операторов с единственным собственным значением, доказательство единственности.
- (37) Операторы с единственным собственным значением. Теорема Жордана о приведении к нормальной форме для таких операторов.
- (38) Овеществление и комплексификация линейных пространств и операторов.
- (39) Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств у операторов над \mathbf{R} .
- (40) Сопряженный оператор. Инвариантность (для сопряженного оператора) ортогонального дополнения к инвариантному подпространству.
- (41) Самосопряженные и кососимметрические операторы, их канонический вид.
- (42) Теорема об одновременном приведении к каноническому виду пары самосопряженных операторов.
- (43) Изометрические операторы как операторы, сохраняющие скалярное произведение. Свойство матриц изометрических операторов в ортонормированном базисе.
- (44) Канонический вид унитарного оператора.
- (45) Канонический вид ортогонального оператора.
- (46) Неотрицательные операторы. Существование и единственность неотрицательного квадратного корня из неотрицательного оператора.
- (47) Полярное разложение оператора.
- (48) Векторы как линейные функции на двойственном пространстве. Полилинейные функции. Операторы как полилинейные функции.
- (49) Тензоры. Их координаты. Координатное определение тензоров.
- (50) Тензорное произведение тензоров. Базис в пространстве тензоров.
- (51) Пример тензора типа $(0, 2)$. Свертка тензоров. Поднятие и опускание индексов в случае евклидова пространства.
- (52) Симметричные и кососимметричные тензоры. Альтернирование. Внешнее умножение, его свойства.