Разбор некоторых задач из Д/З:

1416. Требуется проверить равенство $(A(f), g) = (f, A^*(g))$ для любых многочленов f и g.

$$(A(f), g) = \int_a^b \left(\int_a^b P(x,y) f(y)\,dy \right) g(x)\,dx$$

$$(f, A^*(g)) = \int_a^b f(x) \left(\int_a^b P(y,x) g(y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_a^b P(x,y) g(x)\,dx \right) f(y)\,dy$$

поменяли x на y, y на x.

Два повторных интеграла отличаются только порядком интегрирования.
В матане будет общая теорема о том, что в хороших случаях результат повторного интегрирования не зависит от порядка, но для многочленов это легко проверить без общей теории. Т.к. интеграл от суммы есть сумма интегралов, независимость от порядка интегриров. достаточно проверить на одночленах, т.е. при $P(x,y) = x^k \cdot y^l$; $f(x) = x^n$, $g(x) = x^m$.

$$\int_a^b \left(\int_a^b x^k y^l \cdot y^n\,dy \right) x^m\,dx = \int_a^b \left(\int_a^b x^k y^l x^m\,dx \right) y^n\,dy.$$

1437. Для проверки самосопряжённости нужно проверить, что $(A(f), g) = (f, A(g))$.

Пусть $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$;

$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$;

$(A(f))(x) = -a_1 \cos x - b_1 \sin x - \ldots - n^2 a_n \cos nx - n^2 b_n \sin nx$, Равенство $(A(f),g)=(f,A(g))$ можно проверить непосредственно, но можно и проще:

$$\int_0^{2\pi} f''(x)g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} g(x)\,d(f'(x)) = g(x)f'(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)g'(x)\,dx = -\int_0^{2\pi} f'(x)g'(x)\,dx$$

т.к. $f'(2\pi)=f'(0)$

аналогично $\int_0^{2\pi} g''(x)f(x)\,dx = -\int_0^{2\pi} f'(x)g'(x)\,dx$.

Ортонормированность базиса $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots$ мы проверяли в своё время. Остаётся проверить, что это — собственные векторы.

$A(\frac{1}{2})=0$ — соответствующее $\lambda=0$

$A(\cos x)=-\cos x$, соответств. $\lambda=-1$

$A(\sin x)=-\sin x$ —— // ——

— — — — — —

$A(\cos nx)=-n^2\cos nx$, соответств. $\lambda=-n^2$

$A(\sin nx)=-n^2\sin nx$, —— // ——

Задача 1445. Инвариантность L для A означает, что если $x\in L$, то $A(x)\in L$. Для доказательства инвариантности $L^\perp$ возьмём $x\in L^\perp$ и докажем, что $A(x)\in L^\perp$, что равносильно условию $(A(x),y)=0\ \forall y\in L$. Но $(A(x),y)=(x,A(y))$, и здесь $x\in L^\perp$, $A(y)\in L$, т.к. L инвариантно $\Rightarrow (x,A(y))=0\ \forall y\in L$.

Д/З: 1444, 1448, 1449(3).