Положительные и неотрицательные операторы.
Самосопряж. опер. положителен / неотрицателен, если все его собств. значения полож. / неотр. т.к. для любого самосопр. оператора $\exists$ ортонормир. базис, в котором его матрица диагональна, то положит. / неотриц. опер. — это те, которые приводятся к диаг. виду с полож. / неотр. числами на диагон. Отсюда получается другая характеризация таких операторов: (Ax, x) — полож. / неотриц. квадратичная функция, т.е. в подходящем ортонорм. базисе $(Ax,x) = \lambda x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ (если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$) полoжит. опред.) / $\lambda x_1^2 + \ldots + \lambda_p x_p^2$, ($\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$), $p \le n$ (если неотр.)

Задача 1454. 1.) $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geq 0 \ \forall x$;
$(AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) \geq 0 \ \forall x$. 2.) ~~...~~ Пусть A^*A имеет матрицу $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, тогда $(A^*Ax, x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$. Для положительности нужно, чтобы все $\lambda_i > 0$ (строго, а не $\geq$), а это — условие обратимости A^*A, которое равносильно обратимости A (если A (не) обратима, то A^T и A^TA — такие же).
3) $E + A^*A$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+\lambda_n \end{pmatrix}$ где все $\lambda \geq 0 \Rightarrow$ она положительная (строго).

Задача: Доказать, что у A^*A и AA^* одни и те же собственные значения.
Сначала предположим, что A обратим.
Тогда A^* – тоже обратим, и характеристические многочлены можно записать так:
$|A^*A-\lambda E|=|A^*-\lambda A^{-1}|\cdot|A|$; $|AA^*-\lambda E|=|A-\lambda(A^*)^{-1}|\cdot|A^*|$
Заметим, что $|A^*|=|A|$ (определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной), и $\left[A-\lambda(A^*)^{-1}\right]^*=A^*-\lambda A^{-1}$, поэтому два характ. многочлена (для A^*A и для AA^*) совпадают.
Если A не обратим, то его можно приблизить обратимыми: приведём к жордановой форме, и клетки вида $\begin{pmatrix} 0 & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ заменим на $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ & \varepsilon & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \varepsilon \end{pmatrix}$. Получим для каждого ε матрицу A_ε – обратимую при $\varepsilon\neq 0$, и $(A_\varepsilon)_{ij}\longrightarrow (A)_{ij}$ при $\varepsilon\to 0$ $\forall i,j=1,\dots,n$.
Характеристич. многочлены для $A_\varepsilon^*A_\varepsilon$ и для $A_\varepsilon A_\varepsilon^*$ совпадают при $\varepsilon\neq 0$ и непрерывны по ε $\Rightarrow$ их пределы тоже совпадают.

Неотрицательный квадратный корень. Если матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, и все $\lambda\geqslant 0$, то у неё 2^n квадратных корней $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, но только один – неотрицательный.

Задача 1457. 1). $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Сначала приведём к диаг. виду: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$;

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$; $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ $e_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ $e_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

$C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; $A = C \cdot J \cdot C^{-1}$;

$$A^{1/2} = C \cdot J^{1/2} \cdot C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Д/з 1457 (2, 3)